E4 Wechselstromwiderstände

Physikalische Grundlagen

Grundbegriffe
Wechselstromwiderstände (ohmsche, induktive und kapazitive) Leistung im Wechselstromkreis Effektivwerte Zeigerdiagramm Reihen- und Parallelschwingkreis

1. Wechselstromwiderstände

Die Bestimmung von Widerständen in Wechselstromkreisen erfolgt analog zu Gleichstromkreisen durch eine Spannungs- und Strommessung. Im Allgemeinen setzt sich der Widerstand eines Wechselstromkreises aus einer Kombination von ohmschen Widerständen (Wirkwiderständen) sowie induktiven und kapazitiven Widerständen (Blindwiderständen) zusammen. Diese Widerstände können technisch durch Bauteile (Widerstände, Spulen, Kondensatoren) realisiert sein oder sich aus der Anordnung der Bauelemente in der Schaltung ergeben (ohmsche und induktive Widerstände von Zuleitungen, Schaltkapazitäten). Im Unterschied zu ohmschen Widerständen treten bei Wechselstromwiderständen charakteristische Phasenverschiebungen zwischen Spannung und Strom auf, die bei der Berechnung des Gesamtwiderstandes zu berücksichtigen sind und zweckmäßig im Zeigerdiagramm dargestellt werden.

2. Ohmscher Widerstand

Der ohmsche Widerstand ist der Leitungswiderstand, der auch bei Gleichstrom vorhanden ist. Liegt an einem Leiter mit rein ohmschem Widerstand R eine Wechselspannung $U = U_m \sin \omega t$, so fließt in ihm ein Wechselstrom $I = I_m \sin \omega t$. In jedem Augenblick ist die angelegte Spannung dem Strom proportional

$$U_R = RI = RI_m \sin \omega t.$$

Zwischen Strom und Spannung tritt keine Phasenverschiebung auf. Die umgesetzte Leistung P

wird als Joulesche Wärme frei und ergibt sich über eine Periodendauer T gemittelt zu

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T U_m \sin\omega t \cdot I_m \sin\omega t \,\mathrm{d}\,t = U_m I_m \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2 \omega t \,\mathrm{d}\,t$$

$$P = U_m I_m \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$$

Messgeräte für Wechselspannungen bzw. -ströme zeigen die Effektivwerte an.

3. Induktiver Widerstand

Liegt an einer Spule eine Wechselspannung U_L , dann fließt in ihr ein Wechselstrom $I = I_m \sin\omega t$, und es entsteht ein magnetischer Fluss, der der zeitlich veränderlichen Stromstärke proportional ist. Deshalb wird -entsprechend dem Induktionsgesetz (vgl. Versuch E3)- in der Spule eine Gegenspannung induziert, die der zeitlichen Änderung des Stromes proportional ist. Aus dem Induktionsgesetz folgt:

$$U_L = -U_{\text{ind}} = L\frac{\mathrm{d}\,I}{\mathrm{d}\,t} = \omega L I_m \cos\omega t = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Der Proportionalitätsfaktor L (SI-Einheit: $[L] = 1\,\mathrm{V\,s\,A^{-1}} = 1$ Henry $= 1\,\mathrm{H}$) heißt *Selbstinduktionskoeffizient* oder *Induktivität* der Spule, er hängt von der Geometrie der Spule, deren Windungszahl und vom Material des Spuleninneren ab.

Setzt man $U_L = U_m \sin(\omega t + \varphi)$,so ergibt sich durch Vergleich für die Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung an einer Spule $\varphi = \pi/2$ und aus

$$U_m = \omega L I_m = R_L I_m$$

sieht man, dass das Verhältnis $U_m/I_m = R_L = \omega L$ die Bedeutung eines bei Wechselstrom auftretenden Widerstandes hat. Er heißt induktiver Widerstand der Spule und ist frequenzabhängig. Für die umgesetzte Leistung ergibt sich

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T I_m \sin\omega t \cdot U_L \,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \omega L \sin\omega t \cdot \cos\omega t \,\mathrm{d}\,t = 0 \tag{4.1}$$

In der Spule wird im zeitlichen Mittel keine Energie verbraucht, deshalb nennt man R_L einen „Blindwiderstand". Die Widerstandswirkung der Spule, d. h. die Begrenzung der Amplitude des Wechselstromes, beruht auf der zeitweiligen Energieaufnahme beim Aufbau des Magnetfeldes; beim Abbau desselben wird diese Energie aber wieder an die Stromquelle zurückgegeben. Der Strom in der Spule ist ein „wattloser" Strom.

