

**Mathematisch-Naturwissenschaftliche
Fakultät I**

Institut für Physik
Physikalisches Grundpraktikum



Physikalisches Grundpraktikum

Physik als Nebenfach

2005

VORBEMERKUNG

Das physikalische Experiment besteht im Wesentlichen aus der Messung physikalischer Größen sowie der Auswertung und Bewertung der erhaltenen Messergebnisse. Die Durchführung eines Experiments setzt praktische Grundkenntnisse und Fähigkeiten voraus, wie Umgang mit Messgeräten, geschulte Beobachtungsgabe, experimentelles Geschick und Protokollführung. Diese Fähigkeiten kann man bei der Durchführung von Praktikumsversuchen erlernen und üben.

Das vorliegende Skript enthält Anleitungen für die Versuche des physikalischen Praktikums, die von den Nebenfachstudenten durchgeführt werden. Diese Anleitungen erläutern die physikalischen Grundlagen nur soweit, wie sie zum Verständnis der Aufgaben und der Auswertung notwendig sind. Zum tieferen Verständnis der Zusammenhänge wird auf das Studium der einschlägigen Physiklehrbücher verwiesen, die auch zum Gebrauch neben der Vorlesung empfohlen wurden. Als Orientierungshilfe beim Selbststudium sind allen Versuchsanleitungen relevante Grundbegriffe bzw. Schlagworte vorangestellt.

Alle Messungen sind fehlerbehaftet und deshalb muss jedes Messergebnis durch die Angabe seiner Messunsicherheit ergänzt werden. Hinweise zur Bestimmung möglicher Fehlerquellen und zu Verfahren zur Ermittlung der Messunsicherheit sind im Praktikumsskript „Einführung“ zusammengestellt, ergänzt durch Anleitungen zur grafischen Versuchsauswertung und gegebenenfalls PC-Unterstützung (z.B. beim Geradenausgleich).

Hingewiesen sei weiterhin auf folgende Praktikumsbücher:

W. Ilberg, *Physikalisches Praktikum für Anfänger*, BSG B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig

W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G. Teubner, Stuttgart.

INHALTSVERZEICHNIS

Versuch		Seite
F1	Fehlerverteilung	3
F2	Volumenmessung	7
F3	Fadenpendel	11
F7	Statistik und Radioaktivität	14
M2	Messung von Trägheitsmomenten	23
M3	Elastizität und Torsion	26
M5	Oberflächenspannung	31
M6	Innere Reibung	35
M10	Gyroskop	38
M13	Ultraschall	44
T1	Wärmekapazität eines Kalorimeters	50
T4	Ideales Gas	53
T6	Thermoelement	55
E1	Wheatstonesche Brücke	58
E3	Transformator	63
E4	Wechselstromwiderstände	67
E5	Gleichrichterschaltungen	72
E12	Elektronen in Feldern	75
O2	Mikroskop	80
O3	Prismenspektrometer	84
O4	Gitterspektrometer	87
O5	Polarimetrie	90
O6	Newtonsche Ringe	93
O7	Abbe-Refraktometer	96
O8	Fraunhofersche Beugung	100

F1 FEHLERVERTEILUNG

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Systematische Fehler, zufällige Fehler, Standardabweichung, Häufigkeit, Normalverteilung, Summenhäufigkeit, Wahrscheinlichkeitspapier, Stichprobe, Grundgesamtheit (Einführungsskript, Abschnitt 3 und 4).

Alle Messungen physikalischer Größen sind mit Messfehlern behaftet. Sind systematische Fehler ausgeschlossen, dann streuen die Messwerte x_i ($i = 1 \dots n$) aufgrund der zufälligen Fehler symmetrisch um den Mittelwert \bar{x} . Berechnet man die scheinbaren Fehler

$$v_i = x_i - \bar{x} \quad (1)$$

einer Messreihe und stellt die absolute Häufigkeit $k(v_i)$ bzw. die relative Häufigkeit

$$h(v_i) = k(v_i)/n$$
 grafisch als Funktion der Fehler v_i dar, dann erhält man eine treppenförmige Verteilungskurve (Abb. 1). Dazu werden die Fehler v_i in gleichgroßen Intervallen Δv (Klasseneinteilung) zusammengefasst. Im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ und Intervallbreite $\Delta v \rightarrow 0$ genügen die Fehler v einer Normalverteilung (Gauß-Verteilung)

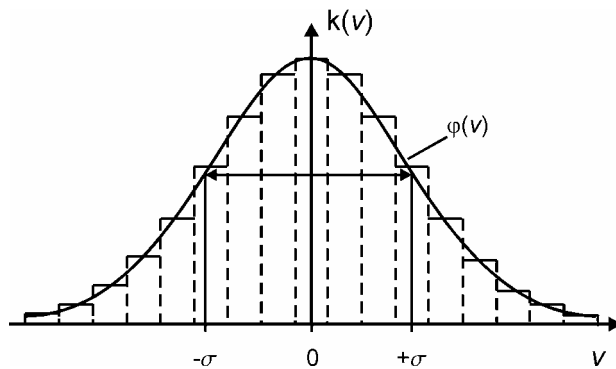


Abb.1 FEHLERVERTEILUNG

Die grafische Darstellung dieser Verteilung (ausgezogene Kurve in Abb. 1) zeigt folgende Eigenschaften:

$$\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2)$$

Die grafische Darstellung dieser Verteilung (ausgezogene Kurve in Abb. 1) zeigt folgende Eigenschaften:

- (1) Die Normalverteilung hat für $v=0$ ein Maximum, ist symmetrisch bezüglich dieses Maximums und strebt mit wachsendem v gegen Null.
- (2) Die Normalverteilung hat Wendepunkte bei $v = \pm\sigma$. Die Größe σ heißt Standardabweichung.
- (3) Die Breite der Normalverteilung wird durch den Parameter σ bestimmt. Eine schlanke Kurve, kleines σ , bedeutet eine geringe Streuung der Messergebnisse, eine große Genauigkeit der Messmethode. Eine breite Kurve, großes σ , bedeutet das Gegenteil.

Die Überprüfung, ob eine Messreihe (Stichprobe) einer Normalverteilung genügt, ist mit Hilfe bestimmter statistischer Verfahren möglich, von denen einige in diesem Versuch angewandt werden. Die statistische Analyse einer Messreihe setzt aber eine große Zahl von Messwerten voraus.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

(1) Wird der Versuch im Hörsaal durchgeführt, dann wird über einen Projektor eine Skale mit einer Marke projiziert. Die Lage dieser Marke schätzt jeder Student für sich auf 0,01 des Teilstrichabstandes und notiert sich im Messprotokoll den Wert x_i . Der wahre Wert der Stellung der Marke x_{wi} wurde vorher ausgemessen und wird nach der Schätzung vom Assistenten angesagt und im Messprotokoll ebenfalls notiert.

