M3 ELASTIZITÄT UND TORSION

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

<u>Grundbegriffe:</u> Dehnung, Torsion, Normal- und Schubspannung, Hookesches Gesetz Elastische Konstanten, Drehmoment, Massenträgheitsmoment.

<u>1. Elastizität und Hookesches Gesetz:</u> Durch Einwirkung äußerer Kräfte können Festkörper Form- und/oder Volumenänderungen (Deformationen) erfahren. Verschwinden die Deformationen nach Wegfall der äußeren Kräfte, dann spricht man vom elastischen, sonst vom plastischen Verhalten des Festkörpers. Die elastischen Eigenschaften beruhen auf den atomaren Bindungskräften zwischen den Atomen (bzw. Molekülen) im Festkörper. Eine äußere Kraft erzeugt im Innern des Festkörpers einen Spannungszustand, durch den die Atome aus ihrer Ruhelage entfernt werden. Dadurch entstehen innere, atomare Kräfte, die der äußeren Kraft entgegenwirken. Nach Aufhören der äußeren Krafteinwirkung gehen bei elastischer Deformation die Atome in ihre Ruhelage zurück. Im Hookeschen Gesetz werden die Deformationen des Festkörpers näherungsweise proportional den durch die äußeren Kräfte entstehenden Spannungen im Festkörper gesetzt.
Bei sehr großen äußeren Kräften treten jedoch große Verschiebungen einzelner Atome oder ganzer Kristallite auf, so dass eine bleibende Formänderung entsteht; der Festkörper ist plastisch verformt. In diesem Bereich verliert das Hookesche Gesetz seine Gültigkeit.
Für eine elementare Beschreibung des elastischen Verhaltens eines isotropen Festkörpers verwendet man 4 Materialkonstanten, die aber nicht unabhängig voneinander sind. Es sind dies: Elastizitätsmodul E, Torsionsmodul G, Kompressionsmodul K und die Poissonsche Zahl μ.

<u>2. Dehnung und Querkontraktion:</u> An einem isotropen, zylindrischen Körper, z. B. einem Draht der Länge l, verursacht eine senkrecht zum Querschnitt A wirkende Kraft F eine Längenänderung Δl (Abb. 1) bzw. die relative Längenänderung $\varepsilon = \Delta l / l$. Das Verhältnis der senkrecht zur Querschnittsfläche wirkenden Kraft zur Fläche bezeichnet man als Normalspannung $\sigma = F / A$.
Im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes ist

$$\varepsilon \sim \sigma \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{A}, \tag{1}$$

wobei E (SI-Einheit: $[E]$ = N/m^2 = kg m^{-1} s^{-2}) der Elastizitätsmodul ist.
Die Normalspannung verändert nicht nur die Länge l eines Körpers um Δl, sondern auch seine Querabmessungen, also etwa den Durchmesser d eines Drahtes um Δd. Im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes besteht der Zusammenhang

$$\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta l}{l}, \tag{2}$$

wobei μ die Poissonsche Zahl ist. Das negative Vorzeichen wird gewählt, weil die Änderung des Durchmessers Δd der Längenänderung Δl entgegengesetzt gerichtet ist und die Poissonsche

Zahl positiv definiert sein soll. Für die relative Volumenänderung eines zylindrischen Stabes erhält man also bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta l}{l}(1-2\mu) = \varepsilon(1-2\mu)\,, \tag{3}$$

woraus sich ergibt: Erfährt der Festkörper keine Volumenänderung, d. h. verhält er sich wie eine inkompressible Flüssigkeit, so ergibt sich aus Gl. (3) μ = 0,5, und wenn die Querkontraktion verschwindet, ergibt sich aus Gl. (2) μ = 0. Aus diesen Grenzfällen eines elastischen Festkörpers ergibt sich für die Poissonsche Zahl die Ungleichung