4. Kapazitiver Widerstand

Im Gleichstromkreis wird ein Kondensator der Kapazität C (SI-Einheit: $[C] = 1\,\mathrm{A\,s\,V^{-1}} = 1$ Farad $= 1\,\mathrm{F}$) einmal aufgeladen und nach erfolgter Aufladung fließt kein Strom mehr. Der Kondensator stellt also für Gleichstrom einen unendlich hohen Widerstand dar. Im Wechselstromkreis dagegen muss sich ein Kondensator periodisch auf- und entladen, d. h. es fließt ein sich periodisch ändernder Strom $I = \mathrm{d}\,Q/\,\mathrm{d}\,t = I_m \sin \omega t$. Aus der Kondensatorgleichung $Q = CU$ folgt dann

$$I = \frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,t} = C\frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,t}$$

und durch Integration

$$U_C = \frac{1}{C}\int I\,\mathrm{d}\,t = \frac{I_m}{C}\int \sin \omega t\,\mathrm{d}\,t = -\frac{1}{\omega C}\cdot I_m \cos \omega t = \frac{1}{\omega C} I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Setzt man auch hier analog zum obigen Vorgehen $U_C = U_m \sin(\omega t + \varphi)$, so folgt aus dem Vergleich für die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom an einem Kondensator $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ und

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m = R_C I_m.$$

Man sieht, dass das Verhältnis $U_m/I_m = R_C = 1/\omega C$ die Bedeutung eines bei Wechselstrom auftretenden Widerstandes hat; er heißt kapazitiver Widerstand und ist frequenzabhängig. Die im Kondensator umgesetzte Leistung verschwindet analog zur Spule (Gl. (4.1)). Auch der kapazitive Widerstand ist ein Blindwiderstand, der auf dem sich periodisch auf- und abbauenden elektrischen Feld im Kondensator beruht. Der kapazitive Widerstand ist der Frequenz umgekehrt proportional; er bietet daher einem hochfrequenten Wechselstrom einen kleineren Widerstand als einem niederfrequenten (Anwendung: Hochfrequenzkurzschluss durch Parallelkondensator).

5. Zeigerdiagramm

In der Wechselstromlehre fasst man Spannungen, Ströme und Widerstände vorteilhaft als komplexe Größen auf und stellt sie in der komplexen Zahlenebene dar. Setzt man für die Wechselspannung bzw. den Wechselstrom die komplexen Ausdrücke

$$u = U_m e^{j\omega t} = U_m(\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

$$i = I_m e^{j(\omega t - \varphi)} = I_m[\cos(\omega t - \varphi + j \sin(\omega t - \varphi))]$$

mit $j = \sqrt{-1}$ als imaginärer Einheit und φ als Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung, so gilt das Ohmsche Gesetz in der komplexen Schreibweise

$$u = Zi.$$

Hieraus folgt für den komplexen Wechselstromwiderstand

$$Z = \frac{u}{i} = \frac{U_m}{I_m} e^{j\varphi} = |Z| e^{j\varphi}.$$

Der Betrag des Wechselstromwiderstandes $|Z|$ wird „Scheinwiderstand" R_S genannt. Er kann durch die Messung der Scheitel- oder der Effektivwerte von Strom und Spannung bestimmt werden. Entsprechend heißt der Realteil „Wirkwiderstand" und der Imaginärteil „Blindwiderstand".

	Widerstandsoperator	Wirkwiderstand	Blindwiderstand
Ohmscher Widerstand	$Z_R = R$	$\Re(Z_R) = R$	–
Induktiver Widerstand	$Z_L = j\omega L$	–	$\Im(Z_L) = \omega L$
Kapazitiver Widerstand	$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$	–	$\Im(Z_C) = \frac{1}{\omega C}$

Tabelle 4.1: *Komplexe Widerstände im Wechselstromkreis*

Der Wechselstromwiderstand Z setzt sich im Allgemeinen aus ohmschen, induktiven und kapazitiven Anteilen zusammen, für die man formal folgende komplexe Widerstandsoperatoren Z_R, Z_L und Z_C einführt (Tabelle 4.1).