(2) Wird der Versuch im Praktikum durchgeführt, bekommt jede Versuchsgruppe eine Zentimeterskale mit beweglichem Schieber, der eine Marke trägt. Die Stellung der Marke zwischen den Teilstrichen der Zentimeterskale wird auf 0,01 des Teilstrichabstandes geschätzt (Werte x_i).

Auf der Rückseite des Schiebers befindet sich eine Millimeterskale mit Nonius, so dass die Stellung der Marke auf 0,01 cm abgelesen werden kann. Wegen der wesentlich größeren Ablesegenauigkeit auf der Rückseite im Vergleich zum Schätzwert kann ersterer als wahrer Wert x_{wi} angesehen werden. Der Versuch wird im Praktikum zu zweit durchgeführt. Ein Partner schätzt, der andere führt Protokoll und liest nach der Schätzung den wahren Wert auf der Rückseite der Skale ab. Jeder Student wertet nur seine eigenen Schätzwerte x_i aus. Um systematische Fehler zu vermeiden, muss auf gute Beleuchtung der Skale geachtet und der Schätzabstand konstant gehalten (ca. 1 m) werden.

AUFGABEN

1. Ermittlung der Stichprobe: 100 Schätzwerte x_i der Stellung einer Marke und die zugehörigen Werte x_{wi} werden notiert. Für das Messprotokoll empfiehlt sich folgendes Schema:

i	x_i	x_{wi}	v_i		
			+	0	-

2. Berechnung der scheinbaren Fehler $v_i = x_i - x_{wi}$.
3. Vorzeichentest: Man bestimme die Zahl n^+ der positiven und die Zahl n^- der negativen Fehler v_i . Da die Fehler v_i bei Annahme einer Normalverteilung symmetrisch zum Wert $v_i = 0$ liegen, müssen die Zahlen n^+ und n^- annähernd gleich groß sein. Wenn n die Zahl aller Messwerte ist, muss für den positiven Ausgang des Vorzeichentests

$$|n^+ - n^-| \leq \sqrt{n}$$

erfüllt sein; $\pm \sqrt{n}$ ist die zu erwartende statistische Schwankung bei einer Stichprobe vom Umfang n .

4. Für die weitere Auswertung der Messergebnisse empfiehlt sich eine Tabelle, in der die scheinbaren Fehler ihrer Größe nach geordnet werden, nach folgendem Schema:

v_j	v_j^2	Strichliste	$k(v_j)$	$k(v_j) \cdot v_j^2$	$h(v_j)$	$H(v_j)$
v_{iMin}						
.						
.						
.						
v_{iMax}						1,000
Kontrollen:			100	$\sum v_i^2 = \sum k(v_j) v_j^2$	1,000	-

In diese Tabelle werden die Messwerte von Aufgabe 1 übertragen, indem man sie der Reihe nach durchgeht und bei dem entsprechenden v_j in der Spalte „Strichliste“ durch einen Strich markiert. Die Zahl der Striche ergibt dann die absolute Häufigkeit $k(v_j)$.

5. Aus den Fehlern v_i wird die empirische Standardabweichung

$$s = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i v_i^2} = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \sum_j k(v_j) v_j^2}$$

berechnet, die eine Näherung für die Standardabweichung σ der Normalverteilung (Gl. (2)) darstellt. Im Nenner tritt n anstelle von $(n-1)$ auf, weil bei diesem Versuch ausnahmsweise der wahre Wert der Messgröße bekannt ist.

6. Die ermittelten relativen Häufigkeiten $h(v_j) = k(v_j)/n$ der Fehler v_j werden grafisch als Funktion von v_j dargestellt. Durch die Punkte versuche man nach Augenmaß eine Normalverteilungskurve zu legen.

7. Mit den relativen Häufigkeiten aus Aufgabe 6 berechne man die Summenhäufigkeit

$$H(v_j) = \sum_{v_k \leq v_j} h(v_k)$$

und stelle diese Summenhäufigkeit $H(v_j)$ grafisch als Funktion von v_j auf Millimeterpapier dar.

8. Test mit Wahrscheinlichkeitspapier: Die Wertepaare der Summenhäufigkeitskurve (Aufgabe 7) übertrage man außerdem auf Wahrscheinlichkeitspapier (vgl. Einführungsskript, Abschnitt 4.8) und lege durch die Punkte im mittleren Bereich eine ausgleichende Gerade.

9. Man entnehme der Darstellung auf Wahrscheinlichkeitspapier (Aufgabe 8) bei den Werten $H(v') = 0,16$ (bzw. 16 %) und $H(v'') = 0,84$ (bzw. 84 %) die zugehörigen Werte v' und v'' und vergleiche $(v'' - v')/2$ mit dem Wert der empirischen Standardabweichung (Aufgabe 5).

FRAGEN

1. Welche Eigenschaften haben zufällige Fehler im Gegensatz zu systematischen Fehlern?
2. Warum werden bei Aufgabe 8 vorwiegend die Punkte im mittleren Bereich berücksichtigt?
3. Welcher Unterschied besteht zwischen der Standardabweichung und dem Vertrauensbereich?
4. Welche systematischen Fehler können beim Versuch vorliegen?

F2 VOLUMENMESSUNG

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Masse, Gewichtskraft, Auftriebskraft. Zufälliger und systematischer Fehler, Messunsicherheit, Fehlerfortpflanzungsgesetz, gewogener Mittelwert (Einführungsskript, Abschnitt 3).

In diesem Versuch werden drei Methoden unterschiedlicher Genauigkeit zur Bestimmung des Volumens eines Probekörpers verwendet mit dem Ziel, die Grundbegriffe der Fehlerrechnung anzuwenden.

1. Methode: Überlaufgefäß: Ein mit einem Überlauf versehener Glasbehälter wird bis zum Überlaufen mit Wasser gefüllt. Durch Eintauchen des Probekörpers, dessen Volumen V_1 bestimmt werden soll, wird Wasser verdrängt, das in einen Messzylinder fließt.

2. Methode: Geometrie des Körpers: Der Probekörper ist ein Zylinder und sein Volumen kann aus dem Durchmesser d und der Höhe h nach

$$V_2 = \frac{\pi}{4} d^2 h \quad (1)$$

berechnet werden.

