F7 STATISTIK UND RADIOAKTIVITÄT

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

***Grundbegriffe*: Häufigkeit, Summenhäufigkeit, Poisson- und Gaußverteilung, Geiger-Müller-Zählrohr, Zählrate, χ^2 -Test** *(Einführungsskript, Abschnitt 3.3; R. Storm "Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik ...", Leipzig 1986, S. 184 ff).*

1. Poisson- und Gaußverteilung: Bei statistischen Prozessen, beispielsweise dem radioaktiven Zerfall, treten unterschiedliche Häufigkeitsverteilungen auf. Die Wahrscheinlichkeit $P(x)$ für das Eintreffen seltener Ereignisse - beim radioaktiven Zerfall ist die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall eines Atoms während der Messzeit sehr klein - wird durch eine Poisson-Verteilung beschrieben

$$P(x) = \exp(-\bar{x})\frac{(\bar{x})^x}{x!}. \qquad (1)$$

Die zufällige Veränderliche x ist die während der Messzeit mit z.B. einem Geiger-Müller-Zählrohr registrierte Impulszahl. Die Impulszahl pro Zeiteinheit bezeichnet man als Impuls- oder Zählrate. Die Impulszahl x kann nur ganze positive Zahlen annehmen und ergibt eine Häufigkeitsverteilung, welche für kleine Mittelwerte $\bar{x}$ unsymmetrisch zum Mittelwert $\bar{x}$ ist und für größere Mittelwerte zunehmend symmetrischer wird (Abb.1). In numerischen Berechnungen verwendet man zweckmäßig die Rekursionsformeln

$$P(0) = \exp(-\bar{x}), \quad P(x) = P(x-1)\frac{\bar{x}}{x}. \qquad (2)$$

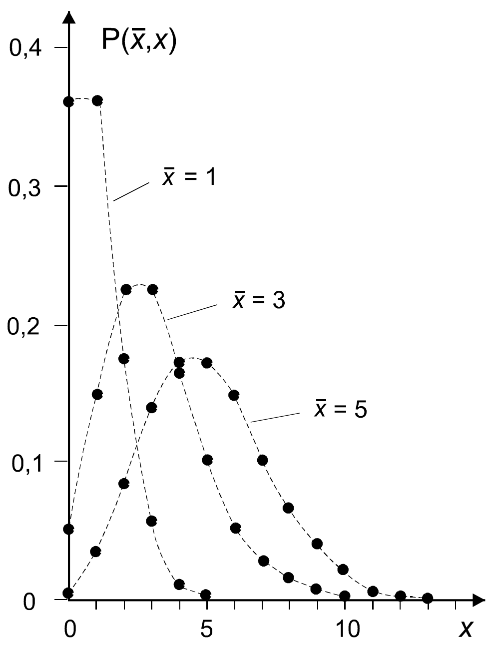

Abb. 1 POISSON-VERTEILUNG

Für die Standardabweichung einer Poisson-Verteilung gilt

$$s = \sqrt{\bar{x}}. \qquad (3)$$

Für große $\bar{x}$,also wenn $|x-\bar{x}| << \bar{x}$ ist, geht die Poisson-Verteilung in eine spezielle Gaußsche Normalverteilung

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (4)$$

(mit $\sigma^2 = \bar{x}$) über, deren empirische Standardabweichung sich für eine Messreihe vom Umfang n nach

$$s = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \qquad (5)$$

berechnet. Die Poisson-Verteilung ist also bereits durch einen Anpassungsparameter, den Mittelwert, festgelegt, während für die Gaußsche Normalverteilung zwei Anpassungsparameter, Mittelwert und Standardabweichung, benötigt werden.

