

E4 WECHSELSTROMWIDERSTÄNDE

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Ohmscher, induktiver und kapazitiver Widerstand im Wechselstromkreis, Ohmsches Gesetz, Darstellung von Widerständen in der komplexen Ebene, Reihenschwingkreis, Resonanz.

In der Wechselstromlehre fasst man Spannung, Strom und Widerstände vorteilhaft als komplexe Größen auf und stellt sie als Zeiger dar. Benutzt man für die Wechselspannung bzw. den Wechselstrom die komplexen Ausdrücke

$$u = U_m e^{j\omega t} = U_m (\cos \omega t + j \sin \omega t) \quad (1)$$

$$i = I_m e^{j(\omega t - \varphi)} = I_m [\cos(\omega t - \varphi) + j \sin(\omega t - \varphi)] \quad (2)$$

mit $j = \sqrt{-1}$ als imaginärer Einheit, ω als Kreisfrequenz und φ als Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung, so gilt das Ohmsche Gesetz in komplexer Schreibweise

$$u = Zi. \quad (3)$$

Z ist der Wechselstromwiderstand, der im Allgemeinen eine komplexe Größe ist. Besteht zwischen Strom und Spannung eine Phasendifferenz φ , so ist diese im Zeiger des Widerstandes enthalten

$$Z = |Z|e^{j\varphi}. \quad (4)$$

Der Betrag des Wechselstromwiderstandes $|Z|$ heißt Scheinwiderstand. Er kann bestimmt werden durch Messung der Scheitel- oder der Effektivwerte von Strom und Spannung, denn durch

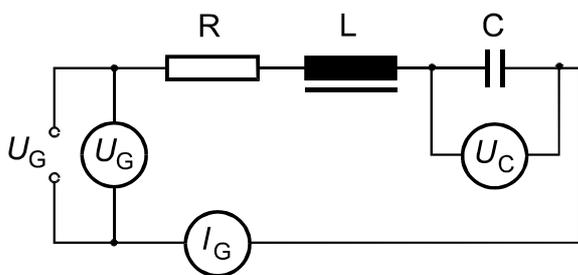


Abb.1 REIHENSCHWINGKREIS

Einsetzen in Gl. (3) erhält man für die Scheitelwerte

$$U_m e^{j\omega t} = |Z|e^{j\varphi} \cdot I_m e^{j\omega t} e^{-j\varphi} \quad (5)$$

$$U_m = |Z| \cdot I_m$$

und durch Division durch $\sqrt{2}$ für die Effektivwerte

$$U_{\text{eff}} = |Z| \cdot I_{\text{eff}}. \quad (6)$$

Der Wechselstromwiderstand Z setzt sich im Allgemeinen aus ohmschen, induktiven und kapazitiven Anteilen zusammen. Durch die formale Einführung der komplexen Widerstandsoperatoren Z_R , Z_L und Z_C erreicht man eine übersichtliche Beschreibung der Verhältnisse im Wechselstromkreis in Analogie zur Behandlung im Gleichstromkreis.

Für einen ohmschen Widerstand R ist

$$Z_R = R \quad \text{und} \quad |Z_R| = R \quad (\text{Wirkwiderstand}), \quad (7)$$

für einen induktiven Widerstand ist

$$Z_L = j\omega L \quad \text{und} \quad |Z_L| = \omega L \quad (\text{induktiver Blindwiderstand}), \quad (8)$$

für einen kapazitiven Widerstand ist

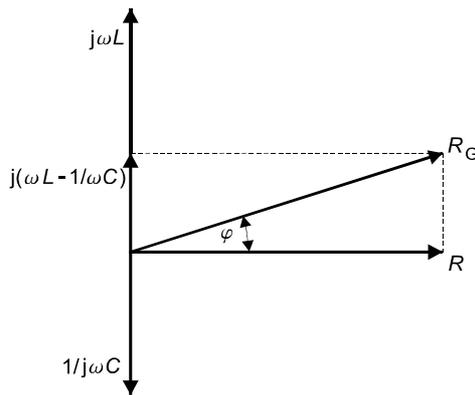
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} \quad \text{und} \quad |Z_C| = \frac{1}{\omega C} \quad (\text{kapazitiver Blindwiderstand}).$$

(9)

Zur Berechnung des Wechselstromwiderstandes Z eines beliebigen Wechselstromkreises gelten für die Widerstandsoperatoren R , $j\omega L$ und $-\frac{j}{\omega C}$ die aus der Gleichstromlehre bekannten

Gesetze für Reihen- und Parallelschaltung. Für eine Reihenschaltung aus R , L und C (Reihenschwingkreis, Abb. 1) ist der Wechselstromwiderstand

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \quad (10)$$



In der komplexen Ebene (Abb. 2) ergibt sich Z durch Vektoraddition von R und $j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$ und für den

