

F2 VOLUMENMESSUNG

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Masse, Gewichtskraft, Auftriebskraft. Zufälliger und systematischer Fehler, Messunsicherheit, Fehlerfortpflanzungsgesetz, gewogener Mittelwert (Einführungsskript, Abschnitt 3).

In diesem Versuch werden drei Methoden unterschiedlicher Genauigkeit zur Bestimmung des Volumens eines Probekörpers verwendet mit dem Ziel, die Grundbegriffe der Fehlerrechnung anzuwenden.

1. Methode: Überlaufgefäß: Ein mit einem Überlauf versehener Glasbehälter wird bis zum Überlaufen mit Wasser gefüllt. Durch Eintauchen des Probekörpers, dessen Volumen V_1 bestimmt werden soll, wird Wasser verdrängt, das in einen Messzylinder fließt.

2. Methode: Geometrie des Körpers: Der Probekörper ist ein Zylinder und sein Volumen kann aus dem Durchmesser d und der Höhe h nach

$$V_2 = \frac{\pi}{4} d^2 h \quad (1)$$

berechnet werden.

3. Methode: Auftriebsmessung: Der Probekörper vom Volumen V_3 wird mit einer Laborwaage mit symmetrischem Waagebalken in Luft gewogen. Man benötigt für das Gleichgewicht die Massennormale m_1 zur Kompensation der Gewichtskraft $F_G = m_1 g$ des Probekörpers. Taucht man ihn in Wasser (Dichte ρ_w), dann erfährt er eine Auftriebskraft $F_A = \rho_w g V_3$ (g = Fallbeschleunigung). Um die Waage wieder ins Gleichgewicht zu bringen, benötigt man die Massennormale m_2 zur Kompensation der um die Auftriebskraft F_A verminderten Gewichtskraft F_G , d. h. $m_2 g = m_1 g - \rho_w g V_3$. Daraus folgt:

$$V_3 = \frac{m_1 - m_2}{\rho_w}. \quad (2)$$

Die zur Bestimmung der Massenwerte m_1 und m_2 verwendete Laborwaage trägt in der Mitte des Waagebalkens einen Zeiger, der über einer Skale schwingt. An seiner Stellung ist das Gleichgewicht der Waage ablesbar. Verschiebt sich durch eine einseitig wirkende Zusatzmasse $\Delta m'$ die Zeigerstellung um Δa , dann bezeichnet man den Quotienten

$$E = \frac{\Delta a}{\Delta m'} \quad (3)$$

als Empfindlichkeit der Waage; sie ist ein Maß für ihre Güte und gestattet die Abschätzung der Messfehler.

Systematische Fehler der drei Messmethoden:

1. Methode: Überlaufgefäß

- (I) Der Gerätefehler ΔV des Messzylinders beträgt bei einem Nenninhalt von $V_N = 50 \text{ ml}$ und einer Nenntemperatur von $t_N = 20 \text{ °C}$ bis zu

$$\Delta V = \pm 0,5 \text{ ml.} \quad (4)$$

- (II) Die Richtung und die Größe des Volumenfehlers ΔV , wenn Messtemperatur t_M und Nenntemperatur t_N des Messzylinders voneinander abweichen, wird mit Hilfe des Ausdehnungskoeffizienten des Glases abgeschätzt. Ist das Nennvolumen des als Glasrohr betrachteten Messzylinders V_N , dann ist bei der Messtemperatur t_M sein Volumen

$$V_M = V_N(1 + \gamma(t_M - t_N))$$

mit $\gamma = 2,7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ als kubischem thermischem Ausdehnungskoeffizienten des Glases.

Daraus ergibt sich der Volumenfehler zu

$$\Delta V = V\gamma(t_M - t_N). \quad (5)$$

2. Methode: Geometrie des Körpers

- (III) Die Fehlergrenzen Δl der Messgeräte sind, wenn l die gemessene Länge ist, von folgender Größe:

$$\text{Messschieber} \quad \Delta l = \pm (5 \cdot 10^{-5} \text{ m} + 1 \cdot 10^{-4} l), \quad (6)$$

$$\text{Bügelmessschraube} \quad \Delta l = \pm (5 \cdot 10^{-6} \text{ m} + 1 \cdot 10^{-5} l). \quad (7)$$