Überdecken die einzelnen Messwerte einen größeren Wertebereich von x_{min} bis x_{max} und ist der Umfang n der Messreihe groß, dann berechnet man Mittelwert und Standardabweichung nicht aus den Einzelwerten x_i sondern nimmt eine Klasseneinteilung wie folgt vor: Die sinnvolle Klassenzahl N und die Klassenbreite d legt man durch

$$N \approx 5 \lg n, \qquad d \approx \frac{1}{N}(x_{max} - x_{min}) \tag{6}$$

fest. Man wählt die Klassengrenzen zweckmäßig so, dass keine Messwerte auf eine Klassengrenze fallen, da sonst eine Aufteilung ihrer Häufigkeiten je zur Hälfte auf die benachbarten Klassen erfolgen müsste, was die Behandlung unnötig erschweren würde. Anschließend ermittelt man die absoluten Häufigkeiten $k(x_j)$ der Messwerte in der j-ten Klasse mit der Klassenmitte x_j und berechnet für den arithmetischen Mittelwert $\bar{x}$ bzw. die Standardabweichung s die Näherungswerte:

$$\bar{x} \approx \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} x_j\, k(x_j), \qquad s \approx \pm\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N}(x_j - \bar{x})^2\, k(x_j)}{n-1}}\ . \tag{7}$$

<u>2. χ^2 -Test:</u> Zum Vergleich einer gemessene Häufigkeitsverteilung mit einer theoretischen Verteilung gibt es verschiedene Prüfverfahren. Bei der Darstellung auf Wahrscheinlichkeitspapier (vgl. Versuch F 1) wird mit der Normalverteilung verglichen. Ein weiteres Verfahren ist der χ^2 -Test, der für beliebige Verteilungen anwendbar ist und bei dem die Güte der Anpassung zwischen gemessener und theoretischer Verteilung durch eine Prüfgröße bewertet wird. Dazu bildet man die Quadrate der Abweichungen der gemessenen Häufigkeiten $k(x_j)$ von den theoretischen Häufigkeiten nP_j, normiert und addiert sie, so dass sich die Prüfgröße

$$\chi_p^2 = \sum_{j=1}^{N}\frac{\left(k(x_j) - nP_j\right)^2}{nP_j} \tag{8}$$

ergibt. Liegt einer Messreihe ein Prozess zugrunde, der einer angenommenen theoretischen Verteilung entspricht, so werden bei Wiederholung der Messreihe aber unterschiedliche χ^2 -Werte auftreten, da die Streuung der gemessenen Werte $k(x_j)$ bezüglich der theoretisch zu erwartenden Werte nP_j zufällig ist. Die Häufigkeitsverteilung, d. h. die Wahrscheinlich-

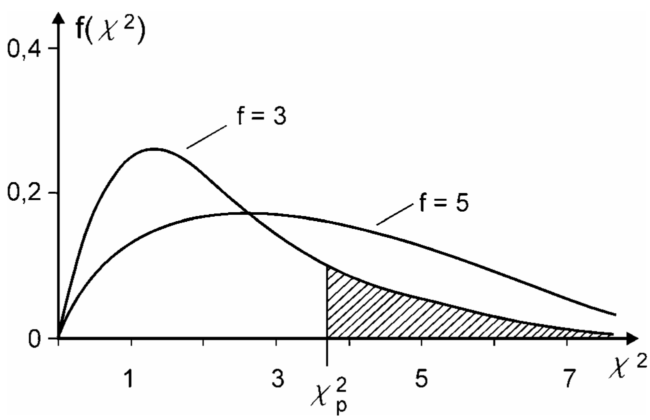

Abb. 2 χ^2 - VERTEILUNG

keitsdichtefunktion $f(\chi^2)$ der χ^2-Werte lässt sich berechnen (Abb. 2); sie ist von einer natürlichen Zahl f, der sogenannten Zahl der Freiheitsgrade

$$f = N - 1 - r \tag{9}$$

abhängig. Die Abhängigkeit der χ^2-Verteilung von der Klassenzahl N ist verständlich, weil sie die Zahl der addierten Differenzen bestimmt (Gl. (8)). Da per Definition die Bedingung

$$\sum_{j=1}^{N} k(x_j) = n \tag{10}$$

gilt, sind die Summanden nicht voneinander unabhängig, und die Zahl der Freiheitsgrade wird um 1 reduziert. Die Zahl der Freiheitsgrade verringert sich weiter um die Zahl der Anpassungsparameter r der theoretischen Verteilung, da diese aus den Messwerten gebildet werden.

