

### F3 FADENPENDEL

#### PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

**Wichtige physikalische Grundbegriffe:** Massenpunktmodell, mathematisches und physikalisches Pendel, Bewegungsgleichung, Schwerkraft, Newtonsche Axiome, Schwingungsdifferentialgleichung

Ein an einem Faden aufgehängter Körper stellt aufgrund der auf ihn wirkenden Schwerkraft und seiner Trägheit ein schwingungsfähiges System dar. Betrachtet man (idealisiert) einen punktförmigen Körper der Masse  $m$ , der an einem Faden der Länge  $l$  hängt und lenkt ihn um einen Winkel  $\varphi$  (Abb. 1) aus der Senkrechten aus, dann führt der Körper nach dem Loslassen Schwingungen um die Senkrechte aus.

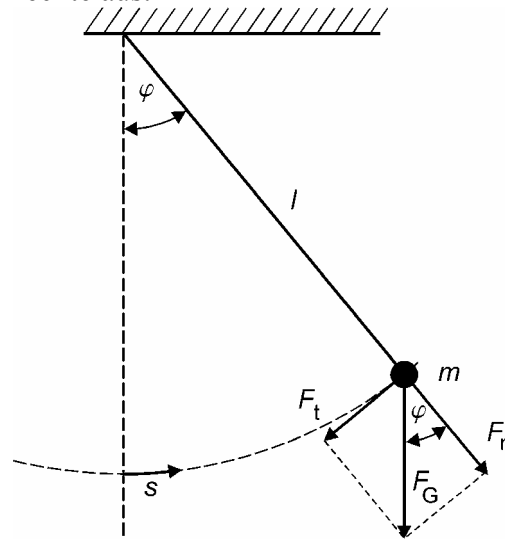


Abbildung 1: Fadenpendel

Bei Vernachlässigung der Masse des Fadens und der Luftreibung wirkt auf den Körper in jedem Punkt der Bahn senkrecht nach unten die Gewichtskraft

$$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}, \quad (1)$$

wobei  $g$  die Fallbeschleunigung ist. Die Normalkomponente (normal zur Bahn des Körpers)  $F_n = m \cdot g \cdot \cos\varphi$  dieser Kraft findet ihre Gegenkraft in der in der Aufhängung auftretenden Kraft und beeinflusst die Bewegung des Körpers nicht. Dagegen erzeugt die Tangentialkomponente  $F_t = m \cdot g \cdot \sin\varphi$  der Gewichtskraft entsprechend der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = m \cdot \ddot{s} = -m \cdot g \cdot \sin\varphi \quad (2)$$

eine Beschleunigung des Körpers längs der kreisförmigen Bahnkurve. Zwischen dem Auslenkwinkel  $\varphi$  und der Bahnkurvenkoordinate  $s$  auf der Bahnkurve besteht die Beziehung  $s = l \cdot \varphi$ . Bei (zeitlich) konstanter Fadenlänge  $l$  folgt daraus unmittelbar

$$\frac{ds}{dt} = l \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = l \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \quad (3)$$

Für kleine Auslenkwinkel  $\varphi$  gilt die bekannte Näherung  $\sin\varphi \approx \varphi$ , die ebenso wie (3) in die Bewegungsgleichung (2) eingesetzt werden kann. Daraus erhält man die Newtonsche Bewegungsgleichung für das mathematische Pendel mit

$$l \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + g \cdot \varphi = 0. \quad (4)$$

Diese Schwingungsdifferentialgleichung einfachster Form kann mit dem Ansatz

### F3 FADENPENDEL

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (5)$$

gelöst werden. Die hier zunächst willkürlich erscheinenden Konstanten heißen Amplitude  $\varphi_0$  bzw. Phasenkonstante  $\psi$  und sind durch die konkreten Anfangsbedingungen für  $t = 0$  festgelegt. Das mathematische Pendel vollführt demnach bei Auslenkung um kleine Winkel harmonische Schwingungen mit der Kreisfrequenz  $\omega$  und der Periodendauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (6)$$

die unabhängig von der Masse  $m$  und der Amplitude  $\varphi_0$  ist.