Mit den so definierten Widerstandoperatoren erreicht man eine übersichtliche Beschreibung der Verhältnisse im Wechselstromkreis in Analogie zur Behandlung im Gleichstromkreis, denn es gelten die gleichen Gesetze für die Addition von Widerständen bei Reihen- und Parallelschaltungen wie im Gleichstromkreis. Zur übersichtlichen Darstellung dieser Verhältnisse benutzt man vorteilhaft die Zeigerdiagramme: Den Widerstandsoperatoren sind eineindeutig Punkte in der Gaußschen Zahlenebene zugeordnet, und die „Ortsvektoren" zu diesen Punkten, die so genannten Zeiger, können wie aus der Vektoralgebra bekannt addiert werden.

6. Reihenschwingkreis

Ein ohmscher Widerstand R, eine Spule der Induktivität L und ein Kondensator der Kapazität C seien in Reihe geschaltet. Wird eine Wechselspannung U angelegt, dann fließt durch alle drei Widerstände ein Strom, und es ergeben sich aufgrund der obigen Überlegungen charakteristische Phasenbeziehungen zwischen Strom und Spannung (Abb. 4.1). Für die Berechnung des Gesamtwiderstandes eines Wechselstromkreises benutzt man zweckmäßig die Widerstandsoperatoren (vgl. Ziffer 5). Für eine Reihenschaltung ergibt sich der Wechselstromwiderstand zu

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

den man in der komplexen Zahlenebene als Zeiger darstellen kann (Abb. 4.2). Für den Betrag des Wechselstromwiderstandes erhält man

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{4.2}$$

und für die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung

$$\tan\varphi = \frac{1}{R} \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

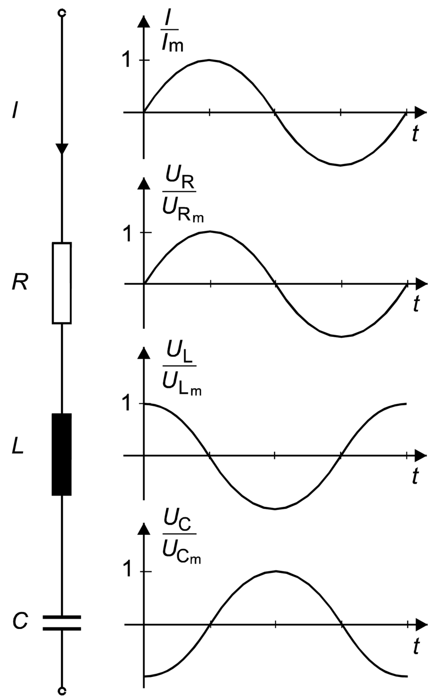

Abbildung 4.1: *Phasenbeziehungen im Reihenschwingkreis*

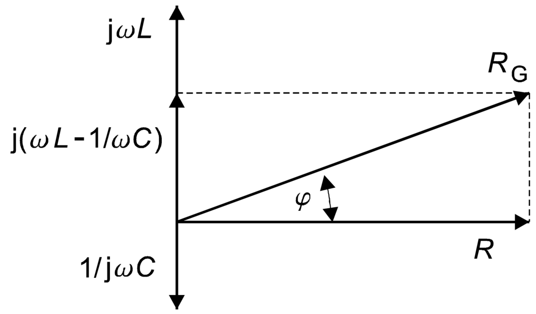

Abbildung 4.2: *Zeigerdiagramm für den Reihenschwingkreis*

Verändert man L, C oder ω kontinuierlich, so erreicht für $\omega L = 1/\omega C$ der Betrag des Wechselstromwiderstandes ein Minimum $|Z| = R$, unabhängig von der Größe der Blindwiderstände. Dieser Fall heißt Resonanzfall und tritt bei der Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{LC} \tag{4.3}$$

(Thomsonsche Formel) auf. Da im Resonanzfall der Widerstand minimal wird, nimmt der Strom ein Maximum an. Die an Spule und Kondensator abfallenden Teilspannungen sind im Resonanzfall gleich und heben sich gegenseitig auf. Bei genügend kleinem R können sie größer als die am Reihenschwingkreis anliegende Gesamtspannung U werden. Deshalb wird das Verhältnis

$$\begin{aligned} \rho &= (U_L)_{\text{res}}/U = (U_C)_{\text{res}}/U \\ \rho &= \omega L/R = 1/(\omega CR) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Spannungsüberhöhung genannt.