Um beurteilen zu können, ob die Hypothese einer bestimmten theoretischen Verteilung gerechtfertigt ist oder nicht, führt man in der Statistik die sogenannte Irrtumswahrscheinlichkeit

$$\alpha = \int_{\chi_p^2}^{\infty} f(\chi^2)\, d\chi^2 \tag{11}$$

ein, die für einen vorgegebenen Freiheitsgrad f (Gl. (9)) einen bestimmten Zahlenwert ergibt. Sie ist nicht analytisch angebbar, ihre Größe entspricht der schraffierten Fläche in Abb. 2 und kann aus Tab.1 entnommen werden. Je nach der Größe der Irrtumswahrscheinlichkeit kann man die Anpassung von Messreihe und theoretischer Verteilung klassifizieren:

gut:	$\alpha \geq 0{,}5$	mäßig:	$0{,}5 > \alpha \geq 0{,}2$
schwach:	$0{,}2 > \alpha \geq 0{,}06$	fehlend:	$0{,}06 > \alpha$.

α / f	0,99	0,975	0,95	0,90	0,70	0,50	0,30	0,10	0,05	0,025	0,01	0,001
1	1,57(-4)	0,82(-4)	3,93(-3)	0,016	0,148	0,455	1,07	2,71	3,84	5,02	6,63	10,8
2	0,020	0,051	0,103	0,211	0,713	1,39	2,41	4,61	5,99	7,38	9,21	13,8
3	0,115	0,216	0,352	0,584	1,42	2,37	3,67	6,25	7,81	9,35	11,3	16,3
4	0,297	0,484	0,711	1,06	2,19	3,36	4,88	7,78	9,49	11,1	13,3	18,5
5	0,554	0,831	1,15	1,61	3,00	4,35	6,06	9,24	11,1	12,8	15,1	20,5
6	0,872	1,24	1,64	2,20	3,83	5,35	7,23	10,6	12,6	14,4	16,8	22,5
7	1,24	1,69	2,17	2,83	4,67	6,35	8,38	12,0	14,1	16,0	18,5	24,3
8	1,65	2,18	2,73	3,40	5,53	7,34	9,52	13,4	15,5	17,5	20,1	26,1
9	2,09	2,70	3,33	4,17	6,39	8,34	10,7	14,7	16,9	19,0	21,7	27,9
10	2,56	3,25	3,94	4,87	7,27	9,34	11,8	16,0	18,3	20,5	23,2	29,6
12	3,57	4,40	5,23	6,30	9,03	11,3	14,0	18,5	21,0	23,3	26,2	32,0
14	4,66	5,63	6,57	7,79	10,8	13,3	16,2	21,1	23,7	26,1	29,1	36,1
16	5,81	6,91	7,96	9,31	12,6	15,3	18,4	23,5	26,3	28,8	32,0	39,3
18	7,01	8,23	9,39	10,9	14,4	17,3	20,6	26,0	28,9	31,5	34,8	42,3
20	8,26	9,59	10,9	12,4	16,3	19,3	22,8	28,4	31,4	34,2	37,6	45,3

Tab.1 IRRTUMSWAHRSCHEINLICHKEIT α

Man erhält also beim χ^2-Test keine Ja-Nein-Ausage sowie keine Angabe über die Sicherheit der gewählten Hypothese. Die angegebene Klassifizierung ist ein grobes Raster, das für viele Zwecke in der Praxis sinnvoll ist. In der Literatur werden manchmal die Grenzen schärfer oder weiter gesetzt. Die Irrtumswahrscheinlichkeit gibt keine Ja-Nein-Aussage, vielmehr gibt sie an, wie man sich irrt, wenn die Hypothese verworfen wird. Ergibt sich beispielsweise $\alpha = 0{,}3$, dann wäre aufgrund der durchgeführten Messreihe eine Ablehnung der angenommenen Hypothese mit 30 prozentiger Wahrscheinlichkeit unberechtigt. Dies bedeutet, dass bei Auswertung von 10 analogen Messreihen etwa drei von ihnen den gleichen oder einen größeren χ^2 -Wert ergeben könnten.