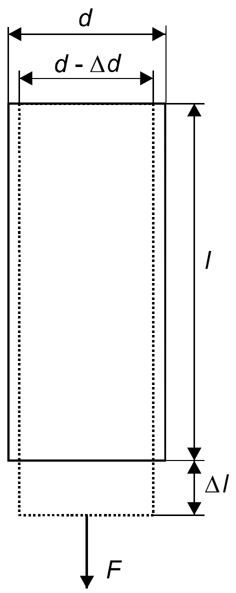

Abb.1 DEHNUNG

$$0 < \mu < 0{,}5. \tag{4}$$

Steht ein Körper unter allseitigem Druck, so ruft eine Druckänderung Δp eine Volumenänderung ΔV hervor, die im Bereich des Hookeschen Gesetzes dem Volumen V proportional ist:

$$\Delta V = -\frac{1}{K} V \Delta p\,.$$

Die Materialgröße K heißt Kompressionsmodul.

3. Torsion: Ist die Kraft tangential zu der Ebene gerichtet, an der sie angreift, so spricht man von Schub- oder Scherspannung. Lassen wir etwa an der Oberseite eines Würfels, dessen Grundfläche A festgehalten wird, die Kraft F tangential angreifen, so bewirkt die Schubspannung $\tau = F / A$ eine Neigung der Seitenflächen um den Winkel γ, die, entsprechend dem Hookeschen Gesetz, im elastischen Bereich der Schubspannung proportional ist

$$\tau = G\gamma\,,$$

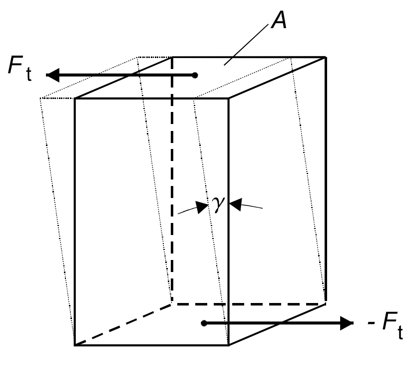

Abb. 2 SCHERUNG

wobei G der Schub-, Scherungs- oder Torsionsmodul ist (SI-Einheit: $[G] = \mathrm{N/m^2} = \mathrm{kg\ m^{-1}\ s^{-2}}$). Ein zylindrischer Draht (Abb. 3), der an einem Ende fest eingespannt ist, wird durch ein am anderen Drahtende angreifendes Drehmoment M um den Winkel γ verdrillt. Da der Verdrillungswinkel jedes Drahtquerschnitts proportional dem Abstand des betreffenden Querschnittes von der Einspannstelle ist, treten im ganzen Draht Scherspannungen auf (Abb. 3). An einem dünnen Hohlzylinder der Länge l mit dem Radius r und der Dicke $\mathrm{d}r$ greift an der unteren Fläche das Drehmoment $\mathrm{d}M = r\ \mathrm{d}F$ an. Dadurch wird die Zylindermantellinie $\overline{\mathrm{AB}}$ in die Lage $\overline{\mathrm{AB'}}$ verdrillt. Wegen $\tau = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A} = G\gamma$ folgt

$$\mathrm{d}M = r \cdot G \cdot \gamma \cdot \mathrm{d}A\,.$$

Für den Bogen b gelten die Beziehungen $\alpha = \frac{b}{r}$ und $\tan\gamma = \frac{b}{l} \approx \gamma$, und daraus ergibt sich

$$\gamma = \frac{r}{l}\alpha .$$

Mit diesem Zusammenhang zwischen α und γ und dem Wert der Querschnittsfläche $\mathrm{d}A = 2\pi \cdot r \cdot \mathrm{d}r$ erhält man für das am Hohlzylinder angreifende Drehmoment

$$\mathrm{d}M = \frac{2\pi}{l} \cdot G \cdot \alpha \cdot r^3 \mathrm{d}r .$$

Durch Integration über r erhält man das am Draht angreifende Gesamtdrehmoment

$$M = \int \mathrm{d}M = \frac{2\pi}{l} G\alpha \int_o^R r^3 \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2l} G\alpha R^4 . \tag{5}$$

