M9 REVERSIONSPENDEL

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Wichtige Grundbegriffe: Drehmoment, Trägheitsmoment, Steinerscher Satz, Bewegungsgleichung, mathematisches und physikalisches Pendel

1. Physikalisches Pendel: Die Periodendauer eines *physikalischen Pendels* mit der Masse m und dem Trägheitsmoment J_A bezüglich der Drehachse A (Abb. 1) folgt aus der Lösung der Bewegungsgleichung der Rotation des starren Körpers

$$J_\mathrm{A}\ddot{\varphi} = M\,. \tag{1}$$

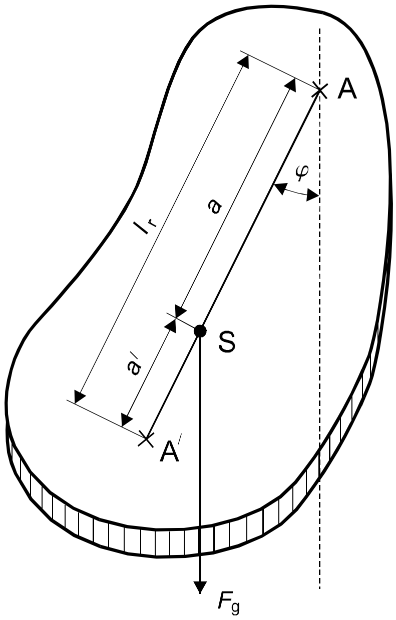

Abb.1 Physikalisches Pendel

Das Drehmoment M entsteht bei Auslenkung um den Winkel φ und bei Vernachlässigung der Reibung nur durch die im Schwerpunkt S angreifende Schwerkraft $F_\mathrm{g} = mg$

$$M = -aF_\mathrm{g}\sin\varphi = -a\,m\,g\sin\varphi\,, \tag{2}$$

wobei a der Abstand zwischen Drehachse und Schwerpunkt ist. Mit Hilfe des Satzes von Steiner kann die Berechnung von J_A bezüglich der Achse A auf die Berechnung von J_S bezüglich der zu A parallelen Achse durch S zurückgeführt werden

$$J_\mathrm{A} = J_\mathrm{S} + ma^2\,. \tag{3}$$

Die Lösung der Bewegungsgleichung (1) mit M gemäß (2) führt bei Beschränkung auf kleine Winkel $(\sin\varphi \approx \varphi)$ und J_A nach (3) auf die Periodendauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_\mathrm{S} + ma^2}{mag}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_\mathrm{r}}{g}}\,. \tag{4}$$

Die Lösung von (1) ohne Beschränkung auf kleine Winkel liefert die von der Amplitude φ_o abhängige Periodendauer

$$T(\varphi_\mathrm{o}) = T(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\varphi_\mathrm{o}}{2} + (\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4})^2\sin^4\frac{\varphi_\mathrm{o}}{2} + \ldots) \tag{5}$$

Die so genannte *reduzierte Pendellänge* l_r in (4) mit

$$l_\mathrm{r} = \frac{J_\mathrm{S} + ma^2}{ma} \tag{6}$$

ist die Länge eines mathematischen Pendels gleicher Periodendauer T. Sie definiert im Abstand l_r von A auf der Geraden durch A und S den so genannten *Schwingungsmittelpunkt* A′ (s. Abb. 1). Die Periodendauer für die beiden parallelen Achsen durch A bzw. A′ ist gleich, wie folgende Überlegung zeigt: Die Lösung der für a quadratischen Gleichung (6) führt auf

$$a_{1,2} = \frac{l_r}{2} \pm \sqrt{\frac{l_r^2}{4} - \frac{J_S}{m}}\,, \tag{7}$$

wobei außerdem die Beziehungen

$$a_1 + a_2 = l_r \quad \text{und} \tag{8}$$

$$a_1 \cdot a_2 = \frac{J_S}{m} \tag{9}$$

gelten. Die Achsen gleicher Periodendauern liegen also auf zwei zum Schwerpunkt konzentrischen Zylindermänteln mit den Radien a_1 und a_2 (Abb. 2).