Damit die berechnete Prüfgröße (Gl. (8)) näherungsweise eine χ^2 -Verteilung besitzt, müssen die theoretischen Häufigkeiten $nP_j \geq 5$ sein. Wenn dies nicht erfüllt ist, was an den Enden der Verteilungen häufig auftritt, dann müssen benachbarte Klassen an den Enden der Verteilung zusammengefasst werden, wodurch sich die Zahl der Freiheitsgrade verringert.

3. Absorption von γ-Strahlung: Trifft γ-Strahlung auf einen Stoff, so treten die γ-Quanten mit den Atomen des Stoffes in Wechselwirkung. Dabei nimmt die Intensität der γ-Strahlung nach Durchdringen der Schichtdicke $\mathrm{d}z$ um den Betrag $\mathrm{d}I$ ab, wobei

$$\mathrm{d}I = -\mu I \,\mathrm{d}z \tag{12}$$

ist. μ ist der lineare Schwächungskoeffizient, der vom Absorptionsmaterial und der Energie der γ-Strahlung abhängt. Durch Integration erhält man das Schwächungsgesetz in der Form

$$I = I_0 \exp(-\mu z)\,. \tag{13}$$

Dabei ist I_0 die Anfangsintensität bei $z = 0$. Die Intensitätsgrößen I und I_0 sind den jeweiligen Impulsraten x_z und x_0 proportional, von denen der Nulleffekt mit der Impulsrate x_N abgezogen wurde.

Von praktischem Interesse ist oft die material- und energieabhängige Halbwertsdicke $z_{1/2}$, bei welcher die Anfangsintensität I_0 auf den halben Wert abgeschwächt wird. Aus Gl. (13) folgt

$$z_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}\,. \tag{14}$$

In der einschlägigen Literatur (z.B. Kohlrausch, Praktische Physik, Band 3) findet man für ausgewählte Materialien und ausgedehnte Energiebereiche Angaben für μ bzw. den daraus mit der Dichte ρ gebildeten Massenschwächungskoeffizienten μ/ρ (bevorzugte Einheit $\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{g}}$). Aus praktischen Gründen wird anstelle der Schichtdicke z oft die Massenflächendichte $d = z \cdot \rho$ (bevorzugte Einheit $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^2}$) und die damit gebildete Halbwertsflächendichte

$$d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}\rho \tag{15}$$

benutzt.

AUFGABEN

1. Es sind zwei Messreihen mit je 500 Messungen aufzunehmen:
   Messreihe 1: Kleine Impulszahl mit Mittelwert 1-3.

Messreihe 2: Große Impulszahl mit Mittelwert größer als 60.

2. Mit Hilfe des PC-geführten χ^2-Testes vergleiche man die Häufigkeitsverteilungen der Messreihen mit einer Poisson- und einer Gaußverteilung. Während des Programmablaufs werden Sie zur Anfertigung und Eingabe einer Klasseneinteilung aufgefordert. Dabei muss für Messreihe 2 eine Einteilung gemäß Gl. (6) vorgenommen werden .
3. Messung der Absorption von γ-Strahlung in Blei als Funktion der Schichtdicke z und grafische Darstellung von $I/I_0 = f(z)$ auf Exponentialpapier.
4. Bestimmung der Energie des γ-Strahlers.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Den Prinzipaufbau der Messanordnung zeigt Abb. 3. Wenn der gestrichelt umrandete PC am Versuchsplatz angeschlossen ist, muss der Funktionswahlschalter am Zählgerät auf REMOTE gestellt werden. Jetzt können alle Einstellungen am Zählgerät (Zählrohrspannung, Zeit- oder Impulsvorwahl, Stichprobenumfang sowie Start, Stop, Reset) mit der PC-Maus vorgenommen werden. Die hierzu angebotenen Menüs sind übersichtlich, im Bedarfsfall hilft Ihr Betreuer. Alle Messwertetabellen können ausdruckt werden.
Das Programm wird mit C:\RAD\LABLINK.EXE aufgerufen. Das Zählgerät wird nach Aufforderung auf COM. 1 geschaltet.

