

E1 WHEATSTONESCHE BRÜCKE

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Elektrischer Widerstand, Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Gesetze, Potentiometer, Wheatstonesche Brücke.

1. Kirchhoffsche Gesetze

Wird an einen elektrischen Leiter eine Spannung U angelegt und es fließt ein Strom I , dann definiert man das Verhältnis

$$R = \frac{U}{I} \quad (1)$$

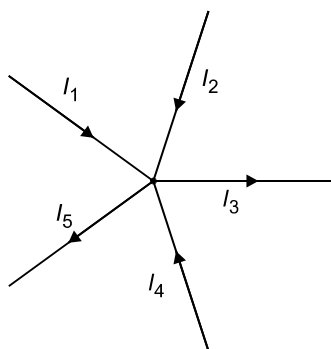
(SI-Einheit: $1 \Omega = 1 \text{ V}/1 \text{ A}$) als den Widerstand des Leiters.

Falls R nur vom Verhältnis U/I und nicht von den Einzelgrößen selbst abhängt, wird R Ohmscher Widerstand genannt. Es gilt dann das Ohmsche Gesetz

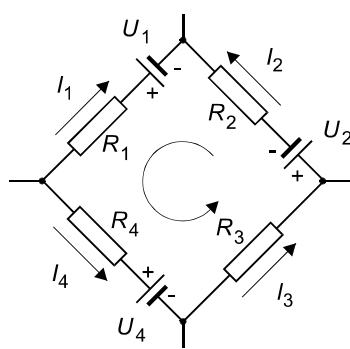
$$U = R I, \quad (2)$$

in dem $R = \text{const.}$ vorausgesetzt wird.

Zur Berechnung der Ströme und Spannungen in Netzwerken - darunter versteht man jede beliebige Kombination aus Spannungsquellen, Widerständen und Leitungsdrähten - benötigt man



a) Knotensatz



b) Maschensatz

Abb. 1 KIRCHHOFFSCHE GESETZE

neben dem Ohmschen Gesetz die Kirchhoffschen Sätze:

1. Knotensatz: In jedem Knotenpunkt einer Schaltung ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme (Abb. 1a)). Gibt man den zufließenden Strömen positives, den wegfließenden Strömen negatives Vorzeichen, dann erhält der Knotensatz die Form:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0. \quad (3)$$

2. Maschensatz: In jeder Masche eines Netzwerkes (Abb. 1b) ist die Summe der Spannungen aller Spannungsquellen gleich der Summe der Spannungsabfälle an den Widerständen der Masche:

$$\sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n R_i I_i. \quad (4)$$

Für die praktischen Berechnungen muss für jede Masche ein Umlaufsinn und für jeden Zweig der Masche eine Zählrichtung des Stromes festgelegt werden; diese Festlegungen können willkürlich erfolgen. Zur Berechnung einer Masche (Abb. 1b)) gehe man von einem Knotenpunkt der Masche aus und berechne im Umlaufsinn die Summe der Spannungen und der Spannungsabfälle. Wird eine Spannungsquelle vom Minus- zum Pluspol durchlaufen, rechnet man die Spannung positiv, andernfalls negativ. Stimmen angenommene (technische) Stromrichtung und Umlaufsinn überein, so gilt der Spannungsabfall am Widerstand als positiv, andernfalls negativ. Für die dargestellte Masche erhält man bei Beachtung dieser Regeln

$$-U_1 + U_2 + U_4 = I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_4 R_4.$$

2. Widerstandsnetzwerke

Werden Ohmsche Widerstände $R_1, R_2 \dots R_n$ in einem Gleichstromkreis zusammengeschaltet, so können sie zu einem resultierenden Widerstand R_g zusammengefasst werden. Unter Anwendung des Ohmschen Gesetzes und der Kirchhoffschen Sätze ergibt sich

bei Reihenschaltung
$$R_g = \sum_{i=1}^n R_i, \quad (5)$$

bei Parallelschaltung
$$1/R_g = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (6)$$

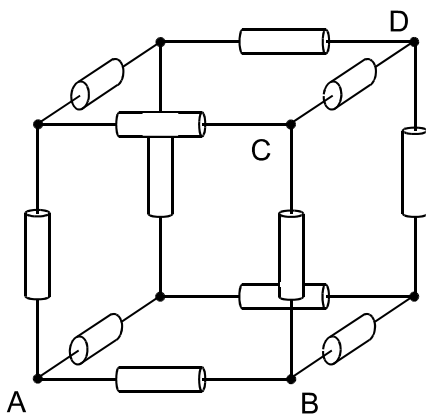


Abb. 2 WIDERSTANDSWÜRFEL

Mit diesen Formeln lassen sich kompliziertere Netzwerke oft einfacher berechnen als durch die direkte Anwendung der Kirchhoffschen Sätze (Gl. (3) u. (4)). Beispielsweise erhält man für zwölf gleichgroße Widerstände R , die die