3. Methode: Auftriebsmessung: Der Probekörper vom Volumen V_3 wird mit einer Laborwaage mit symmetrischem Waagebalken in Luft gewogen. Man benötigt für das Gleichgewicht die Massennormale m_1 zur Kompensation der Gewichtskraft $F_G = m_1 g$ des Probekörpers. Taucht man ihn in Wasser (Dichte ρ_w), dann erfährt er eine Auftriebskraft $F_A = \rho_w g V_3$ (g = Fallbeschleunigung). Um die Waage wieder ins Gleichgewicht zu bringen, benötigt man die Massennormale m_2 zur Kompensation der um die Auftriebskraft F_A verminderten Gewichtskraft F_G , d. h. $m_2 g = m_1 g - \rho_w g V_3$. Daraus folgt:

$$V_3 = \frac{m_1 - m_2}{\rho_w}. \quad (2)$$

Die zur Bestimmung der Massenwerte m_1 und m_2 verwendete Laborwaage trägt in der Mitte des Waagebalkens einen Zeiger, der über einer Skale schwingt. An seiner Stellung ist das Gleichgewicht der Waage ablesbar. Verschiebt sich durch eine einseitig wirkende Zusatzmasse $\Delta m'$ die Zeigerstellung um Δa , dann bezeichnet man den Quotienten

$$E = \frac{\Delta a}{\Delta m'} \quad (3)$$

als Empfindlichkeit der Waage; sie ist ein Maß für ihre Güte und gestattet die Abschätzung der Messfehler.

Systematische Fehler der drei Messmethoden:

1. Methode: Überlaufgefäß

- (I) Der Gerätefehler ΔV des Messzylinders beträgt bei einem Nenninhalt von $V_N = 50 \text{ ml}$ und einer Nenntemperatur von $t_N = 20 \text{ °C}$ bis zu

$$\Delta V = \pm 0,5 \text{ ml.} \quad (4)$$

- (II) Die Richtung und die Größe des Volumenfehlers ΔV , wenn Messtemperatur t_M und Nenntemperatur t_N des Messzylinders voneinander abweichen, wird mit Hilfe des Ausdehnungskoeffizienten des Glases abgeschätzt. Ist das Nennvolumen des als Glasrohr betrachteten Messzylinders V_N , dann ist bei der Messtemperatur t_M sein Volumen

$$V_M = V_N(1 + \gamma(t_M - t_N))$$

mit $\gamma = 2,7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ als kubischem thermischem Ausdehnungskoeffizienten des Glases.

Daraus ergibt sich der Volumenfehler zu

$$\Delta V = V\gamma(t_M - t_N). \quad (5)$$

2. Methode: Geometrie des Körpers

- (III) Die Fehlergrenzen Δl der Messgeräte sind, wenn l die gemessene Länge ist, von folgender Größe:

Messschieber $\Delta l = \pm (5 \cdot 10^{-5} \text{ m} + 1 \cdot 10^{-4} l), \quad (6)$

Bügelmessschraube $\Delta l = \pm (5 \cdot 10^{-6} \text{ m} + 1 \cdot 10^{-5} l). \quad (7)$

3. Methode: Auftriebsmessung

- (IV) Die Berücksichtigung des Auftriebs des Probekörpers und der Massennormale (Dichte $\rho_N = 8,4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$) bei der Wägung in Luft (Dichte $\rho_L = 1,2 \text{ kg/m}^3$) ergibt (vgl. Gl. (2)):

$$V'_3 = \frac{m_1 - m_2}{\rho_w} \cdot \frac{1 - \rho_L / \rho_N}{1 - \rho_L / \rho_w} \approx V_3 \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_N} + \frac{\rho_L}{\rho_w} \right). \quad (8)$$

- (V) Die Berücksichtigung des Auftriebs des Aufhänge drahtes, von dem das Volumen ΔV im Wasser eintaucht, ergibt:

$$V''_3 = V'_3 - \Delta V. \quad (9)$$

AUFGABEN

1. Messung der einzelnen Messgrößen für jede der drei Methoden und Berechnung der Volumenwerte V_i .
2. Berechnung bzw. Abschätzung der zufälligen Fehler für die einzelnen Messgrößen.

3. Größenordnungsmäßige Abschätzung der systematischen Fehler der Methoden 1 - 3. Welche ergeben Korrekturen und welche bestimmen den systematischen Restfehler?
4. Übersichtliche Zusammenstellung der Messergebnisse, der zufälligen und der systematischen Fehleranteile sowie der Messunsicherheiten für die einzelnen Messgrößen.
5. Berechnung der Messunsicherheiten ΔV_i für die Volumenwerte nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz.
6. Berechnung des gewogenen Mittelwertes einschließlich Fehler, wenn die Messunsicherheiten ΔV_i dies rechtfertigen.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Methode 1: Der Messzylinder wird vor dem Eintauchen mit etwas Wasser gefüllt und dieser Füllstand V_A als Bezugsgröße gewählt. Nach dem Einlaufen des verdrängten Wassers liest man den Füllstand V_E am Messzylinder ab, so dass sich als Volumen des Probekörpers

$$V_1 = V_E - V_A \quad (10)$$

ergibt. Die Messungen werden sechsmal durchgeführt und Bruchteile der Skalenteile geschätzt.

Methode 2: Die Höhe des Zylinders h wird sechsmal mit einem Messschieber und sein Durchmesser d wird zehnmal an verschiedenen Stellen mit einer Bügelmessschraube gemessen.

Methode 3: Jede Wägung wird zweimal ausgeführt und der Größtfehler aus der Empfindlichkeit der Waage (Gl. (3)) abgeschätzt. Als Größtfehler wird die Zusatzmasse $\Delta m'$ angegeben, die einen Zeigerausschlag $\Delta a = 1$ Skalenteil bewirkt. Die Dichte des Wassers ist temperaturabhängig und wird einer grafischen Darstellung am Versuchsplatz entnommen.

In Aufgabe 1 werden die einzelnen Messgrößen sowie die drei Volumenwerte V_i und in Aufgabe 2 die zufälligen Fehler der einzelnen Messgrößen ermittelt. In Aufgabe 3 sind die systematischen Fehler zu diskutieren, wobei zwischen den Korrekturen und den systematischen Restfehlern zu unterscheiden ist.

Für Aufgabe 4 müssen die zufälligen und die systematischen Fehler verglichen und die Messunsicherheiten ΔV_i für die drei Methoden festgelegt werden. Überlappen sich die Bereiche der Messunsicherheiten nicht, dann liegen grobe Messfehler vor oder es existieren noch weitere bisher nicht erfasste systematische Fehler. Überlappen sich die Bereiche der Messunsicherheiten, dann kann der gewogene Mittelwert und die zugehörige Messunsicherheit berechnet werden (vgl. Einführungsskript, Abschnitt 3.8).