7. Parallelschwingkreis

Für den gedämpften Parallelschwingkreis (Abb. 4.3) erhält man

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{1/j\omega C} + \frac{1}{R + j\omega L}$$

und für den Scheinwiderstand:

$$R_S = \frac{L/C\sqrt{1 + (R/\omega L)^2}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \tag{4.5}$$

Oft ist $R \ll \omega L$. Dann kann die Wurzel im Zähler weggelassen werden, und im Resonanzfall wird R_S maximal: $R_S = L/RC$ (Sperrkreiswirkung). Für die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung erhält man

$$\tan\varphi = \frac{\omega L}{R}(1 - \omega^2 LC) - \omega RC. \tag{4.6}$$

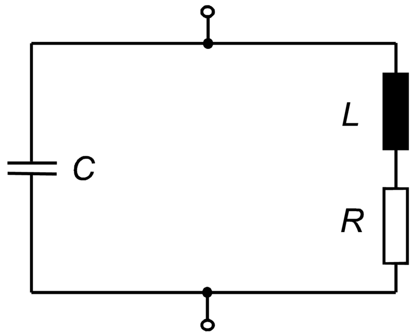

Abbildung 4.3: *Parallelschaltung*

Aufgaben

1. Überprüfung der tatsächlichen Ausgangsspannung und der Frequenzskale (für einige ausgewählte Frequenzen) des Tonfrequenz-RC-Generators mit Hilfe des Oszilloskops.

2. Bestimmung der Kapazität eines Kondensators aus der graphischen Darstellung des Kondensatorstromes I_C als Funktion der Frequenz f (Gl. (4.9)).

3. Bestimmung der Induktivität L und des Ohmschen Widerstandes R einer Spule aus den graphischen Darstellungen: Quadrat des Scheinwiderstandes R_S^2 als Funktion des Quadrates der Frequenz f^2 (Gl. (4.10)).

4. Bestimmung des Resonanzverhaltens eines Reihenschwingkreises bei Frequenzänderung. Graphische Darstellung des Stromes I und der Spannungsüberhöhung U_C/U_G als Funktion der Frequenz f (Gl. (4.4)).

5. Bestimmung des Resonanzverhaltens eines Parallelschwingkreises bei Frequenzänderung. Eintragung der Abhängigkeit des Stromes von der Frequenz in die grafische Darstellung der Aufgabe 4. Man zeichne vor Versuchsbeginn das Schaltbild.

6. Berechnung der Resonanzfrequenz aus den Werten der Aufgaben 2. und 3. (Gl. (4.3)). Vergleich mit dem in Aufgabe 4. und 5. bestimmten Wert.

Versuchsdurchführung

Zur Erzeugung der harmonischen Wechselspannung dient ein Tonfrequenz-RC-Generator, dessen Ausgangsspannung $U_G = 1.80$ V fest eingestellt und dessen Frequenz variabel ist. Alle Strom- und Spannungsmessungen werden mit einem Zweikanal-Oszilloskop durchgeführt, dessen Bedienung der Platzanleitung zu entnehmen ist. **Bei allen Messungen schalte man das Oszilloskop zuletzt ein und zuerst aus!** Die Verstärkung der beiden Vertikalverstärker Y_A bzw. Y_B des Oszilloskops kann mit dem Stufenschalter (hinterer Drehknopf) in 11 Stufen V_j von 20 VOLTS/DIV. bis 0.01 VOLTS/DIV. (wobei 1 DIV = 1 cm) und in jeder Stufe kontinuierlich (vorderer Drehknopf) verändert werden. Für alle Messaufgaben werden bei beiden Systemen die vorderen Drehknöpfe bis zum Einrasten (Anschlag) nach rechts gedreht, nur dann stimmt die Kalibrierung der Verstärker. Beim Aufbau der Schaltungen ist zu beachten, dass beide Vertikalverstärker Y_A bzw. Y_B des Oszilloskops auf ein und denselben Masseanschluss (⊥) geschaltet sind, der jeweils über den BNC-Koaxialkabel-Anschluss (in der Abschirmung) auch nach außen geführt wird.