Die Beziehung (6) erlaubt prinzipiell bei bekannter Pendellänge  $l$  durch Messung der Periodendauer  $T$  eine Bestimmung der Fallbeschleunigung  $g$ . Allerdings ist die Pendellänge  $l$  nur sehr ungenau zu bestimmen. Deshalb bedient man sich hier zweckmäßig eines einfachen Tricks: Die Länge  $l$  kann um genau einstellbare Beträge  $l_i$  verändert werden und setzt sich gemäß  $l = l_0 + l_i$  zusammen. Damit wird aus (6) durch entsprechende Umformung

$$T_i^2 = \frac{4\pi^2 l}{g} = \frac{4\pi^2}{g} \cdot (l_0 + l_i). \quad (7)$$

Misst man nun die Periodendauern  $T_i$  für die entsprechenden  $l_i$  und stellt die Abhängigkeit  $T_i^2(l_i)$  dar, so ergibt sich eine Gerade mit dem Anstieg  $\frac{4\pi^2}{g}$  und dem Achsenabschnitt

$\frac{4\pi^2}{g} \cdot l_0$ . Damit werden die Größen  $g$  und  $l_0$  bestimmbar.

Die oben vorgenommenen Vereinfachungen, die zur Herleitung der Beziehung (6) verwendet wurden, bedürfen noch einer weiteren Diskussion.

**Betrachtung beliebiger Winkel:** Ohne die obige Beschränkung auf kleine Winkel  $\varphi$  liefert die Lösung der sog. elliptischen Differentialgleichung (2) für die Periodendauer das (exaktere) Ergebnis

$$T_\varphi = T \cdot \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \cdot \sin^4\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) + \dots \right\}, \quad (8)$$

wobei  $T$  durch die Beziehung (6) gegeben ist.

**Berücksichtigung des Auftriebs in Luft:** Der Massekörper aus Blei mit der Dichte von  $\rho_K = 11340 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  und dem Volumen  $V_K$  erfährt in Luft der Dichte  $\rho_L \approx 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  eine Auftriebskraft  $F_A = \rho_L \cdot V_K \cdot g$ , die der Gewichtskraft  $F_G = m \cdot g = \rho_K \cdot V_K \cdot g$  entgegengerichtet ist. Unter Berücksichtigung dieses Auftriebs in Luft erhält man schließlich für die Periodendauer

$$T_A = T \cdot \sqrt{\frac{\rho_K}{\rho_K - \rho_L}}. \quad (9)$$

**Betrachtung für ausgedehnten Massekörper:** Die Ausdehnung des schwingenden Körpers kann man berücksichtigen, wenn man von der Bewegungsgleichung des sog. physikalischen Pendels (vgl. Versuch „M9 Reversionspendel“) ausgeht. Die genaue Betrachtung bzw. Herleitung wird hier bewusst nicht angegeben, sondern nur das Ergebnis. Mit bekannten Abmessungen des Bleizylinders (Radius  $R$  und Höhe  $h$ ) am Faden der Länge  $l$  bestimmt sich die Periodendauer zu

$$T_s = T \cdot \sqrt{1 + \frac{3R^2 + h^2}{12 \cdot l^2}}. \quad (10)$$

## F3 FADENPENDEL

Der Einfluss des Fadens wurde auch bei diesen Betrachtungen aber ebenso vernachlässigt wie die auftretende Reibung. Es ist sicherlich empirisch einsichtig, dass schwache Reibung zu einer gedämpften Schwingung führen wird: Die Schwingungsamplitude klingt dann exponentiell mit sehr großer Zeitkonstante  $\tau$  wie  $e^{-\frac{t}{\tau}}$  ab.