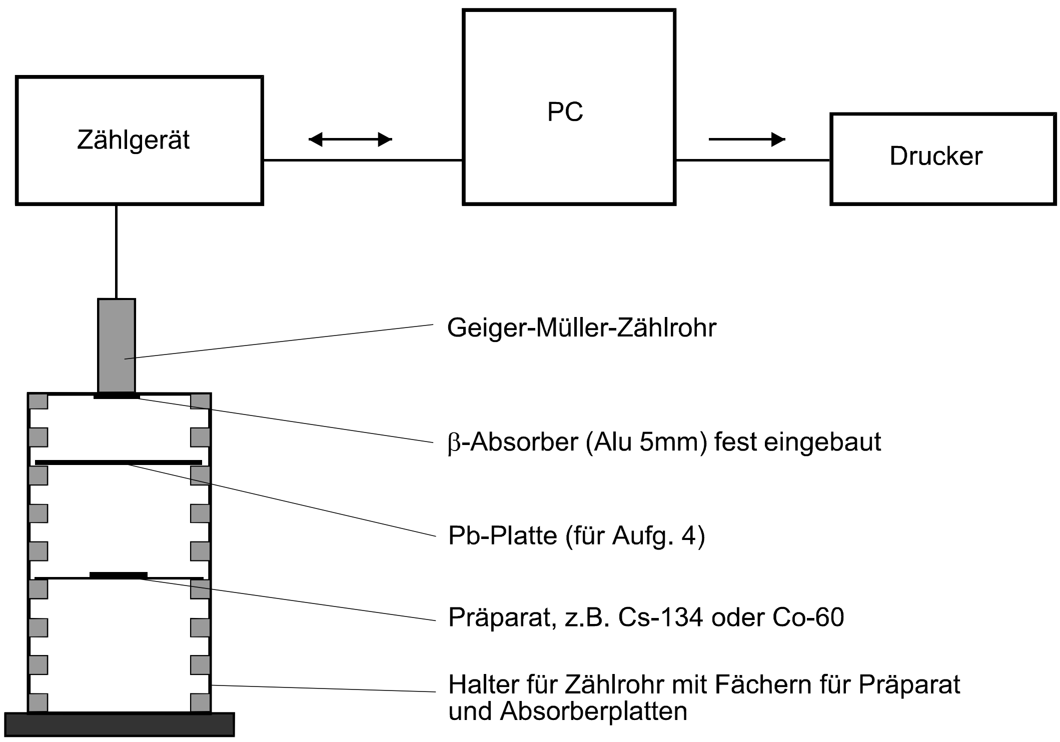

Abb. 3 PRINZIP DER MESSANORDNUNG

Bei einer Versuchsdurchführung ohne PC können alle Einstellungen am Zählgerät mit dem Funktionswahlschalter und dem UP- und DOWN-Taster vorgenommen werden. Alle Einstellungen werden auf dem Display angezeigt. Für START, STOP und RESET stehen in dem Fall gesonderte Tasten zur Verfügung.
Alle Messungen werden bei einer Zählrohrspannung von 900 V durchgeführt.
Für Aufgabe 1 werden 2 unterschiedliche Strahler benutzt. Für Messreihe 1 wird das Cs-137-Präparat in das etwa 3.Fach (ausprobieren!) von oben eingeführt und eine Messzeit von 1 s vorgewählt. Für Messreihe 2 wird das Co-60-Präparat in das 1. Fach von oben derart eingelegt, dass der Abstand zum Zählrohr möglichst klein ist, und eine Messzeit von ca. 2 s (ausprobieren!) ausgewählt. Nach Vorwahl von RUNS = 500 und Anklicken von COUNT erfolgen die Messungen einschließlich Ergebnisauflistung auf dem Bildschirm automatisch.
Am Ende jeder Messreihe müssen die Messdatenlisten für die anschließende PC-Auswertung jeweils unter einem unverwechselbaren Dateinamen abgespeichert werden: Wählen Sie zweckmäßig den Dateinamen XY.TSV. Hier ist X der Platzhalter für die ersten 5 Buchstaben Ihres Familiennamens (für Umlaute wie ä wird ae eingegeben). Y ist der Platzhalter für eine Ziffer zur Kennzeichnung der Messreihe.
Beispiel: Herr Müstermann speichert die Datenliste seiner Messreihe I unter MUEST1.TSV.
Für Aufgabe 2 steht zur Durchführung des χ^2-Testes das Rechnerprogramm "CHI.EXE" zur Verfügung. Vom Programm werden verschiedene Eingabevarianten angeboten. Für die Auswertung nach Aufgabe 2 ist **Variante (2)** auszuwählen.
Nach dem Start von Variante (2) wird zur Eingabe des Namens der Messdatendatei aufgefordert. Danach erfolgt die automatische Datenübernahme und die Ausgabe von n, x_{min} und x_{max} mit der Aufforderung zur selbständigen Festlegung einer zweckmäßigen Klasseneinteilung (Gl.(6)). Nach Eingabe der Klasseneinteilung erfolgt der eigentliche χ^2-Test.
Wichtig für die Klasseneinteilung: Es sind grundsätzlich nur halbzahlige Klassengrenzen zu wählen. Beispiel für Messreihe 1: Treten Impulszahlen zwischen $x_{min} = 0$ und $x_{max} = 7$ auf, dann wählt man für die erste Klasse die untere Grenze -0,5 und die obere Grenze 0,5. Für die letzte (die 8.) Klasse wählt man als untere Grenze 6,5 und als obere Grenze 7,5. Beispiel für Messreihe 2: Werden bei z.B. $x_{min} = 54$ von Ihnen in der ersten Klasse die Impulszahlen 54 bis 56 zusammengefasst, dann wählt man als untere Grenze dieser Klasse 53,5 und als obere Grenze 56,5 usw.