Spannungsmessung
Zur Messung einer unbekannten Spannung U wird jeweils die Stufe V_j gewählt, die innerhalb des Messrasters des Bildschirmes das größtmögliche Messsignal bewirkt. Ist h die Gesamthöhe des Signals in cm, so berechnet sich die Spannung U nach

$$U = h \cdot V_j. \tag{4.7}$$

Strommessung
Sie erfolgt durch die Bestimmung des Spannungsabfalls U an einem Präzisionswiderstand (Dekadenwiderstand) von $R_p = 10\,\Omega$. Der Strom berechnet sich nach

$$I = U/R_p = hV_j/R_p. \tag{4.8}$$

Der Widerstand R_p ist in guter Näherung gegenüber den Widerständen von Spule und Kondensator vernachlässigbar.

Für Aufgabe 1 sind zunächst die Feineinstellungen für die Verstärkung in beiden Kanälen und die Zeitbasis des Oszilloskops zu überprüfen; die entsprechenden Einstellregler (markiert mit ▸) müssen auf die kalibrierte Position nach rechts bis zum Anschlag bzw. Einrasten eingestellt sein (s. auch oben). Mit einer geeigneten Verstärkung ist das sinusförmige Generatorsignal zu untersuchen: Aus der Spannung U_{SS} (Spitze-Spitze) des Signals ist sein Effektivwert zu bestimmen. Für verschiedene Generatorfrequenzen ist sowohl die Konstanz der Signalamplitude als auch die Frequenzskale des Generators zu überprüfen. Zur Bestimmung von Signalfrequenzen ist zweckmäßig über mehrere Signalperioden die Periodendauer zu ermitteln. Aus den erhaltenen Ergebnissen sind auch die Fehler für den Effektivwert und die Frequenz des Sinussignals abzuschätzen.

Für Aufgabe 2 (Schaltung nach (Abb. 4.4) wird die Generatorspannung (U_G = 1.80 V) dem Vertikalverstärker Y_B zugeführt. Mit dem anderen Vertikalverstärker Y_A wird der Spannungsabfall über R_p gemessen und daraus der Kondensatorstrom I_C berechnet (Gl. 4.8)). Diese Messung muss im empfindlichsten Messbereich ausgeführt werden. Die Generatorfrequenz wird von 1 kHz bis 15 kHz in Schritten von 1 kHz variiert. Für den kapazitiven Widerstand R_C gilt

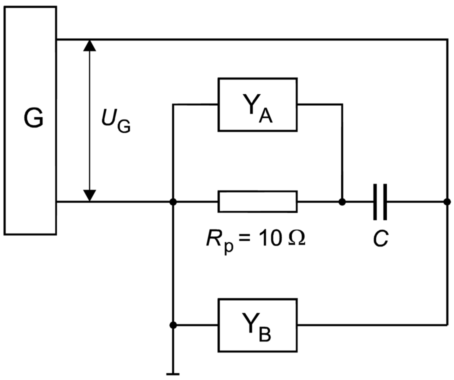

Abbildung 4.4: *Kapazitätsbestimmung*

$$R_C = \frac{U_G}{I_C} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$$

und daraus folgt

$$I_C = 2\pi C U_G f. \tag{4.9}$$

Aus der graphischen Darstellung von I_C als Funktion der Frequenz f bestimme man die Kapazität C des Kondensators.

Für Aufgabe 3 wird in der Schaltung (Abb. 4.4) der Kondensator durch die Spule ersetzt. Für den Scheinwiderstand R_S der Reihenschaltung der Spule mit der Induktivität L und ihres ohmschen Widerstandes R gilt nach Gl. (4.2)

$$R_S = \frac{U_G}{I_L} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2} \qquad \text{bzw.}$$

$$R_S^2 = R^2 + 4\pi^2 L^2 f^2 \tag{4.10}$$

Die Messung des Spulenstromes I_L erfolgt wie in Aufgabe 1. Die Generatorfrequenz wird im Bereich a von 10 Hz bis 100 Hz in Schritten von 10 Hz und im Bereich b von 100 Hz bis 500 Hz in Schritten von 100 Hz variiert. Für beide Frequenzbereiche stelle man grafisch das Quadrat des Scheinwiderstandes R_S^2 als Funktion des Frequenzquadrates f^2 dar und ermittle aus der Darstellung im Bereich a den ohmschen Widerstand R (Schnittpunkt mit der R_S^2-Achse) und aus der im Bereich b die Induktivität L aus dem Anstieg. Zweckmäßig ist jeweils ein Geradenausgleich, z.B. mit dem PC-Programm „GERA“.