FRAGEN

1. Warum soll bei Methode 1 bereits zu Beginn des Versuches etwas Wasser im Zylinder sein?
2. Die Gewichtungsfaktoren p_i für das gewogene Mittel werden umgekehrt proportional zum Quadrat der Messunsicherheit festgelegt. Wie begründet man, dass die Messunsicherheiten quadratisch und nicht linear eingesetzt werden?
3. Man leite die Korrekturformeln für die Auftriebsmethode (Gl. (8) und (9)) ab.
4. Unter welcher Voraussetzung darf aus Messwerten verschiedener Genauigkeit ein gewogenes Mittel bestimmt werden?

F3 FADENPENDEL

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: *Mathematisches und physikalisches Pendel, Bewegungsgleichung, Schwerkraft, Schwingungsdifferentialgleichung. Zufälliger und systematischer Fehler, Messunsicherheit, Fehlerfortpflanzung und lineare Regression (Einführungsskript, Abschnitt 3).*

Ein an einem Faden aufgehängter Körper stellt aufgrund der wirkenden Schwerkraft und

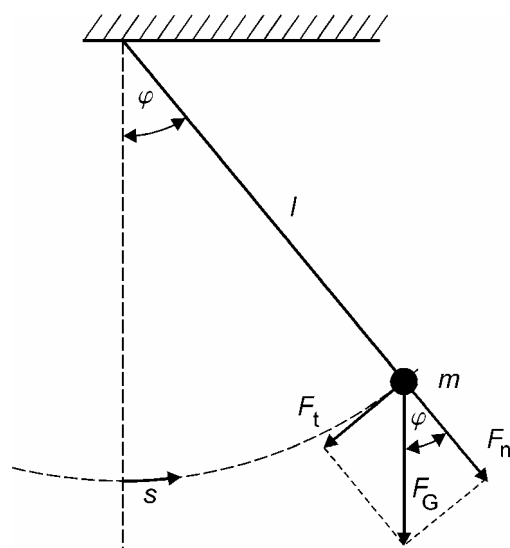


Abb.1 FADENPENDEL

der Trägheit des Körpers ein schwingungsfähiges System dar. Betrachtet man einen punktförmigen Körper der Masse m , der an einem Faden der Länge l hängt und lenkt den Körper um einen Winkel φ (Abb. 1) aus der Senkrechten aus, dann führt der Körper nach dem Loslassen Schwingungen um die Senkrechte aus. Bei Vernachlässigung der Masse des Fadens und der Luftreibung wirkt auf den Körper in jedem Punkt der Bahn die Gewichtskraft

$$\vec{F}_G = m \vec{g} \quad (1)$$

senkrecht nach unten (g Fallbeschleunigung). Die Normalkomponente $F_n = mg \cos \varphi$ dieser Kraft findet ihre Gegenkraft in der in der Aufhängung auftretenden Kraft und beeinflusst die Bewegung des

Körpers nicht. Die Tangentialkomponente $F_t = mg \cdot \sin \varphi$ der Gewichtskraft erzeugt entsprechend der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 s}{d t^2} = -mg \sin \varphi \quad (2)$$

eine Beschleunigung des Körpers längs der kreisförmigen Bahnkurve. Aufgrund der konstanten Fadenlänge l bestehen zwischen dem Auslenkwinkel φ und der Koordinate s auf der Bahnkurve die Gleichungen

$$s = l\varphi, \quad \frac{ds}{dt} = l \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = l \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \quad (3)$$

Mit der Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$ für kleine Auslenkwinkel erhält man für das mathematische Pendel als Newtonsche Bewegungsgleichung

$$l \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + g\varphi = 0, \quad (4)$$

die einfachste Form der Schwingungsdifferentialgleichung. Sie kann mit dem Ansatz

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \psi) \quad \text{mit} \quad \omega^2 = g / l \quad (5)$$

gelöst werden. Die Konstanten heißen Amplitude φ_0 bzw. Phasenkonstante ψ ; sie sind durch die konkreten Anfangsbedingungen festgelegt. Das mathematische Pendel führt also bei Auslenkung um kleine Winkel harmonische Schwingungen mit der Periodendauer

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi \sqrt{l/g} \quad (6)$$

aus, die unabhängig von m und φ_0 ist. Ohne die Beschränkung auf kleine Winkel ergibt sich für die Periodendauer

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \cdot \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} \dots \right\}. \quad (7)$$

AUFGABEN

1. Bestimmung der Periodendauer für eine feste Fadenlänge. Die Zeitmessung erfolgt für 10 Schwingungen je 10-mal an einem Umkehrpunkt und beim Nulldurchgang des Pendels. Berechnung des Mittelwertes, der Standardabweichung und des Vertrauensbereiches der Periodendauer und Diskussion der Unterschiede.
2. Beim Nulldurchgang wird zehnmals die Periodendauer für 1 Schwingung bestimmt und die Standardabweichung berechnet. Vergleich mit dem Wert aus Aufgabe 1 und Diskussion der Unterschiede.
3. Bestimmung der Periodendauer für 10 verschiedene Fadenlängen l . Aus je 2 Messungen für 10 Schwingungen bestimme man die Mittelwerte für die Periodendauern T_i .
4. Berechnung der Fallbeschleunigung g und der Anfangslänge l_0 durch grafischen und rechnerischen Geradenausgleich (Gl. (8)).
5. Abschätzung des systematischen Fehlers für die Periodendauer (Gl. (7) für die konkreten Versuchsbedingungen.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Ein Bleizylinder (Radius $R \approx 23\text{mm}$, Höhe $h \approx 45\text{mm}$ und Masse $m \approx 0,8\text{kg}$) hängt an einem Stahldraht, dessen Länge verändert werden kann. Die Längenänderung kann mit Hilfe von Ringmarken, deren Abstand 2 cm beträgt, eingestellt werden. Bei Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage führt es Schwingungen aus, deren Periodendauer mit einer von Hand ausgelösten Stoppuhr (Ablesegenauigkeit 0,01 s) bestimmt wird.