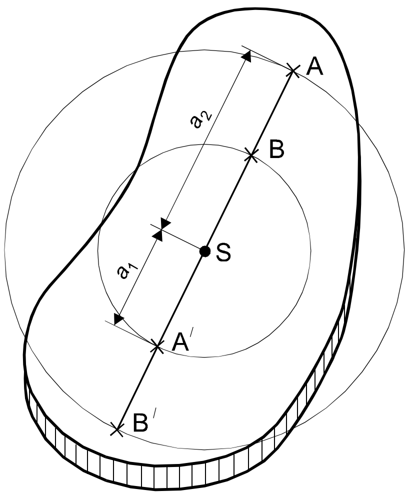

Abb. 2 Achsen gleicher Periodendauer

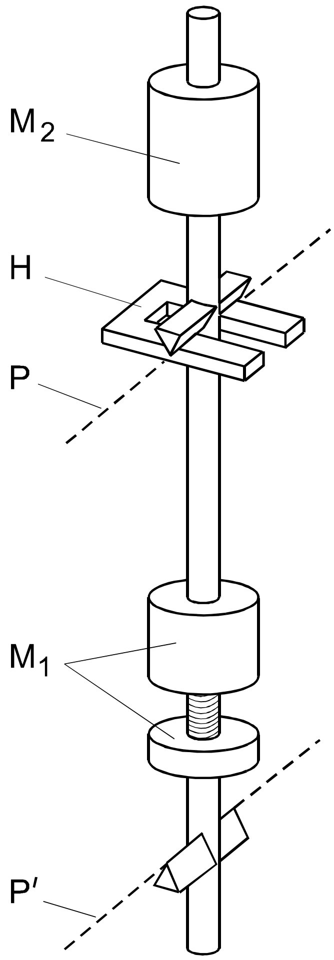

Abb. 3 Reversionspendel

Insbesondere sind die Periodendauern für parallele Achsen durch A und A′ sowie für B und B′ gleich. Der Vergleich mit den Bezeichnungen aus Abb. 1 liefert die Identität $a_1 = a'$ und $a_2 = a$.

2. Reversionspendel: Auf der Tatsache, dass sich auf einer durch den Schwerpunkt S gehenden Geraden jeweils zwei Punkte A und A′ bzw. B und B′ finden lassen, für die das

physikalische Pendel die gleichen Periodendauern hat, basiert das *Reversionspendel* nach *Johann Gottlieb Friedrich von Bohnenberger* bzw. *Henry Kater*. Man verändert die Aufhängepunkte bzw. aus konstruktiven Gründen meist die Massenverteilung eines Pendels so lange, bis sich für zwei Aufhängepunkte, die ungleichen Abstand von S haben, innerhalb der erzielbaren Messgenauigkeit die gleiche Schwingdauer ergibt. Dann ist der (vergleichsweise einfacher messbare) Abstand der Punkte gleich der reduzierten Pendellänge, und die Fallbeschleunigung g kann durch eine Messung der Periodendauer gemäß (4) ermittelt werden.
Die Fallbeschleunigung nach (4) kann hinsichtlich der erkennbaren systematischen Fehler infolge der endlichen Amplitude φ_0, der Pendelauslenkung und des Luftauftriebs (Dichte der Luft $\rho_\mathrm{L} = 1{,}29\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ und Dichte des Pendels $\rho = 7850\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$) korrigiert werden mit

$$g_\mathrm{c} = \left(\frac{2\pi}{T(\varphi_0)}\right)^2 l_\mathrm{r}\left(1 + \frac{\varphi_0^2}{8} + \frac{\rho_\mathrm{L}}{\rho}\right) \tag{10}$$

Ein Spezialfall des Reversionspendels ist das so genannte *Minimalpendel,* bei dem die Radien der beiden Zylindermäntel gleich sind. Nach (9) gilt $a_1 = a_2 = \sqrt{J_\mathrm{S} / m}$. In diesem Fall wird die reduzierte Pendellänge ein Minimum, d.h. die Periodendauer des Pendels ist gegen Lageänderungen der Aufhängung am unempfindlichsten.

AUFGABEN

1. Messung des Schneidenabstandes des Reversionspendels.
2. Messung der Periodendauer des Pendels als Funktion der Stellung der beweglichen Masse.
3. Präzisionsbestimmung der Periodendauer in der allernächsten Umgebung des mithilfe von Aufgabe 2 zu ermittelnden geeigneten Schnittpunktes der Reversion.
4. Messung der Amplitudenabhängigkeit der Periodendauer und Überprüfung der Gültigkeit von (5).
5. Berechnung der Fallbeschleunigung nach Formel (4).

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Das verwendete Reversionspendel (s. Abb. 3) ist eine ca. 1,5 m lange Stahlstange mit Schneiden in den Drehachsen P und P', die in eine Halterung H eingehängt werden. Es sind auf der Eisenstange unsymmetrisch die zwei Massenstücke M_1 (verschiebbar) und M_2 (fixiert) angebracht. Die Stellung von M_1 relativ zu den Schneiden kann an Ringmarken auf der Stahlstange abgelesen werden. M_1 ist zweigeteilt und kann auseinandergeschraubt werden. Das Einsetzen des Pendels in die Halterung muss mit großer Vorsicht erfolgen (vgl. Hinweise am Versuchsplatz). Das untere Ende des Reversionspendels bewegt sich beim Schwingen durch eine Lichtschranke, die einen elektronischen Zeitmesser schaltet, der die Zeit für eine vorwählbare Anzahl von Perioden misst.
Für ***Aufgabe 1*** wird der Schneidenabstand des Pendels mit dem vorhandenen Anbaumessschieber in der Aufhängevorrichtung gemessen. (Man beachte die dort angebrachten Hinweise!) Der Schneidenabstand sollte unbedingt mehrfach gemessen und daraus Mittelwert und Messunsicherheit bestimmt werden.
Für ***Aufgabe 2*** wird das zusammengeschraubte Massestück M_1 schrittweise um 2 Ringmarken verschoben und jeweils die Zeit für zwei Schwingungen gemessen. Die Zeitmessung erfolgt für beide Aufhängungen, wobei aber der Abstand x zwischen einer Schneide und M_1 immer von ein und derselben Schneide (gleichgültig von welcher) aus zu zählen ist.