Für Aufgabe 4 (Schaltung nach Abb. 4.4) wird die Spannung U_C am Kondensator mit dem Vertikalverstärker Y_B und der Strom I im Schwingkreis (Spannungsabfall über R_p) mit dem Vertikalverstärker Y_A gemessen (Gl. (4.7) bzw. (4.8)). Die Generatorfrequenz wird von 100 Hz bis 1200 Hz in Schritten von 100 Hz variiert, wobei im Resonanzgebiet die Schrittweite soweit verringert werden muss, dass das Strommaximum möglichst genau erfasst werden kann. Graphisch trage man den Strom I und das Spannungsverhältnis U_C/U_G als Funktion der Frequenz f auf.

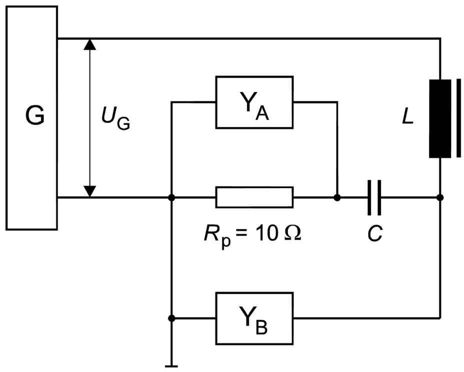

Abbildung 4.5: *Reihenschwingkreis*

Für die Resonanzfrequenz f_{res} bestimmt man die Spannungsüberhöhung $\rho = U_{Cres}/U_G$ (Gl. (4.4)). Daraus berechne man den ohmschen Widerstand der Spule R und vergleiche diesen mit dem Wert aus Aufgabe 2. Nach Abschluss aller Messungen stelle man bei der Resonanzfrequenz f_{res} unter Benutzung der Stufen- und Feinverstärkung beider Kanäle gleichgroße Signale von Strom und Spannung unter voller Ausnutzung des Bildschirmes ein und bestimme die Phasenverschiebung von Strom und Spannung!

Für Aufgabe 5 überlege man sich eine geeignete Schaltung. Da im Resonanzfall ein sehr kleiner Strom und folglich auch ein sehr geringes Signal gemessen werden muss, ist durch geschickte Leitungsführung und Abschirmung die Einstreuung von Störsignalen (z.B. 50 Hz Netzfrequenz und deren Harmonische) soweit wie möglich zu minimieren. Die Generatorfrequenz wird von 100 Hz bis 1200 Hz in Schritten von 100 Hz variiert, wobei erneut die Schrittweite im Resonanzgebiet soweit verringert werden muss, dass das Stromminimum möglichst gut erfasst wird.

Für Aufgabe 6 benutze man die Thomsonsche Schwingungsgleichung (Gl. (4.3)).

Fragen

1. Den Definitionsgleichungen für den induktiven und den kapazitiven Widerstand kann man leicht die Additionsgesetze für Induktivitäten und Kapazitäten entnehmen. Wie lauten sie?
2. Mit welchen anderen Verfahren (außer den hier bereits beschriebenen) lassen sich Kapazitäten und Induktivitäten messen?
3. Wie leitet man Gl. (4.5) und Gl. (4.6) her? (Hinweis: Man beachte, dass sich bei Parallelschaltung nicht die Widerstände bzw. Spannungen, sondern die Leitwerte bzw. Ströme addieren.)
4. Wie werden Reihen- und Parallelschwingkreise technisch genutzt?
5. Was versteht man unter den Begriffen *Hochpass*, *Tiefpass*, *Bandpass* und *Bandsperre*? Wie lassen sich entsprechende Filterschaltungen realisieren?