Kanten eines Würfels bilden (Abb. 2), folgende Werte für den Gesamtwiderstand R_g

zwischen A und B (Würfelkante)
$$R_g = 7/12 \cdot R \quad (7)$$

zwischen A und C (Flächendiagonale)
$$R_g = 3/4 \cdot R \quad (8)$$

zwischen A und D (Raumdiagonale)
$$R_g = 5/6 \cdot R \quad (9)$$

3. Widerstandsmessung

Auf der Grundlage der Definition des Widerstandes (Gl. (1)) könnte eine Bestimmung von R durch die Messung von Spannung und Strom mit einem Schaltungsaufbau nach

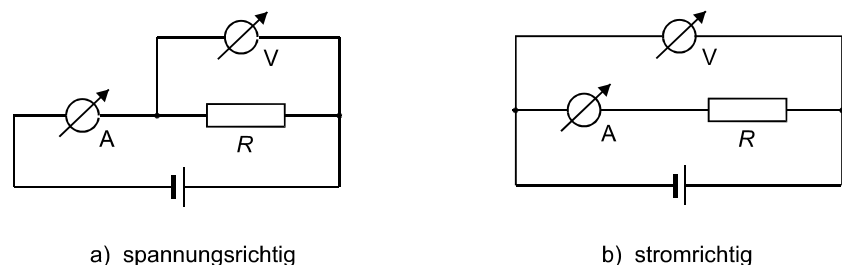


Abb. 3 MESSUNG VON STROM UND SPANNUNG

Abb. 3 a) oder 3 b) erfolgen. Beide Schaltungen führen aber zu systematischen Fehlern bei der Bestimmung von R . Bei der sog. „spannungsrichtigen“ Schaltung (Abb. 3 a)) wird die Spannung am Widerstand R korrekt gemessen, aber der Strommesser A erfasst auch den durch den Span-

nungsmesser V fließenden Strom. Der Strom würde nur dann richtig gemessen, wenn der Spannungsmesser einen unendlich hohen Innenwiderstand hätte. Mit der sog. „stromrichtigen“ Schaltung könnte die Spannung nur dann richtig gemessen werden, wenn der Innenwiderstand des Strommessers $R_A = 0$ wäre. Einfache Labormessmittel erfüllen diese Anforderungen im Allgemeinen nicht hinreichend. Auf der Grundlage der Kirchhoffschen Gesetze wäre eine Korrektur dieser systematischen Fehler möglich, würde aber die Kenntnis bzw. eine zusätzliche Bestimmung der Innenwiderstände der benutzten Messgeräte erfordern.

Diese insbesondere die Präzisionsmessung von Widerständen erschwerenden Umstände können bei einer Messung von R mit der Wheatstoneschen Brücke (Abb. 4) umgegangen werden.

Sie besteht aus einem unbekanntem Widerstand R_x , einem Normalwiderstand R_N , einem Potentiometer P , einem empfindlichen Anzeigegerät I , einer Spannungsquelle U_0 und einem Schalter S . Der Widerstand des Potentiometers wird durch einen verstellbaren Schleifkontakt in die Teilwiderstände R_1 und R_2 geteilt. Zur Messung wird das Potentiometer so eingestellt, dass das Anzeigegerät bei geschlossenem Schalter keinen Ausschlag zeigt, d.h. zwischen den Punkten A und B keine Potentialdifferenz besteht und damit kein Strom fließt. In diesem Fall spricht man vom Brückengleichgewicht und die Kirchhoffschen Gesetze liefern nach dem Maschensatz (Gl. (4)) und nach dem Knotensatz (Gl. (3)):

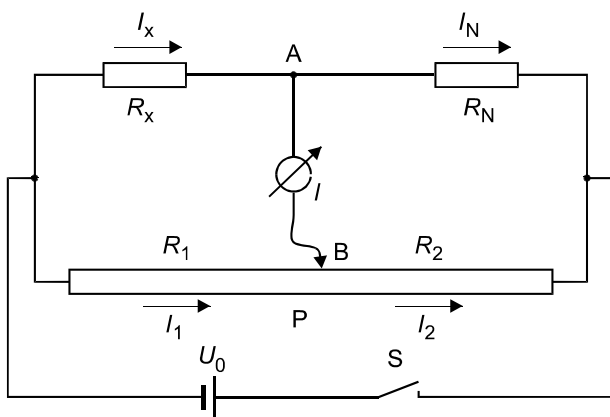


Abb. 4 BRÜCKENSCHALTUNG

Der Widerstand des Potentiometers wird durch einen verstellbaren Schleifkontakt in die Teilwiderstände R_1 und R_2 geteilt. Zur Messung wird das Potentiometer so eingestellt, dass das Anzeigegerät bei geschlossenem Schalter keinen Ausschlag zeigt, d.h. zwischen den Punkten A und B keine Potentialdifferenz besteht und damit kein Strom fließt. In diesem Fall spricht man vom Brückengleichgewicht und die Kirchhoffschen Gesetze liefern nach dem Maschensatz (Gl. (4)) und nach dem Knotensatz (Gl. (3)):