Zur Übertragung ins Messprotokoll werden vom Rechner nach jedem Test angezeigt:
Mittelwert, Standardabweichung, Freiheitsgrad, die experimentellen Häufigkeiten $k(x_j)$, die theoretischen Häufigkeitswerte nP_j für die angepasste Poisson- bzw. Gaußverteilung sowie die χ^2-Werte. Mit Hilfe der in Tabelle 1 aufgeführten Irrtumswahrscheinlichkeiten diskutiere man die Ergebnisse des χ^2-Testes.
Die Eingabevarianten (4) und (5) sind für den Fall vorgesehen, dass keine Messdatendatei existiert. Die Variante (3) steht Ihnen fakultativ zur Selbstkontrolle nach Durchführung von Variante (2) zur Verfügung.

Zusatzangebot (Eingabevariante (1)): Unabhängig vom konkreten Versuch F7 kann zunächst das Verhalten statistischer Ensembles bei Parameterveränderungen und Wiederholungsmessungen untersucht werden. Es werden Zählraten-Stichproben nach einer Monte-Carlo-Methode ausgewürfelt. Stichprobenumfang und Mittelwert der Grundgesamtheit können in weiten Grenzen von Ihnen selbst vorgegeben werden. Im Anschluss können Sie den χ^2 -Test hierauf anwenden.
Für Aufgabe 3 werden die 5 Bleiplatten nacheinander in das 1. Fach und das Cs-137-Präparat in das 2. Fach von oben eingeführt. (Vergessen Sie nicht die I_0 -Messung ohne Bleiplatte!). Für alle Messungen wird eine Impulszahl von 1000 vorgewählt und die Messzeit registriert.

Zur Bestimmung des Nulleffekts (Impulsvorwahl 200) müssen alle Präparate genügend weit (mindestens 0,5 m) vom Zählrohr entfernt sein. Die Funktion $(x_z - x_\mathrm{N})/(x_0 - x_\mathrm{N}) = \mathrm{f}(z)$ wird grafisch auf Exponentialpapier dargestellt.
Beachten Sie, dass hier x_z, x_N und x_0 Impulsraten sind, also die vorgewählten Impulszahlen auf dieselbe Zeitbasis umzurechnen sind. Tragen Sie an allen Messpunkten einen Fehlerbalken (nur Ordinate berücksichtigen) ein.
Für Aufgabe 4 werden die grafischen Darstellungen $\mu/\rho = \mathrm{f}(E)$ (Abb. 4) und $z_{1/2} = \mathrm{f}(E)$ (Abb. 5) benutzt. Sie können aus Ihrer grafischen Darstellung $I/I_0 = \mathrm{f}(z)$ (Aufg. 3) entweder μ aus dem Anstieg bestimmen und mit $\rho_\mathrm{Blei} = 11{,}34\,\mathrm{g/cm^3}$ rechnen oder $z_{1/2}$ direkt entnehmen.