Betrag von Z erhält man (Pythagoras)

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (11)$$

Verändert man L , C oder ω kontinuierlich, so nimmt für $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ der Widerstand $|Z| = R$ ein Minimum

und der Strom I ein Maximum an. Man spricht dann von Resonanz im Reihenschwingkreis mit der Resonanzfrequenz (Thomsonsche Formel)

$$\omega_{\text{res}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (12)$$

Das Strommaximum bei Resonanz kann zu Teilspannungen $(U_C)_{\text{Res}} = (U_L)_{\text{Res}}$ an den Blindwiderständen führen, die größer sind als die am Reihenschwingkreis anliegende Gesamtspannung U_G . Das Verhältnis

$$\rho = \frac{(U_C)_{\text{Res}}}{U_G} = \frac{(U_L)_{\text{Res}}}{U_G} = \frac{1}{\omega_{\text{Res}} CR} = \frac{\omega_{\text{Res}} L}{R} \quad (13)$$

wird Spannungsüberhöhung genannt.

AUFGABEN

1. Bestimmung der Kapazität C eines Kondensators aus der graphischen Darstellung des Kondensatorstromes I_C als Funktion der Frequenz f (Gl. (17)).
2. Bestimmung der Induktivität L und des Ohmschen Widerstandes R einer Spule aus den graphischen Darstellungen: Quadrat des Scheinwiderstandes R_S^2 als Funktion des Quadrates der Frequenz f^2 (Gl. (19)).

3. Bestimmung des Resonanzverhaltens eines Reihenschwingkreises bei Frequenzänderung. Graphische Darstellung des Stromes I und der Spannungsüberhöhung U_C/U_G als Funktion der Frequenz f (Gl. (13)) in einem gemeinsamen Diagramm.
4. Berechnung der Resonanzfrequenz aus den Werten der Aufgaben 1 und 2 (Gl. (20)) und Vergleich mit dem in Aufgabe 3 bestimmten Wert. Fehlerdiskussion.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Zur Erzeugung der harmonischen Wechselspannung dient ein Tonfrequenz-RC-Generator, dessen Ausgangsspannung $U_G = 1,80 \text{ V}$ fest eingestellt und dessen Frequenz variabel ist. Alle Strom- und Spannungsmessungen werden mit einem Zweikanal-Oszilloskop durchgeführt, dessen Bedienung der Platanleitung zu entnehmen ist. **Bei allen Messungen schalte man das Oszilloskop zuletzt ein und zuerst aus!**

Die Verstärkung der beiden Vertikalverstärker Y_A bzw. Y_B des Oszilloskops kann mit dem Stufenschalter (hinterer Drehknopf) in 11 Stufen V_j von 20 VOLTS/DIV. bis 0,01 VOLTS/DIV. (wobei 1 DIV. = 1 cm) und in jeder Stufe kontinuierlich (vorderer Drehknopf) verändert werden. Für alle Messaufgaben werden bei beiden Systemen die vorderen Drehknöpfe bis zum Einrasten (Anschlag) nach rechts gedreht, nur dann stimmt die Kalibrierung der Verstärker.

Spannungsmessung: Zur Messung einer unbekanntenen Spannung U wird jeweils die Stufe V_j gewählt, die innerhalb des Messrasters des Bildschirms das größtmögliche Messsignal bewirkt. Ist h die Gesamthöhe des Signals in cm, so berechnet sich die Spannung U nach

$$U = h \cdot V_j. \quad (14)$$

Strommessung: Sie erfolgt durch die Bestimmung des Spannungsabfalls U an einem Präzisionswiderstand (Dekadenwiderstand) von $R_p = 10 \Omega$. Der Strom berechnet sich nach

$$I = \frac{U}{R_p} = h \frac{V_j}{R_p}. \quad (15)$$

Der Widerstand R_p ist in guter Näherung gegenüber den Widerständen von Spule und Kondensator vernachlässigbar.

Für Aufgabe 1 (Schaltung nach (Abb. 3)) wird die Generatorspannung ($U_G = 1,80 \text{ V}$) dem Vertikalverstärker Y_B zugeführt. Mit dem anderen Vertikalverstärker Y_A wird der Spannungsabfall über R_p gemessen und daraus der Kondensatorstrom I_C berechnet (Gl. (15)). Die Generatorfrequenz wird von 1 kHz bis 15 kHz in Schritten von 1 kHz variiert. Für den kapazitiven Widerstand R_C gilt

$$R_C = \frac{U_G}{I_C} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}, \quad (16)$$

und daraus folgt

$$I_C = 2\pi C U_G f. \quad (17)$$

Aus der graphischen Darstellung von I_C als Funktion der Frequenz f (Gl. (17)) bestimme man die Kapazität C des Kondensators.

