# F1 FEHLERVERTEILUNG

## PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

***Grundbegriffe:*** ***Systematische Fehler, zufällige Fehler, Standardabweichung, Häufigkeit, Normalverteilung, Summenhäufigkeit, Wahrscheinlichkeitspapier, Stichprobe, Grundgesamtheit*** *(Einführungsskript, Abschnitt 3 und 4).*

Alle Messungen physikalischer Größen sind mit Messfehlern behaftet. Sind systematische Fehler ausgeschlossen, dann streuen die Messwerte $x_i$ $(i = 1 \ldots n)$ aufgrund der zufälligen Fehler symmetrisch um den Mittelwert $\bar{x}$. Berechnet man die scheinbaren Fehler

$$v_i = x_i - \bar{x} \tag{1}$$

einer Messreihe und stellt die absolute Häufigkeit $k(v_i)$ bzw. die relative Häufigkeit $h(v_i) = k(v_i)/n$ grafisch als Funktion der Fehler $v_i$ dar, dann erhält man eine treppenförmige Verteilungskurve (Abb. 1). Dazu werden die Fehler $v_i$ in gleichgroßen Intervallen $\Delta v$ (Klasseneinteilung) zusammengefasst. Im Grenzfall $n \to \infty$ und Intervallbreite $\Delta v \to 0$ genügen die Fehler $v$ einer Normalverteilung (Gauß-Verteilung)

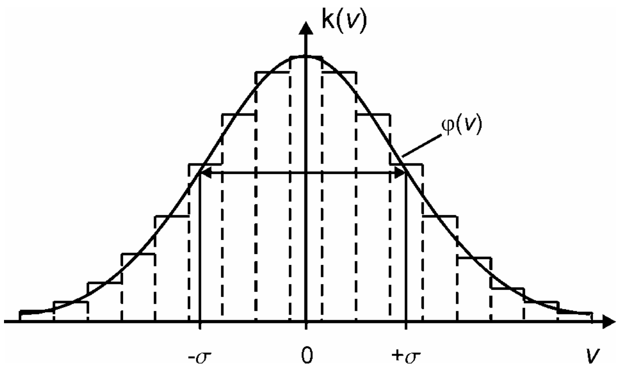


Abb.1 FEHLERVERTEILUNG

$$\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right). \tag{2}$$

Die grafische Darstellung dieser Verteilung (ausgezogene Kurve in Abb. 1) zeigt folgende Eigenschaften:

(1) Die Normalverteilung hat für $v = 0$ ein Maximum, ist symmetrisch bezüglich dieses Maximums und strebt mit wachsendem $v$ gegen Null.

(2) Die Normalverteilung hat Wendepunkte bei $v = \pm\sigma$. Die Größe $\sigma$ heißt Standardabweichung.

(3) Die Breite der Normalverteilung wird durch den Parameter $\sigma$ bestimmt. Eine schlanke Kurve, kleines $\sigma$, bedeutet eine geringe Streuung der Messergebnisse, eine große Genauigkeit der Messmethode. Eine breite Kurve, großes $\sigma$, bedeutet das Gegenteil.

Die Überprüfung, ob eine Messreihe (Stichprobe) einer Normalverteilung genügt, ist mit Hilfe bestimmter statistischer Verfahren möglich, von denen einige in diesem Versuch angewandt werden. Die statistische Analyse einer Messreihe setzt aber eine große Zahl von Messwerten voraus.

## VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

(1) Wird der Versuch im Hörsaal durchgeführt, dann wird über einen Projektor eine Skale mit einer Marke projiziert. Die Lage dieser Marke schätzt jeder Student für sich auf 0,01 des Teilstrichabstandes und notiert sich im Messprotokoll den Wert $x_i$. Der wahre Wert der Stellung der Marke $x_{wi}$ wurde vorher ausgemessen und wird nach der Schätzung vom Assistenten angesagt und im Messprotokoll ebenfalls notiert.

(2) Wird der Versuch im Praktikum durchgeführt, bekommt jede Versuchsgruppe eine Zentimeterskale mit beweglichem Schieber, der eine Marke trägt. Die Stellung der Marke zwischen den Teilstrichen der Zentimeterskale wird auf 0,01 des Teilstrichabstandes geschätzt (Werte $x_i$). Auf der Rückseite des Schiebers befindet sich eine Millimeterskale mit Nonius, so dass die Stellung der Marke auf 0,01 cm abgelesen werden kann. Wegen der wesentlich größeren Ablesegenauigkeit auf der Rückseite im Vergleich zum Schätzwert kann ersterer als wahrer Wert $x_{wi}$ angesehen werden. Der Versuch wird im Praktikum zu zweit durchgeführt. Ein Partner schätzt, der andere führt Protokoll und liest nach der Schätzung den wahren Wert auf der Rückseite der Skale ab. Jeder Student wertet nur seine eigenen Schätzwerte $x_i$ aus. Um systematische Fehler zu vermeiden, muss auf gute Beleuchtung der Skale geachtet und der Schätzabstand konstant gehalten (ca. 1 m) werden.