Für Aufgabe 1 und 2 wähle man eine möglichst große Fadenlänge. Für Aufgabe 3 wird die Fadenlänge l_0 (Anfangslänge) um die Werte l_i ($i = 1, \dots, 10$) in Schritten von 4 cm verringert. Setzt man in Gleichung (6) für die Länge $l = l_0 - l_i$ ($i = 1, \dots, 10$) ein, erhält man

$$T_i^2 = \frac{4\pi^2}{g} l_0 - \frac{4\pi^2}{g} l_i. \quad (8)$$

Für Aufgabe 4 fertige man eine grafische Darstellung $T_i^2 = f(l_i)$ an und bestimme aus dem Anstieg die Fallbeschleunigung g sowie aus dem Schnittpunkt mit der l -Achse die Anfangslänge l_0 . Für die Fallbeschleunigung schätze man aus der Ablesegenauigkeit der grafischen Darstellung die Messunsicherheit ab.

Die Bestimmung des Anstiegs sowie der Anfangslänge kann auch durch lineare Regression erfolgen, wozu das Rechnerprogramm Geradenausgleich - "GERA" - verwendet werden kann. Es gibt auch den zufälligen Fehler für den Anstieg und damit für die Fallbeschleunigung an. Die Messunsicherheit wird vorwiegend vom zufälligen Fehler bestimmt, so dass der systematische Restfehler hier vernachlässigt werden kann.

Für Aufgabe 5 berechne man aus dem konkret gewählten Auslenkwinkel φ den Wert für die geschweifte Klammer (Gl.(7)). Wird durch diesen systematischen Fehler der Wert der Fallbeschleunigung (Aufgabe 4) innerhalb der Fehlergrenzen beeinflusst?

FRAGEN

1. Warum hängt die Schwingungsdauer des Fadenpendels nicht von der Masse ab?
2. Warum ergeben sich innerhalb der Aufgaben 1 und 2 Unterschiede in der Standardabweichung?
3. Welche Energieformen werden beim schwingenden Pendel ineinander umgewandelt?

F7 STATISTIK UND RADIOAKTIVITÄT

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Häufigkeit, Summenhäufigkeit, Poisson- und Gaußverteilung, Geiger-Müller-Zählrohr, Zählrate, χ^2 -Test (Einführungsskript, Abschnitt 3.3; R. Storm "Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik ...", Leipzig 1986, S. 184 ff).

1. Poisson- und Gaußverteilung: Bei statistischen Prozessen, beispielsweise dem radioaktiven Zerfall, treten unterschiedliche Häufigkeitsverteilungen auf. Die Wahrscheinlichkeit $P(x)$ für das Eintreffen seltener Ereignisse - beim radioaktiven Zerfall ist die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall eines Atoms während der Messzeit sehr klein -

wird durch eine Poisson-Verteilung beschrieben

$$P(x) = \exp(-\bar{x}) \frac{(\bar{x})^x}{x!}. \quad (1)$$

Die zufällige Veränderliche x ist die während der Messzeit mit z.B. einem Geiger-Müller-Zählrohr registrierte Impulszahl. Die Impulszahl pro Zeiteinheit bezeichnet man als Impuls- oder Zählrate. Die Impulszahl x kann nur ganze positive Zahlen annehmen und ergibt eine Häufigkeitsverteilung, welche für kleine Mittelwerte \bar{x} unsymmetrisch zum Mittelwert \bar{x} ist und für größere Mittelwerte zunehmend symmetrischer wird (Abb.1). In numerischen Berechnungen verwendet man zweckmäßig die Rekursionsformeln

$$P(0) = \exp(-\bar{x}), \quad P(x) = P(x-1) \frac{\bar{x}}{x}. \quad (2)$$

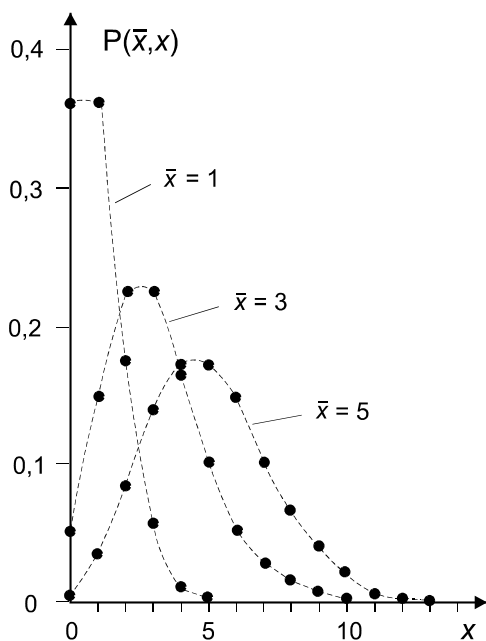


Abb. 1 POISSON-VERTEILUNG

Für die Standardabweichung einer Poisson-Verteilung gilt

$$s = \sqrt{\bar{x}}. \quad (3)$$

Für große \bar{x} , also wenn $|x - \bar{x}| \ll \bar{x}$ ist, geht die Poisson-Verteilung in eine spezielle Gaußsche Normalverteilung

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4)$$

(mit $\sigma^2 = \bar{x}$) über, deren empirische Standardabweichung sich für eine Messreihe vom Umfang n nach

$$s = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (5)$$

berechnet. Die Poisson-Verteilung ist also bereits durch einen Anpassungsparameter, den Mittelwert, festgelegt, während für die Gaußsche Normalverteilung zwei Anpassungsparameter, Mittelwert und Standardabweichung, benötigt werden.

Überdecken die einzelnen Messwerte einen größeren Wertebereich von x_{\min} bis x_{\max} und ist der Umfang n der Messreihe groß, dann berechnet man Mittelwert und Standardabweichung nicht aus den Einzelwerten x_i sondern nimmt eine Klasseneinteilung wie folgt vor: Die sinnvolle Klassenzahl N und die Klassenbreite d legt man durch

$$N \approx 5 \lg n, \quad d \approx \frac{1}{N} (x_{\max} - x_{\min}) \quad (6)$$

fest. Man wählt die Klassengrenzen zweckmäßig so, dass keine Messwerte auf eine Klassengrenze fallen, da sonst eine Aufteilung ihrer Häufigkeiten je zur Hälfte auf die benachbarten Klassen erfolgen müsste, was die Behandlung unnötig erschweren würde. Anschließend ermittelt man die absoluten Häufigkeiten $k(x_j)$ der Messwerte in der j -ten Klasse mit der Klassenmitte x_j und berechnet für den arithmetischen Mittelwert \bar{x} bzw. die Standardabweichung s die Näherungswerte:

$$\bar{x} \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N x_j k(x_j), \quad s \approx \pm \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2 k(x_j)}{n-1}} \quad (7)$$

2. χ^2 -Test: Zum Vergleich einer gemessene Häufigkeitsverteilung mit einer theoretischen Verteilung gibt es verschiedene Prüfverfahren. Bei der Darstellung auf Wahrscheinlichkeitspapier (vgl. Versuch F 1) wird mit der Normalverteilung verglichen. Ein weiteres Verfahren ist der χ^2 -Test, der für beliebige Verteilungen anwendbar ist und bei dem die Güte der Anpassung zwischen