Für Aufgabe 2 wird in der Schaltung nach Abb. 3 der Kondensator C durch die Spule L ersetzt.

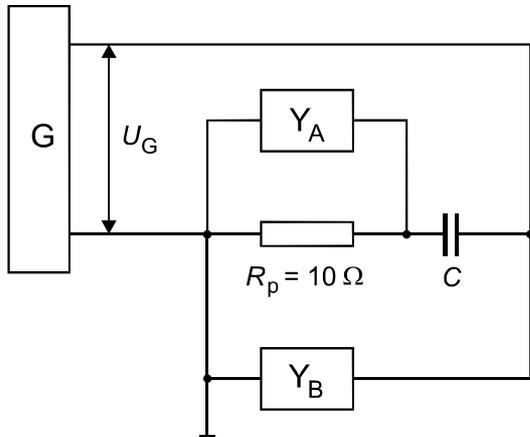


Abb.3 KAPAZITÄTSMESSUNG

Die Messung des Spulenstromes I_L erfolgt wie in Aufgabe 1. Die Generatorfrequenz wird im Bereich a von 10 Hz bis 100 Hz in Schritten von 10 Hz und im Bereich b von 100 Hz bis 500 Hz in Schritten von 100 Hz variiert. Für beide Frequenzbereiche stelle man grafisch das Quadrat des Scheinwiderstandes R_S^2 als Funktion des Frequenzquadrates f^2 dar (Gl. (19)) und ermittle aus der grafischen Darstellung im Bereich a den ohmschen Widerstand R (Schnittpunkt mit der R_S^2 -Achse) und aus der im Bereich b die Induktivität L aus dem Anstieg. Für den Scheinwider-

stand R_S gilt (Gl. 11)

$$R_S = \frac{U_G}{I_L} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{R^2 + 4 \pi^2 f^2 L^2} \quad (18)$$

bzw.

$$R_S^2 = R^2 + 4\pi^2 L^2 f^2. \quad (19)$$

Für Aufgabe 3 (Schaltung nach Abb. 4) wird die Spannung U_C am Kondensator mit dem Vertikalverstärker Y_B und der Strom I im Schwingkreis (Spannungsabfall über R_p) mit dem Vertikalverstärker Y_A gemessen (Gl. (14) bzw. (15)). Die Generatorfrequenz wird von 100 Hz bis 1200 Hz in Schritten von 100 Hz variiert, wobei im Resonanzgebiet die Schritte soweit verringert werden müssen, dass das Strommaximum möglichst genau erfasst werden kann.

Graphisch trage man den Strom I und das Spannungsverhältnis U_C / U_G als Funktion der Frequenz f auf. Für die Resonanzfrequenz f_{Res} bestimmt man die Spannungsüberhöhung $\rho = \frac{U_{CRes}}{U_G}$ (Gl. (13)). Daraus

berechne man R und vergleiche diesen Wert mit dem aus Aufgabe 2 (R ist der ohmsche Widerstand der Spule).

Nach Abschluss aller Messungen stelle man bei der Resonanzfrequenz f_{Res} unter Benutzung der Stufen- und Feinverstärkung beider Kanäle gleichgroße Signale von Strom und Spannung unter voller Ausnutzung der Bildschirmhöhe ein und bestimme die Phasenverschiebung φ von Strom und Spannung!

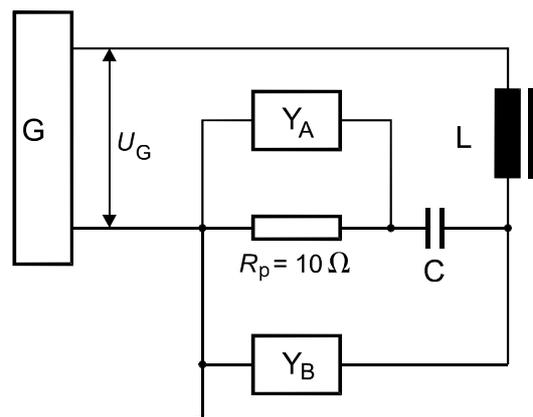


Abb.4 MESSUNG AM REIHENSCHWINGKREIS

Für Aufgabe 4 benutze man die Thomsonsche Schwingungsgleichung

$$f_{\text{Res}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (20)$$

FRAGEN

1. Leiten Sie die Gleichung für die Phasendifferenz φ zwischen Strom I und Gesamtspannung U_G im Reihenschwingkreis ab (siehe hierzu Abb. 2). Wie groß ist die Phasendifferenz im Resonanzfall?
2. Warum kann mit den am Versuchsplatz vorhandenen Geräten die Spannungsmessung zur Ermittlung der Spannungsüberhöhung (Aufgabe 3) nur am Kondensator und nicht auch an der Spule erfolgen?
3. Wie lauten die Additionsgesetze für Induktivitäten und Kapazitäten?