## AUFGABEN

1. Ermittlung der Stichprobe: 100 Schätzwerte $x_i$ der Stellung einer Marke und die zugehörigen Werte $x_{wi}$ werden notiert. Für das Messprotokoll empfiehlt sich folgendes Schema:

| i | $x_i$ | $x_{wi}$ | $v_i$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | + | 0 | - |
| | | | | | |

2. Berechnung der scheinbaren Fehler $v_i = x_i - x_{wi}$.

3. Vorzeichentest: Man bestimme die Zahl $n^+$ der positiven und die Zahl $n^-$ der negativen Fehler $v_i$. Da die Fehler $v_i$ bei Annahme einer Normalverteilung symmetrisch zum Wert $v_i = 0$ liegen, müssen die Zahlen $n^+$ und $n^-$ annähernd gleich groß sein. Wenn $n$ die Zahl aller Messwerte ist, muss für den positiven Ausgang des Vorzeichentests

$$\left| n^+ - n^- \right| \le \sqrt{n}$$

erfüllt sein; $\pm\sqrt{n}$ ist die zu erwartende statistische Schwankung bei einer Stichprobe vom Umfang $n$.

4. Für die weitere Auswertung der Messergebnisse empfiehlt sich eine Tabelle, in der die scheinbaren Fehler ihrer Größe nach geordnet werden, nach folgendem Schema:

| $v_j$ | $v_j^2$ | Strichliste | $k(v_j)$ | $k(v_j) \cdot v_j^2$ | $h(v_j)$ | $H(v_j)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_{iMin}$<br>.<br>.<br>.<br>$v_{iMax}$ | | | | | | 1,000 |
| | | Kontrollen: | 100 | $\sum v_i^2 = \sum k(v_j) v_j^2$ | 1,000 | - |

In diese Tabelle werden die Messwerte von Aufgabe 1 übertragen, indem man sie der Reihe nach durchgeht und bei dem entsprechenden $v_j$ in der Spalte „Strichliste“ durch einen Strich markiert. Die Zahl der Striche ergibt dann die absolute Häufigkeit $k(v_j)$.

5. Aus den Fehlern $v_i$ wird die empirische Standardabweichung

$$s = \pm\sqrt{\frac{1}{n}\sum_i v_i^2} = \pm\sqrt{\frac{1}{n}\sum_j k(v_j) v_j^2}$$

berechnet, die eine Näherung für die Standardabweichung $\sigma$ der Normalverteilung (Gl. (2)) darstellt. Im Nenner tritt $n$ anstelle von $(n-1)$ auf, weil bei diesem Versuch ausnahmsweise der wahre Wert der Messgröße bekannt ist.

6. Die ermittelten relativen Häufigkeiten $h(v_j) = k(v_j)/n$ der Fehler $v_j$ werden grafisch als Funktion von $v_j$ dargestellt. Durch die Punkte versuche man nach Augenmaß eine Normalverteilungskurve zu legen.

7. Mit den relativen Häufigkeiten aus Aufgabe 6 berechne man die Summenhäufigkeit

$$H(v_j) = \sum_{v_k \le v_j} h(v_k)$$

und stelle diese Summenhäufigkeit $H(v_j)$ grafisch als Funktion von $v_j$ auf Millimeterpapier dar.

8. <u>Test mit Wahrscheinlichkeitspapier:</u> Die Wertepaare der Summenhäufigkeitskurve (Aufgabe 7) übertrage man außerdem auf Wahrscheinlichkeitspapier (vgl. Einführungsskript, Abschnitt 4.8) und lege durch die Punkte im mittleren Bereich eine ausgleichende Gerade.

9. Man entnehme der Darstellung auf Wahrscheinlichkeitspapier (Aufgabe 8) bei den Werten $H(v') = 0{,}16$ (bzw. 16 %) und $H(v'') = 0{,}84$ (bzw. 84 %) die zugehörigen Werte $v'$ und $v''$ und vergleiche $(v'' - v')/2$ mit dem Wert der empirischen Standardabweichung (Aufgabe 5).

FRAGEN

1. Welche Eigenschaften haben zufällige Fehler im Gegensatz zu systematischen Fehlern?
2. Warum werden bei Aufgabe 8 vorwiegend die Punkte im mittleren Bereich berücksichtigt?
3. Welcher Unterschied besteht zwischen der Standardabweichung und dem Vertrauensbereich?
4. Welche systematischen Fehler können beim Versuch vorliegen?