M2 MESSUNG VON TRÄGHEITSMOMENTEN

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

***Grundbegriffe:* Drehmoment, Massenmittelpunkt, Trägheitsmoment, Steinerscher Satz, Drehschwingung.**

Das Trägheitsmoment J_A eines Körpers bezüglich einer Drehachse A ist definiert als

$$J_A = \int r^2 \mathrm{d}m = \int r^2 \rho \, \mathrm{d}V \,. \tag{1}$$

Hierbei ist r der senkrechte Abstand des Massenelementes $\mathrm{d}m$ von der Drehachse A. Die Integration ist über das gesamte Volumen des Körpers durchzuführen unter Beachtung der Dichte ρ des Körpers. Für homogene Körper ist die Dichte konstant und kann dann vor das Integralzeichen gezogen werden.

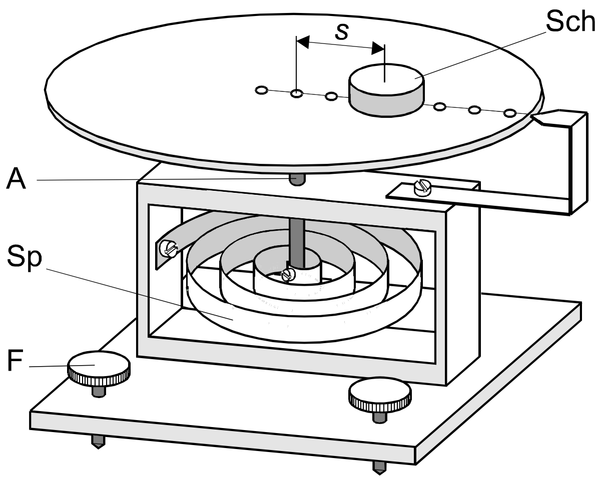

Abb. 1 DREHTISCH

Jeder Körper hat unendlich viele Trägheitsmomente, weil es inner- und außerhalb des Körpers unendlich viele Drehachsen gibt. Nach dem Steinerschen Satz ist das Trägheitsmoment J_A um eine beliebige Achse A, die im Abstand s parallel zu einer Schwerpunktachse mit dem Trägheitsmoment J_S verläuft, durch

$$J_A = J_S + ms^2 \tag{2}$$

gegeben, wobei m die Gesamtmasse des Körpers ist. Damit müssen nur noch die Trägheitsmomente bezüglich der Schwerpunktachsen ermittelt werden, was für symmetrische homogene Körper rechnerisch möglich ist, weil dann das Integral des Trägheitsmomentes (Gl. (1)) meist elementar lösbar ist. Man erhält beispielsweise für das Trägheitsmoment eines Zylinders der Masse m, des Radius R und der Höhe h für die Symmetrieachse

$$J_1 = \frac{1}{2} mR^2 \tag{3}$$

und für jede dazu senkrechte Schwerpunktachse

$$J_2 = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mh^2 \,. \tag{4}$$

Die Bestimmung von Trägheitsmomenten kann auch experimentell erfolgen, z. B. durch Messung der Schwingungsdauer eines Drehschwingers (Abb. 1). Um eine senkrechte Achse A führt der Drehtisch mit dem Trägheitsmoment J_A infolge der elastischen Deformation einer Schneckenfeder Sp (Winkelrichtgröße D) schwach gedämpfte Schwingungen aus. Die Schwingungsdauer T des Drehschwingers ist gegeben durch

$$T = 2\pi\sqrt{J_A / D}\,. \tag{5}$$

Das Trägheitsmoment des Drehtisches kann durch Auflegen einer Scheibe Sch definiert verändert werden. Diese Scheibe (Masse m', Radius R'), die in verschiedenen Abständen s von der Drehachse des Tisches aufgelegt wird, ergibt ein zusätzliches Trägheitsmoment (Gl. (2) und Gl. (3))

$$J_z = \frac{1}{2} m' R'^2 + m' s^2\,. \tag{6}$$

Ist J_T das Trägheitsmoment des Drehtisches, dann ist mit der Scheibe Sch das Gesamtträgheitsmoment der schwingenden Anordnung

$$J_A = J_T + J_z\,, \tag{7}$$

und aus Gleichung (5) erhält man

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D}\left(J_z + J_T\right). \tag{8}$$

Die grafische Darstellung $T^2 = \mathrm{f}(J_z)$ ergibt also eine Gerade mit dem Anstieg $4\pi^2 / D$, die die J_z-Achse bei $J_z = -J_T$ schneidet.

AUFGABEN

1. Messung der Schwingungsdauer des Drehtisches ohne und für 6 verschiedene Lagen der Kreisscheibe zur Drehachse.
2. Berechnung der Zusatzträgheitsmomente für die 6 verschiedenen Lagen der Kreisscheibe (Gl. (6)).
3. Grafische Darstellung der Eichkurve $T^2 = \mathrm{f}(J_z)$.
4. Ermittlung des Trägheitsmomentes J_T des Drehtisches und Abschätzung des Größtfehlers aus der grafischen Darstellung von Aufgabe 3.
5. Experimentelle Bestimmung der Trägheitsmomente eines Zylinders bezüglich seiner Symmetrieachse und einer dazu senkrecht stehenden Schwerpunktachse mit dem Drehtisch.
6. Berechnung der Trägheitsmomente des in Aufgabe 5 benutzten Zylinders für die gemessenen Drehachsen (Gl. (3) bzw. (4)).

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Der Drehtisch (Abb. 1) wird so justiert, dass seine Drehachse senkrecht steht. Dazu lege man die Kreisscheibe an verschiedene Stellen des Drehtischrandes und stelle die Fußschrauben F so lange nach, bis die Kreisscheibe in keiner Lage dem Tisch ein Drehmoment erteilt. Für Aufgabe 1 messe man zweimal die Zeit für 10 Schwingungen. Für Aufgabe 2 berechne man die Zusatzträgheitsmomente (Gl. (6)) und fertige für Aufgabe 3 die Eichkurve an.
Für Aufgabe 5 messe man zweimal die Zeit für 10 Schwingungen und lese aus der Eichkurve die zugehörigen Trägheitsmomente für die beiden Stellungen des Zylinders ab. Für Aufgabe 6 be-

rechne man aus der Masse m, dem Radius R und der Höhe h des Zylinders die Trägheitsmomente für die angegebenen Achsen (Gl. (3) bzw. (4)) und vergleiche diese Werte mit den experimentellen Ergebnissen aus Aufgabe 5.

FRAGEN

1. In welcher Weise verfälscht die Halterung des Zylinders in Aufgabe 5 das Messergebnis?
2. In welcher Phase der Schwingung ist der Stoppfehler zur Ermittlung der Schwingungsdauer am kleinsten?
3. Wie lautet die Bewegungsgleichung für einen Drehschwinger?