M9 REVERSIONSPENDEL

Als Voraussetzung für die Korrigierbarkeit einer systematischen Abweichung ist stets wegen (5) bei *gleichen* Amplituden zu messen!

Die grafische Darstellung $T = \mathrm{f}(x)$, die wegen Aufgabe 3 zweckmäßig *gleich während der Messungen* anzufertigen ist, ergibt für beide Aufhängungen parabelähnliche Kurven mit einem Schnittpunkt bei x_1 und einem Schnittpunkt bei x_2. Die Periodendauern an den Schnittpunkten müssen gleich sein, weil die zugehörigen a_1 bzw. a_2 zwar wegen der verschiedenen J_S nach (7) unterschiedlich sind, in beiden Fällen aber $l_r = a_1 + a_2$ gemäß (8) mit dem Schneidenabstand übereinstimmen muss. Man überlege sich, welcher der beiden Schnittpunkte für Aufgabe 3 am besten geeignet ist!

Für ***Aufgabe 3*** sucht man sich für beide Aufhängungen jeweils zwei sehr dicht am erwarteten Schnittpunkt liegende Messwertpaare (eines oberhalb, eines unterhalb):

Durch Veränderung der Massenverteilung (Verschraubung am Laufgewicht) wird in der allernächsten Umgebung des Schnittpunktes aus jeweils mindestens 10 Schwingungen die Periodendauer für beide Aufhängungen möglichst genau bestimmt, wobei unbedingt auf gleiche Amplituden geachtet werden muss. Aus den zwei benachbarten Messpunkten für jede Aufhängung erhält man dann durch lineare Interpolation jeweils eine Gerade. Deren Schnittpunkt liefert den Wert der Periodendauer T, der zum gemessenen Schneidenabstand als reduzierter Pendellänge l_r gehört. Der gesuchte Schnittpunkt der beiden Geraden mit der für beide Achsen gleichen Schwingungsdauer ist relativ einfach zu ermitteln, ebenso seine Unsicherheit. Es ist leicht zu verstehen, dass dieses Verfahren möglichst dicht benachbarte Punkte erfordert: Nur in einem sehr kleinen Intervall kann die (komplizierte) schiefe Parabel von Aufgabe 2 linear angenähert werden!

Alternativmethode: Bei sehr kluger Vorgehensweise bzw. genügender Geschicklichkeit gelingt es sogar mitunter, den Punkt mit (innerhalb der Messgenauigkeit) gleichen Schwingungsdauern direkt zu treffen. Allerdings erfordert das eine sehr überlegte und feinfühlige Veränderung der Massenverteilung (Verschraubung)!

Für ***Aufgabe 4*** messe man für die Lage x_1 oder x_2 des Massestücks M_1 die Amplitudenabhängigkeit der Periodendauer T für 5 verschiedene Amplitudenwerte aus je mindestens 10 Schwingungen. Anhand der grafischen Darstellung $T = \mathrm{f}(\varphi_0^2)$ überprüfe man die Gültigkeit von (5).

FRAGEN

1. Besteht eine Korrespondenz zwischen den beiden Schnittpunkten in der grafischen Darstellung $T = \mathrm{f}(x)$ und den Aufhängungen in A / A' bzw. B / B' (s. Abb. 2)?
2. Leiten Sie die im Hinblick auf endliche Auslenkwinkel φ_0 und den Luftauftrieb korrigierte Formel (10) für die Fallbeschleunigung her!
3. Wie beeinflusst die unvermeidliche Dämpfung der Schwingung das Ergebnis für die Fallbeschleunigung?
4. Wie erhält man die Bedingung für das Minimalpendel $a_1 = a_2$?
5. Welche Periodendauer besitzt ein mathematisches Pendel, dessen Aufhängepunkt an der Erdoberfläche und dessen Masse im Erdmittelpunkt liegt?
6. Warum ist ein Fadenpendel für die Präzisionsbestimmung der Fallbeschleunigung nicht geeignet?
7. Wovon ist die Fallbeschleunigung *lokal* abhängig?