### AUFGABEN

1. Bestimmung der Periodendauer für eine feste Fadenlänge. Die Zeitmessung erfolgt für 10 Schwingungen jeweils *zehnmal* an einem Umkehrpunkt *und* beim Nulldurchgang des Pendels. Berechnung von Mittelwert, Standardabweichung und Vertrauensbereich der Periodendauer und Diskussion der *Unterschiede* zwischen beiden Verfahren.
2. Bestimmung der Periodendauer für *eine* Schwingung beim Nulldurchgang mit zehnfacher Messung, Berechnung von Mittelwert und Standardabweichung, anschließend Vergleich mit den Ergebnissen der 1. Aufgabe 1 und Diskussion der Unterschiede.
3. Bestimmung der Periodendauer für 10 verschiedene Fadenlängen  $l_i$ . Aus jeweils 2 Messungen für 10 Schwingungen sind die Mittelwerte für die Periodendauern  $T_i(l_i)$  zu berechnen.
4. Grafische Darstellung der Ergebnisse der 3. Aufgabe in der Form  $T_i^2(l_i)$  in einem Diagramm. Verwendung von Gleichung (7) zur Bestimmung von Fallbeschleunigung  $g$  und Anfangslänge des Pendels  $l_0$  sowohl durch grafischen Geradenausgleich als auch numerische lineare Regression mit Ermittlung der zugehörigen Unsicherheiten.
5. Aus den Ergebnissen der 4. Aufgabe für  $l_0$  und  $g$  ist gemäß Gleichung (6) die Periodendauer  $T$  einschließlich ihrer Unsicherheit zu berechnen und mit den Ergebnissen der 1. Aufgabe zu vergleichen.
6. Abschätzung der systematischen Messabweichungen für die Periodendauer gemäß der o.g. drei Gleichungen (8-10) und ihres Einflusses auf die  $g$ -Bestimmung. Diskussion der Relevanz entsprechender Korrekturen.

### VERSUCHSHINWEISE

Ein gegossener Bleizylinder (Radius  $R \approx 23$  mm, Höhe  $h \approx 23$  mm, Masse  $m \approx 0,8$  kg) hängt an einem dünnen Stahldraht. Die Pendellänge lässt sich durch einen Schieber, in dessen Führung der Draht läuft, verändern. Die Längenänderung kann mit Hilfe von Ringmarken, deren Abstand 2 cm beträgt, eingestellt werden. Bei Auslenkung des Pendels aus seiner Ruhelage führt es Schwingungen aus, deren Periodendauer mit einer von Hand ausgelösten Stoppuhr bestimmt wird.

Für die ersten beiden Aufgaben ist zweckmäßig (warum?) eine möglichst große Fadenlänge zu wählen. Die zugehörige Stellung des Schiebers ist unbedingt zu notieren, da sie später benötigt wird. Für die 3. Aufgabe wird die Anfangsfadenlänge  $l_0$  um die Werte  $l_i$  ( $i = 1..10$ ) in Schritten von 4 cm verringert. Für die mit der 4. Aufgabe erforderliche Auswertung sind grafische Mittel (Anstiegsdreieck, grafische Extrapolation auf den Achsenabschnitt) und ein rechentechnisches Verfahren (lineare Regression) einzusetzen. Für Aufgabe 5 ist das bei Aufgabe 4 bestimmte Ergebnis für die Anfangslänge  $l_0$  zu verwenden. Bei Aufgabe 6 muss ermittelt werden, wie sich die Korrekturen der Schwingungsdauer gemäß (8-10) auf die Fallbeschleunigung  $g$  auswirken. Beachten Sie hier, dass  $g$  aus dem Anstieg der Geraden gemäß der 4. Aufgabe nach Gleichung (7) bestimmt wird! Überlegen Sie, welche zufälligen und welche systematischen Abweichungen die Messunsicherheit der Fallbeschleunigung  $g$  wesentlich bestimmen!