Dieses Drehmoment verdrillt den Draht um den Winkel γ und steht im Gleichgewicht mit dem rücktreibenden Drehmoment $M = D\alpha$ auf Grund der Elastizität des Drahtes. Die Größe D heißt Richtmoment und ist nach Gl. (5) durch die geometrischen Abmessungen des Drahtes bestimmt:

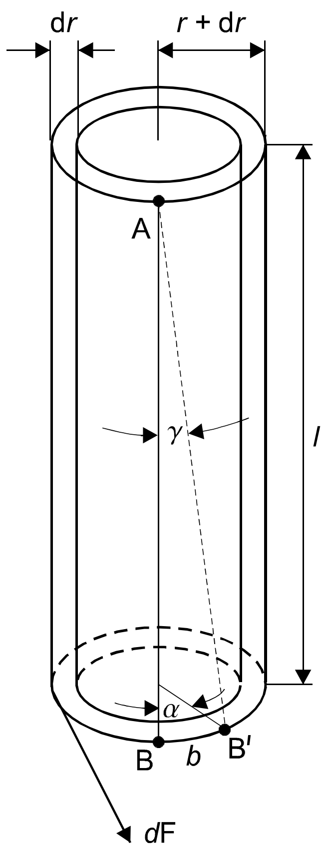

Abb.3 TORSION EINES DRAHTES

$$D = \frac{\pi}{2l} G R^4 . \tag{6}$$

<u>4. Bestimmung des Torsionsmoduls aus Drehschwingungen:</u> Die Periodendauer T eines schwingungsfähigen Körpers mit dem Trägheitsmoment J und dem Richtmoment D beträgt (vgl. Versuch M2)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} . \tag{7}$$

Da das Richtmoment D eines tordierten Drahtes vom Torsionsmodul G abhängt (Gl. (6)), kann man aus Drehschwingungen den Torsionsmodul nach

$$G = \frac{8\pi l}{R^4} \cdot \frac{J}{T^2} \tag{8}$$

bestimmen. Hierzu müssen die Größen R, T, l und das Trägheitsmoment J der schwingungsfähigen Anordnung bekannt sein.

Die Bestimmung des Trägheitsmomentes J_V der schwingenden Versuchsanordnung (Draht, Einrichtung zur Aufnahme der Massenstücke usw.) kann durch definierte Veränderung des Trägheitsmoments umgangen werden. Zunächst bestimmt man die Periodendauer T_V der Drehschwingung der Versuchsanordnung aus ca. 30 Schwingungen bei Belastung mit 50 g. Dann verändert man das Trägheitsmoment J_V der Versuchsanordnung definiert durch Anschrauben einer Scheibe mit dem Zusatzträgheitsmoment J_S und bestimmt jetzt die Periodendauer T_S aus 10 Schwingungen, für die sich entsprechend Gl. (7) ergibt:

$$T_S = 2\pi\sqrt{\frac{J_V + J_S}{D}} . \tag{9}$$

Eliminiert man das Trägheitsmoment J_V (Gl. (7) und (9)) und setzt für die zylindrische Scheibe das Trägheitsmoment $J_S = mr^2/2$ (m Masse und r Radius der Scheibe) ein, ergibt sich für den Torsionsmodul die Beziehung:

$$G = \frac{8\pi l}{R^4} \cdot \frac{J_S}{T_S^2 - T_V^2} = \frac{4\pi l}{R^4} \cdot \frac{mr^2}{T_S^2 - T_V^2}\,. \qquad (10)$$

AUFGABEN

1. Messung der Längenänderung Δl eines Messingdrahtes als Funktion der Belastung.
2. Grafische Darstellung $\Delta l = f(m)$ und Berechnung des Elastizitätsmoduls E von Messing aus dem Anstieg (Gl. (11)).
3. Messung der Periodendauern T_V und T_S und Berechnung des Schubmoduls (Gl. (10)).