3. Methode: Auftriebsmessung

- (IV) Die Berücksichtigung des Auftriebs des Probekörpers und der Massennormale (Dichte $\rho_N = 8,4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$) bei der Wägung in Luft (Dichte $\rho_L = 1,2 \text{ kg/m}^3$) ergibt (vgl. Gl. (2)):

$$V'_3 = \frac{m_1 - m_2}{\rho_w} \cdot \frac{1 - \rho_L / \rho_N}{1 - \rho_L / \rho_w} \approx V_3 \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_N} + \frac{\rho_L}{\rho_w} \right). \quad (8)$$

- (V) Die Berücksichtigung des Auftriebs des Aufhängerdrahtes, von dem das Volumen ΔV im Wasser eintaucht, ergibt:

$$V''_3 = V'_3 - \Delta V. \quad (9)$$

AUFGABEN

1. Messung der einzelnen Messgrößen für jede der drei Methoden und Berechnung der Volumenwerte V_i .
2. Berechnung bzw. Abschätzung der zufälligen Fehler für die einzelnen Messgrößen.

3. Größenordnungsmäßige Abschätzung der systematischen Fehler der Methoden 1 - 3. Welche ergeben Korrekturen und welche bestimmen den systematischen Restfehler?
4. Übersichtliche Zusammenstellung der Messergebnisse, der zufälligen und der systematischen Fehleranteile sowie der Messunsicherheiten für die einzelnen Messgrößen.
5. Berechnung der Messunsicherheiten ΔV_i für die Volumenwerte nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz.
6. Berechnung des gewogenen Mittelwertes einschließlich Fehler, wenn die Messunsicherheiten ΔV_i dies rechtfertigen.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Methode 1: Der Messzylinder wird vor dem Eintauchen mit etwas Wasser gefüllt und dieser Füllstand V_A als Bezugsgröße gewählt. Nach dem Einlaufen des verdrängten Wassers liest man den Füllstand V_E am Messzylinder ab, so dass sich als Volumen des Probekörpers

$$V_1 = V_E - V_A \quad (10)$$

ergibt. Die Messungen werden sechsmal durchgeführt und Bruchteile der Skalenteile geschätzt.

Methode 2: Die Höhe des Zylinders h wird sechsmal mit einem Messschieber und sein Durchmesser d wird zehnmal an verschiedenen Stellen mit einer Bügelmessschraube gemessen.

Methode 3: Jede Wägung wird zweimal ausgeführt und der Größtfehler aus der Empfindlichkeit der Waage (Gl. (3)) abgeschätzt. Als Größtfehler wird die Zusatzmasse $\Delta m'$ angegeben, die einen Zeigerausschlag $\Delta a = 1$ Skalenteil bewirkt. Die Dichte des Wassers ist temperaturabhängig und wird einer grafischen Darstellung am Versuchsplatz entnommen.

In Aufgabe 1 werden die einzelnen Messgrößen sowie die drei Volumenwerte V_i und in Aufgabe 2 die zufälligen Fehler der einzelnen Messgrößen ermittelt. In Aufgabe 3 sind die systematischen Fehler zu diskutieren, wobei zwischen den Korrekturen und den systematischen Restfehlern zu unterscheiden ist.

Für Aufgabe 4 müssen die zufälligen und die systematischen Fehler verglichen und die Messunsicherheiten ΔV_i für die drei Methoden festgelegt werden. Überlappen sich die Bereiche der Messunsicherheiten nicht, dann liegen grobe Messfehler vor oder es existieren noch weitere bisher nicht erfasste systematische Fehler. Überlappen sich die Bereiche der Messunsicherheiten, dann kann der gewogene Mittelwert und die zugehörige Messunsicherheit berechnet werden (vgl. Einführungsskript, Abschnitt 3.8).

FRAGEN

1. Warum soll bei Methode 1 bereits zu Beginn des Versuches etwas Wasser im Zylinder sein?
2. Die Gewichtungsfaktoren p_i für das gewogene Mittel werden umgekehrt proportional zum Quadrat der Messunsicherheit festgelegt. Wie begründet man, dass die Messunsicherheiten quadratisch und nicht linear eingesetzt werden?
3. Man leite die Korrekturformeln für die Auftriebsmethode (Gl. (8) und (9)) ab.
4. Unter welcher Voraussetzung darf aus Messwerten verschiedener Genauigkeit ein gewogenes Mittel bestimmt werden?