# F3 FADENPENDEL

## PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

***Grundbegriffe:*** ***Mathematisches und physikalisches Pendel, Bewegungsgleichung, Schwerkraft, Schwingungsdifferentialgleichung. Zufälliger und systematischer Fehler, Messunsicherheit, Fehlerfortpflanzung und lineare Regression*** *(Einführungsskript, Abschnitt 3).*

Ein an einem Faden aufgehängter Körper stellt aufgrund der wirkenden Schwerkraft und der Trägheit des Körpers ein schwingungsfähiges System dar. Betrachtet man einen punktförmigen Körper der Masse $m$, der an einem Faden der Länge $l$ hängt und lenkt den Körper um einen Winkel $\varphi$ (Abb. 1) aus der Senkrechten aus, dann führt der Körper nach dem Loslassen Schwingungen um die Senkrechte aus. Bei Vernachlässigung der Masse des Fadens und der Luftreibung wirkt auf den Körper in jedem Punkt der Bahn die Gewichtskraft

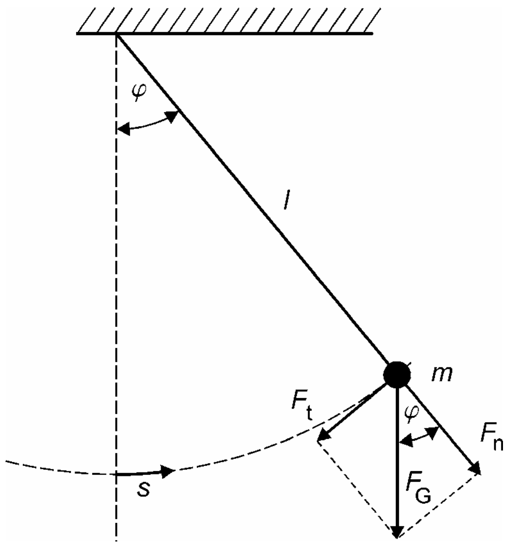

Abb.1 FADENPENDEL

$$\vec{F}_\mathrm{G} = m\ \vec{g} \tag{1}$$

senkrecht nach unten ($g$ Fallbeschleunigung). Die Normalkomponente $F_\mathrm{n} = mg\ \cos\ \varphi$ dieser Kraft findet ihre Gegenkraft in der in der Aufhängung auftretenden Kraft und beeinflusst die Bewegung des Körpers nicht. Die Tangentialkomponente $F_\mathrm{t} = mg \cdot \sin\ \varphi$ der Gewichtskraft erzeugt entsprechend der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$m\ \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -mg\ \sin\ \varphi \tag{2}$$

eine Beschleunigung des Körpers längs der kreisförmigen Bahnkurve. Aufgrund der konstanten Fadenlänge $l$ bestehen zwischen dem Auslenkwinkel $\varphi$ und der Koordinate $s$ auf der Bahnkurve die Gleichungen

$$s = l\varphi, \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = l\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = l\,\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\,. \tag{3}$$

Mit der Näherung $\sin\varphi \approx \varphi$ für kleine Auslenkwinkel erhält man für das mathematische Pendel als Newtonsche Bewegungsgleichung

$$l\,\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + g\varphi = 0\,, \tag{4}$$

die einfachste Form der Schwingungsdifferentialgleichung. Sie kann mit dem Ansatz

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \psi) \qquad \text{mit} \quad \omega^2 = g\,/\,l \tag{5}$$

gelöst werden. Die Konstanten heißen Amplitude $\varphi_0$ bzw. Phasenkonstante $\psi$; sie sind durch die konkreten Anfangsbedingungen festgelegt. Das mathematische Pendel führt also bei Auslenkung um kleine Winkel harmonische Schwingungen mit der Periodendauer

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi\sqrt{l / g} \tag{6}$$

aus, die unabhängig von $m$ und $\varphi_o$ ist. Ohne die Beschränkung auf kleine Winkel ergibt sich für die Periodendauer