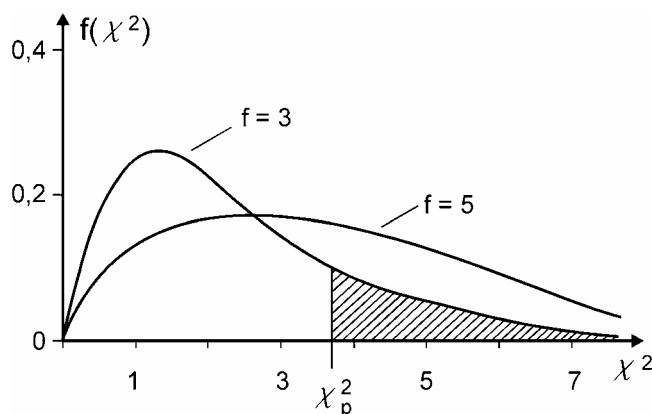


Abb. 2 χ^2 -VERTEILUNG

gemessener und theoretischer Verteilung durch eine Prüfgröße bewertet wird. Dazu bildet man die Quadrate der Abweichungen der gemessenen Häufigkeiten $k(x_j)$ von den theoretischen Häufigkeiten nP_j , normiert und addiert sie, so dass sich die Prüfgröße

$$\chi^2_p = \sum_{j=1}^N \frac{(k(x_j) - nP_j)^2}{nP_j} \quad (8)$$

ergibt. Liegt einer Messreihe ein Prozess zugrunde, der einer angenommenen theo-

retischen Verteilung entspricht, so werden bei Wiederholung der Messreihe aber unterschiedliche χ^2 -Werte auftreten, da die Streuung der gemessenen Werte $k(x_j)$ bezüglich der theoretisch zu erwartenden Werte nP_j zufällig ist. Die Häufigkeitsverteilung, d. h. die Wahrscheinlich-

keitsdichtefunktion $f(\chi^2)$ der χ^2 -Werte lässt sich berechnen (Abb. 2); sie ist von einer natürlichen Zahl f , der sogenannten Zahl der Freiheitsgrade

$$f = N - 1 - r \quad (9)$$

abhängig. Die Abhängigkeit der χ^2 -Verteilung von der Klassenzahl N ist verständlich, weil sie die Zahl der addierten Differenzen bestimmt (Gl. (8)). Da per Definition die Bedingung

$$\sum_{j=1}^N k(x_j) = n \quad (10)$$

gilt, sind die Summanden nicht voneinander unabhängig, und die Zahl der Freiheitsgrade wird um 1 reduziert. Die Zahl der Freiheitsgrade verringert sich weiter um die Zahl der Anpassungsparameter r der theoretischen Verteilung, da diese aus den Messwerten gebildet werden.

Um beurteilen zu können, ob die Hypothese einer bestimmten theoretischen Verteilung gerechtfertigt ist oder nicht, führt man in der Statistik die sogenannte Irrtumswahrscheinlichkeit

$$\alpha = \int_{\chi^2_p}^{\infty} f(\chi^2) d\chi^2 \quad (11)$$

ein, die für einen vorgegebenen Freiheitsgrad f (Gl. (9)) einen bestimmten Zahlenwert ergibt. Sie ist nicht analytisch angebar, ihre Größe entspricht der schraffierten Fläche in Abb. 2 und kann aus Tab.1 entnommen werden. Je nach der Größe der Irrtumswahrscheinlichkeit kann man die Anpassung von Messreihe und theoretischer Verteilung klassifizieren:

gut: $\alpha \geq 0,5$ mäßig: $0,5 > \alpha \geq 0,2$
 schwach: $0,2 > \alpha \geq 0,06$ fehlend: $0,06 > \alpha$.

α f	0,99	0,975	0,95	0,90	0,70	0,50	0,30	0,10	0,05	0,025	0,01	0,001
1	1,57(-4)	0,82(-4)	3,93(-3)	0,016	0,148	0,455	1,07	2,71	3,84	5,02	6,63	10,8
2	0,020	0,051	0,103	0,211	0,713	1,39	2,41	4,61	5,99	7,38	9,21	13,8
3	0,115	0,216	0,352	0,584	1,42	2,37	3,67	6,25	7,81	9,35	11,3	16,3
4	0,297	0,484	0,711	1,06	2,19	3,36	4,88	7,78	9,49	11,1	13,3	18,5
5	0,554	0,831	1,15	1,61	3,00	4,35	6,06	9,24	11,1	12,8	15,1	20,5
6	0,872	1,24	1,64	2,20	3,83	5,35	7,23	10,6	12,6	14,4	16,8	22,5
7	1,24	1,69	2,17	2,83	4,67	6,35	8,38	12,0	14,1	16,0	18,5	24,3
8	1,65	2,18	2,73	3,40	5,53	7,34	9,52	13,4	15,5	17,5	20,1	26,1
9	2,09	2,70	3,33	4,17	6,39	8,34	10,7	14,7	16,9	19,0	21,7	27,9
10	2,56	3,25	3,94	4,87	7,27	9,34	11,8	16,0	18,3	20,5	23,2	29,6
12	3,57	4,40	5,23	6,30	9,03	11,3	14,0	18,5	21,0	23,3	26,2	32,0
14	4,66	5,63	6,57	7,79	10,8	13,3	16,2	21,1	23,7	26,1	29,1	36,1
16	5,81	6,91	7,96	9,31	12,6	15,3	18,4	23,5	26,3	28,8	32,0	39,3
18	7,01	8,23	9,39	10,9	14,4	17,3	20,6	26,0	28,9	31,5	34,8	42,3
20	8,26	9,59	10,9	12,4	16,3	19,3	22,8	28,4	31,4	34,2	37,6	45,3

Tab.1 IRRTUMSWAHRSCHEINLICHKEIT α

Man erhält also beim χ^2 -Test keine Ja-Nein-Aussage sowie keine Angabe über die Sicherheit der gewählten Hypothese. Die angegebene Klassifizierung ist ein grobes Raster, das für viele Zwecke in der Praxis sinnvoll ist. In der Literatur werden manchmal die Grenzen schärfer oder wei-

ter gesetzt. Die Irrtumswahrscheinlichkeit gibt keine Ja-Nein-Aussage, vielmehr gibt sie an, wie man sich irrt, wenn die Hypothese verworfen wird. Ergibt sich beispielsweise $\alpha = 0,3$, dann wäre aufgrund der durchgeführten Messreihe eine Ablehnung der angenommenen Hypothese mit 30 prozentiger Wahrscheinlichkeit unberechtigt. Dies bedeutet, dass bei Auswertung von 10 analogen Messreihen etwa drei von ihnen den gleichen oder einen größeren χ^2 -Wert ergeben könnten.