$$I_x R_x = I_1 R_1 \quad \text{bzw.} \quad I_N R_N = I_2 R_2$$

$$I_x = I_N \quad \text{bzw.} \quad I_1 = I_2$$

Zusammengefasst erhält man

$$R_x = R_N \frac{R_1}{R_2} \quad (10)$$

Zur Bestimmung des Widerstandes R_x ist somit nur die Kenntnis des Normalwiderstandes R_N sowie des Widerstandsverhältnisses R_1/R_2 notwendig. Das Anzeigegerät wird ausschließlich als Spannungsindikator zum Abgleichen der Messbrücke benutzt und muss deshalb nicht geeicht sein. Die Betriebsspannung U_0 muss weder bekannt noch besonders konstant sein, eine Verringerung würde aber zu sinkender Empfindlichkeit der Anzeige und damit zur Herabsetzung der Messgenauigkeit führen.

AUFGABEN

1. Es sind drei Widerstände einzeln und in 5 verschiedenen Dreierkombinationen je sechsmal auszumessen.
2. Die Widerstände für die Dreier-Kombinationen sind außerdem aus den Messwerten der Einzelwiderstände zu berechnen (Gl. (5) bzw. (Gl. (6)) und mit den Messwerten der Dreierkombinationen zu vergleichen.
3. An einem Widerstandswürfel aus 12 gleichgroßen Einzelwiderständen R sind die jeweiligen Gesamtwiderstände über eine Kante, eine Flächendiagonale und eine Raumdiagonale zu messen und daraus R zu berechnen (Gl. (7),(8),(9)).

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Der Schaltungsaufbau erfolgt nach Abb. 4. Das Potentiometer besteht aus einem homogenen Nickeldraht der Länge $l = 1$ m mit einem verschiebbaren Schleifkontakt, welcher den Draht in zwei Abschnitte mit den Teillängen x und $l - x$ unterteilt. Dadurch wird das Widerstandsverhältnis R_1/R_2 durch ein Längenverhältnis ausgedrückt und aus der Gleichung für die Wheatstone-sche Brücke (Gl. (9)) folgt

$$R_x = R_N \frac{x}{l - x}. \quad (11)$$

Der Normalwiderstand R_N wird durch Dekadenwiderstände gebildet. Beim Messvorgang wird zunächst der unempfindlichste Messbereich des Anzeigeeinstrumentes gewählt, der Schleifkontakt etwa in Mittelstellung geschoben und bei wiederholtem kurzzeitigen Tasten des Schalters das Brückengleichgewicht durch eine passende Wahl des Normalwiderstandes R_N annähernd herbeigeführt. Die anschließende Feineinstellung erfolgt nur noch mit dem Schleifkontakt des Potentiometers, wobei das Brückengleichgewicht jeweils durch kurze Schalterbetätigung getestet wird. Bei abgeglichener Brücke darf auch im empfindlichsten Messbereich keine Zeigerbewegung bemerkbar sein.

Theoretisch könnte bei beliebigem Normalwiderstand R_N jeder Widerstand R_x gemessen werden (Gl. (9)), da der Quotient R_1/R_2 alle Werte zwischen Null und unendlich annehmen kann. Die Messgenauigkeit wird jedoch am größten für $R_x = R_N$, d. h. $R_1/R_2 = 1$. Dies lässt sich durch Diskussion der relativen Messunsicherheit von R_x begründen. Bei Vernachlässigung des Fehlers von l gilt:

$$\frac{u_{R_x}}{R_x} = \left| \frac{u_{R_N}}{R_N} \right| + \left| \frac{l u_x}{x(l - x)} \right|.$$

Das Minimum der Messunsicherheit liegt vor, wenn der Nenner $x(l - x)$ maximal wird, d. h. bei $x = l/2$ bzw. $R_1 = R_2$. Der Normalwiderstand sollte also immer dem Messproblem angepasst werden.

FRAGEN

1. Was besagen die Kirchhoffschen Gesetze und wie sind sie auf die Wheatstonesche Brücke anzuwenden?
2. Leiten Sie den Gesamtwiderstand für die Reihenschaltung (Gl. (5)) und die Parallelschaltung (Gl. (6)) von Einzelwiderständen ab.
3. Leiten Sie die Beziehungen Gl. (7) bis Gl. (9) für den Widerstandswürfel ab.
4. Diskutieren Sie Vor- und Nachteile Ihnen bekannter Methoden zur Widerstandsmessung.
5. Wie verändert man die Messbereiche von Strom- und Spannungsmessern?
6. Was versteht man unter dem spezifischen Widerstand?