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi_o}{2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \sin^4\frac{\varphi_o}{2} ...\right\}. \tag{7}$$

AUFGABEN

1. Bestimmung der Periodendauer für eine feste Fadenlänge. Die Zeitmessung erfolgt für 10 Schwingungen je 10-mal an einem Umkehrpunkt und beim Nulldurchgang des Pendels. Berechnung des Mittelwertes, der Standardabweichung und des Vertrauensbereiches der Periodendauer und Diskussion der Unterschiede.
2. Beim Nulldurchgang wird zehnmal die Periodendauer für 1 Schwingung bestimmt und die Standardabweichung berechnet. Vergleich mit dem Wert aus Aufgabe 1 und Diskussion der Unterschiede.
3. Bestimmung der Periodendauer für 10 verschiedene Fadenlängen $l$. Aus je 2 Messungen für 10 Schwingungen bestimme man die Mittelwerte für die Periodendauern $T_i$ .
4. Berechnung der Fallbeschleunigung $g$ und der Anfangslänge $l_o$ durch grafischen und rechnerischen Geradenausgleich (Gl. (8)).
5. Abschätzung des systematischen Fehlers für die Periodendauer (Gl. (7) für die konkreten Versuchsbedingungen.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Ein Bleizylinder (Radius $R \approx 23\text{mm}$, Höhe $h \approx 45\text{mm}$ und Masse $m \approx 0{,}8\text{kg}$) hängt an einem Stahldraht, dessen Länge verändert werden kann. Die Längenänderung kann mit Hilfe von Ringmarken, deren Abstand 2 cm beträgt, eingestellt werden. Bei Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage führt es Schwingungen aus, deren Periodendauer mit einer von Hand ausgelösten Stoppuhr (Ablesegenauigkeit 0,01 s) bestimmt wird.

Für Aufgabe 1 und 2 wähle man eine möglichst große Fadenlänge. Für Aufgabe 3 wird die Fadenlänge $l_o$ (Anfangslänge) um die Werte $l_i$ ($i$ = 1,...10) in Schritten von 4 cm verringert. Setzt man in Gleichung (6) für die Länge $l = l_o - l_i$ (i = 1,... 10) ein, erhält man

$$T_i^2 = \frac{4\pi^2}{g} l_o - \frac{4\pi^2}{g} l_i \,. \tag{8}$$

Für Aufgabe 4 fertige man eine grafische Darstellung $T_i^2 = f(l_i)$ an und bestimme aus dem Anstieg die Fallbeschleunigung $g$ sowie aus dem Schnittpunkt mit der $l$-Achse die Anfangslänge $l_o$. Für die Fallbeschleunigung schätze man aus der Ablesegenauigkeit der grafischen Darstellung die Messunsicherheit ab.

Die Bestimmung des Anstiegs sowie der Anfangslänge kann auch durch lineare Regression erfolgen, wozu das Rechnerprogramm Geradenausgleich - "GERA" - verwendet werden kann. Es gibt auch den zufälligen Fehler für den Anstieg und damit für die Fallbeschleunigung an. Die Messunsicherheit wird vorwiegend vom zufälligen Fehler bestimmt, so dass der systematische Restfehler hier vernachlässigt werden kann.

Für Aufgabe 5 berechne man aus dem konkret gewählten Auslenkwinkel $\varphi$ den Wert für die geschweifte Klammer (Gl.(7). Wird durch diesen systematischen Fehler der Wert der Fallbeschleunigung (Aufgabe 4) innerhalb der Fehlergrenzen beeinflusst?

## FRAGEN

1. Warum hängt die Schwingungsdauer des Fadenpendels nicht von der Masse ab?
2. Warum ergeben sich innerhalb der Aufgaben 1 und 2 Unterschiede in der Standardabweichung?
3. Welche Energieformen werden beim schwingenden Pendel ineinander umgewandelt?