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Am unteren Ende eines oben befestigten langen Drahtes D ist ein Stab angeschraubt, auf den man Massenstücke mit der Masse m von 50 und 100 g aufstecken kann (Abb. 4). Am oberen Ende des Stabes liegt der Balken L auf der Schneide A auf. Durch Anhängen der Massenstücke wirkt die Kraft $F_G = mg$, und der Draht dehnt sich. Die Schneide A senkt sich, und der ursprünglich waagerecht gestellte Balken L (Kontrolle mittels der eingekitteten Libelle) dreht sich um die Achse B. Durch die Messschraube M kann der Balken L wieder horizontal gestellt werden. Die Dehnung Δl des Drahtes wird aus der Differenz der Skalenteile der Messschraube vor und nach der Horizontalstellung des Balkens ermittelt. Der Durchmesser des Drahtes wird an einem am Versuchsplatz liegenden Draht gleichen Durchmessers durch mehrfache Messung mit einer Messschraube bestimmt.

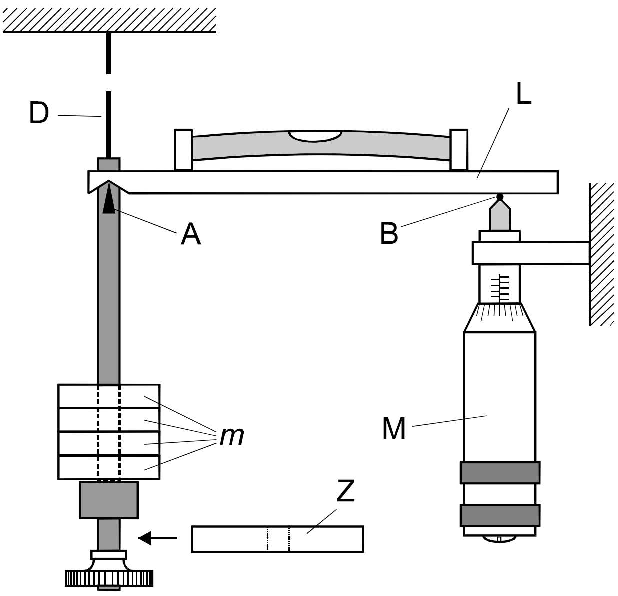

Abb. 4 VERSUCHSANORDNUNG

Für Aufgabe 1 wird der Draht mit Massenstücken von 50 bis 800 g belastet und anschließend schrittweise entlastet. An der Masse m greift die Gewichtskraft an, so dass aus Gl. (1)

$$\Delta l = \frac{1}{E}\frac{l}{A} gm \qquad (11)$$

folgt. Für Aufgabe 2 fertige man eine grafische Darstellung $\Delta l = f(m)$ an und ermittle aus dem Anstieg den Elastizitätsmodul E und seine Messunsicherheit.
Für Aufgabe 3 bestimmt man die Periodendauer T_V der Drehschwingung der Anordnung aus ca. 30 Schwingungen bei Belastung mit 50 g. Dann verändert man das Trägheitsmoment der Anordnung durch Anschrauben des scheibenförmigen Zylinders Z mit dem Trägheitsmoment J_S und bestimmt erneut die Schwingungsdauer T_S aus 10 Schwingungen. Den Mittelwert aus jeweils 6 Messungen von T_V und T_S verwendet man dann zusammen mit den Daten des scheibenförmigen Zylinders und des Drahtes zur Berechnung des Schubmoduls G (Gl. (10)).

FRAGEN

1. Erläutern Sie den Unterschied zwischen elastischer und plastischer Verformung!
2. Wie viel unabhängige elastische Konstanten benötigt man zur Beschreibung des elastischen Verhaltens isotroper Körper?
3. Zwischen den elastischen Konstanten (vgl. Abschn. 1) bestehen die Beziehungen

   $E = 2\,G\,(1 + \mu)$ und $E = 3\,K\,(1 - 2\,\mu).$

   Wie erklären Sie sich diese Zusammenhänge?
4. Welche Teile der experimentellen Anordnung „Draht-Haltevorrichtung - zusätzlich befestigter Zylinder“ tragen in der Gl. (9) zur Winkelrichtgröße D und welche zum Trägheitsmoment $J_S + J_V$ bei und warum?