Damit die berechnete Prüfgröße (Gl. (8)) näherungsweise eine χ^2 -Verteilung besitzt, müssen die theoretischen Häufigkeiten $nP_j \geq 5$ sein. Wenn dies nicht erfüllt ist, was an den Enden der Verteilungen häufig auftritt, dann müssen benachbarte Klassen an den Enden der Verteilung zusammengefasst werden, wodurch sich die Zahl der Freiheitsgrade verringert.

3. Absorption von γ -Strahlung: Trifft γ -Strahlung auf einen Stoff, so treten die γ -Quanten mit den Atomen des Stoffes in Wechselwirkung. Dabei nimmt die Intensität der γ -Strahlung nach Durchdringen der Schichtdicke dz um den Betrag dI ab, wobei

$$dI = -\mu I dz \quad (12)$$

ist. μ ist der lineare Schwächungskoeffizient, der vom Absorptionsmaterial und der Energie der γ -Strahlung abhängt. Durch Integration erhält man das Schwächungsgesetz in der Form

$$I = I_0 \exp(-\mu z). \quad (13)$$

Dabei ist I_0 die Anfangsintensität bei $z = 0$. Die Intensitätsgrößen I und I_0 sind den jeweiligen Impulsraten x_z und x_0 proportional, von denen der Nulleffekt mit der Impulsrate x_N abgezogen wurde.

Von praktischem Interesse ist oft die material- und energieabhängige Halbwertsdicke $z_{1/2}$, bei welcher die Anfangsintensität I_0 auf den halben Wert abgeschwächt wird. Aus Gl. (13) folgt

$$z_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}. \quad (14)$$

In der einschlägigen Literatur (z.B. Kohlrausch, Praktische Physik, Band 3) findet man für ausgewählte Materialien und ausgedehnte Energiebereiche Angaben für μ bzw. den daraus mit der

Dichte ρ gebildeten Massenschwächungskoeffizienten μ/ρ (bevorzugte Einheit $\frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$). Aus

praktischen Gründen wird anstelle der Schichtdicke z oft die Massenflächendichte $d = z \cdot \rho$

(bevorzugte Einheit $\frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$) und die damit gebildete Halbwertsflächendichte

$$d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} \rho \quad (15)$$

benutzt.

AUFGABEN

1. Es sind zwei Messreihen mit je 500 Messungen aufzunehmen:
Messreihe 1: Kleine Impulszahl mit Mittelwert 1-3.

Messreihe 2: Große Impulszahl mit Mittelwert größer als 60.

2. Mit Hilfe des PC-geführten χ^2 -Testes vergleiche man die Häufigkeitsverteilungen der Messreihen mit einer Poisson- und einer Gaußverteilung. Während des Programmablaufs werden Sie zur Anfertigung und Eingabe einer Klasseneinteilung aufgefordert. Dabei muss für Messreihe 2 eine Einteilung gemäß Gl. (6) vorgenommen werden .
3. Messung der Absorption von γ -Strahlung in Blei als Funktion der Schichtdicke z und grafische Darstellung von $I/I_0 = f(z)$ auf Exponentialpapier.
4. Bestimmung der Energie des γ -Strahlers.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Den Prinzipaufbau der Messanordnung zeigt Abb. 3. Wenn der gestrichelt umrandete PC am Versuchsplatz angeschlossen ist, muss der Funktionswahlschalter am Zählgerät auf REMOTE gestellt werden. Jetzt können alle Einstellungen am Zählgerät (Zählrohrspannung, Zeit- oder Impulsvorwahl, Stichprobenumfang sowie Start, Stop, Reset) mit der PC-Maus vorgenommen werden. Die hierzu angebotenen Menüs sind übersichtlich, im Bedarfsfall hilft Ihr Betreuer. Alle Messwertetabellen können ausgedruckt werden.

Das Programm wird mit C:\RAD\LABLINK.EXE aufgerufen. Das Zählgerät wird nach Aufforderung auf COM. 1 geschaltet.

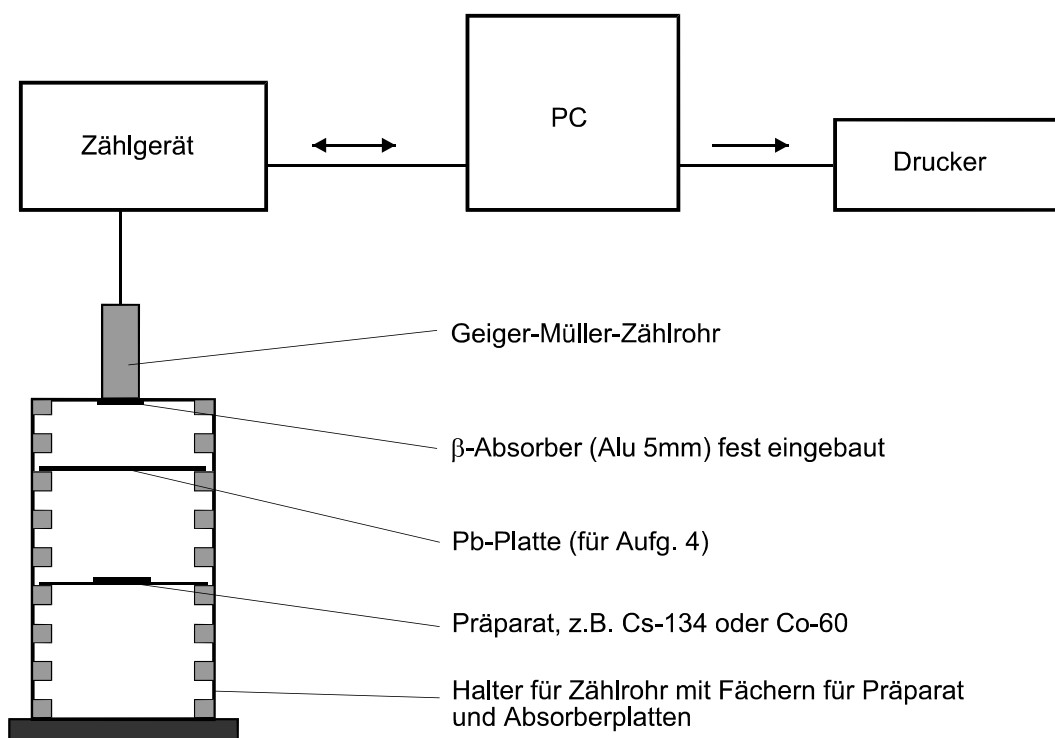


Abb. 3 PRINZIP DER MESSANORDNUNG

Bei einer Versuchsdurchführung ohne PC können alle Einstellungen am Zählgerät mit dem Funktionswahlschalter und dem UP- und DOWN-Taster vorgenommen werden. Alle Einstellungen werden auf dem Display angezeigt. Für START, STOP und RESET stehen in dem Fall gesonderte Tasten zur Verfügung.