FRAGEN

1. Welche Verfahren zur Prüfung statistischer Verteilungen kennen Sie?
2. Worauf schließt man, wenn man für die Anpassung einer Gaußverteilung $s = \sqrt{x}$ findet?
3. Wie funktioniert ein Geiger-Müller-Zählrohr?

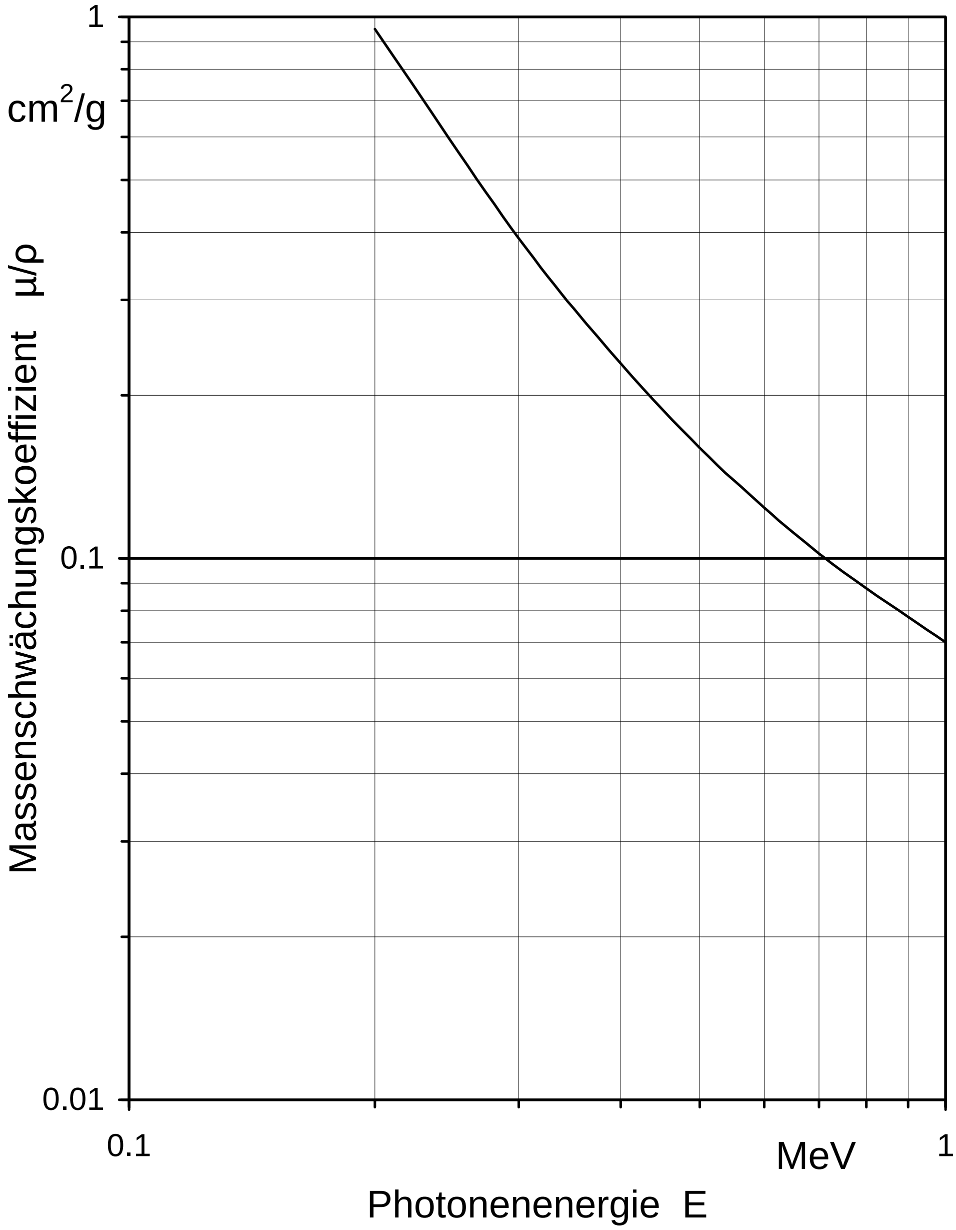

Abb. 4 MASSENSCHWÄCHUNGSKOEFFIZIENT

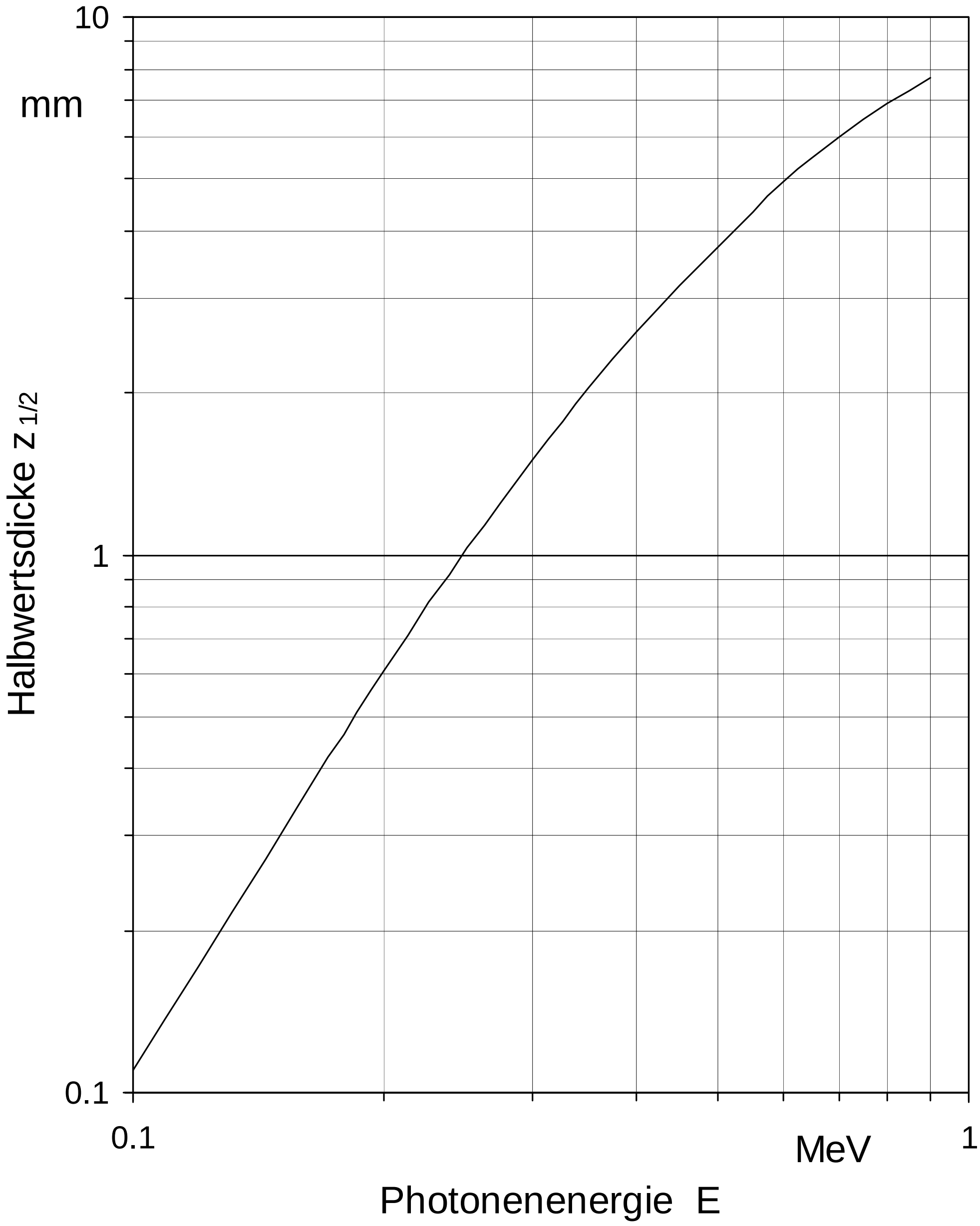

Abb. 5 HALBWERTSDICKE