Alle Messungen werden bei einer Zählrohrspannung von 900 V durchgeführt.

Für Aufgabe 1 werden 2 unterschiedliche Strahler benutzt. Für Messreihe 1 wird das Cs-137-Präparat in das etwa 3.Fach (ausprobieren!) von oben eingeführt und eine Messzeit von 1 s vorgewählt. Für Messreihe 2 wird das Co-60-Präparat in das 1. Fach von oben derart eingelegt, dass der Abstand zum Zählrohr möglichst klein ist, und eine Messzeit von ca. 2 s (ausprobieren!) ausgewählt. Nach Vorwahl von RUNS = 500 und Anklicken von COUNT erfolgen die Messungen einschließlich Ergebnisauflistung auf dem Bildschirm automatisch.

Am Ende jeder Messreihe müssen die Messdatenlisten für die anschließende PC-Auswertung jeweils unter einem unverwechselbaren Dateinamen abgespeichert werden: Wählen Sie zweckmäßig den Dateinamen XY.TSV. Hier ist X der Platzhalter für die ersten 5 Buchstaben Ihres Familiennamens (für Umlaute wie ä wird ae eingegeben). Y ist der Platzhalter für eine Ziffer zur Kennzeichnung der Messreihe.

Beispiel: Herr Müstermann speichert die Datenliste seiner Messreihe I unter MUEST1.TSV.

Für Aufgabe 2 steht zur Durchführung des χ^2 -Testes das Rechnerprogramm "CHI.EXE" zur Verfügung. Vom Programm werden verschiedene Eingabevarianten angeboten. Für die Auswertung nach Aufgabe 2 ist **Variante (2)** auszuwählen.

Nach dem Start von Variante (2) wird zur Eingabe des Namens der Messdatendatei aufgefordert. Danach erfolgt die automatische Datenübernahme und die Ausgabe von n , x_{\min} und x_{\max} mit der Aufforderung zur selbständigen Festlegung einer zweckmäßigen Klasseneinteilung (Gl.(6)). Nach Eingabe der Klasseneinteilung erfolgt der eigentliche χ^2 -Test.

Wichtig für die Klasseneinteilung: Es sind grundsätzlich nur halbzahlige Klassengrenzen zu wählen. Beispiel für Messreihe 1: Treten Impulszahlen zwischen $x_{\min} = 0$ und $x_{\max} = 7$ auf, dann wählt man für die erste Klasse die untere Grenze -0,5 und die obere Grenze 0,5. Für die letzte (die 8.) Klasse wählt man als untere Grenze 6,5 und als obere Grenze 7,5. Beispiel für Messreihe 2: Werden bei z.B. $x_{\min} = 54$ von Ihnen in der ersten Klasse die Impulszahlen 54 bis 56 zusammengefasst, dann wählt man als untere Grenze dieser Klasse 53,5 und als obere Grenze 56,5 usw.

Zur Übertragung ins Messprotokoll werden vom Rechner nach jedem Test angezeigt:

Mittelwert, Standardabweichung, Freiheitsgrad, die experimentellen Häufigkeiten $k(x_j)$, die theoretischen Häufigkeitswerte nP_j für die angepasste Poisson- bzw. Gaußverteilung sowie die χ^2 -Werte. Mit Hilfe der in Tabelle 1 aufgeführten Irrtumswahrscheinlichkeiten diskutiere man die Ergebnisse des χ^2 -Testes.

Die Eingabevarianten (4) und (5) sind für den Fall vorgesehen, dass keine Messdatendatei existiert. Die Variante (3) steht Ihnen fakultativ zur Selbstkontrolle nach Durchführung von Variante (2) zur Verfügung.

Zusatzangebot (Eingabevariante (1)): Unabhängig vom konkreten Versuch F7 kann zunächst das Verhalten statistischer Ensembles bei Parameterveränderungen und Wiederholungsmessungen untersucht werden. Es werden Zählraten-Stichproben nach einer Monte-Carlo-Methode ausgewürfelt. Stichprobenumfang und Mittelwert der Grundgesamtheit können in weiten Grenzen von Ihnen selbst vorgegeben werden. Im Anschluss können Sie den χ^2 -Test hierauf anwenden.

Für Aufgabe 3 werden die 5 Bleiplatten nacheinander in das 1. Fach und das Cs-137-Präparat in das 2. Fach von oben eingeführt. (Vergessen Sie nicht die I_0 -Messung ohne Bleiplatte!). Für alle Messungen wird eine Impulszahl von 1000 vorgewählt und die Messzeit registriert.

Zur Bestimmung des Nulleffekts (Impulsvorwahl 200) müssen alle Präparate genügend weit (mindestens 0,5 m) vom Zählrohr entfernt sein. Die Funktion $(x_z - x_N)/(x_0 - x_N) = f(z)$ wird grafisch auf Exponentialpapier dargestellt.

Beachten Sie, dass hier x_z, x_N und x_0 Impulsraten sind, also die vorgewählten Impulszahlen auf dieselbe Zeitbasis umzurechnen sind. Tragen Sie an allen Messpunkten einen Fehlerbalken (nur Ordinate berücksichtigen) ein.

Für Aufgabe 4 werden die grafischen Darstellungen $\mu/\rho = f(E)$ (Abb. 4) und $z_{1/2} = f(E)$ (Abb. 5) benutzt. Sie können aus Ihrer grafischen Darstellung $I/I_0 = f(z)$ (Aufg. 3) entweder μ aus dem Anstieg bestimmen und mit $\rho_{\text{Blei}} = 11,34\text{g/cm}^3$ rechnen oder $z_{1/2}$ direkt entnehmen.

FRAGEN

1. Welche Verfahren zur Prüfung statistischer Verteilungen kennen Sie?
2. Worauf schließt man, wenn man für die Anpassung einer Gaußverteilung $s = \sqrt{\bar{x}}$ findet?
3. Wie funktioniert ein Geiger-Müller-Zählrohr?

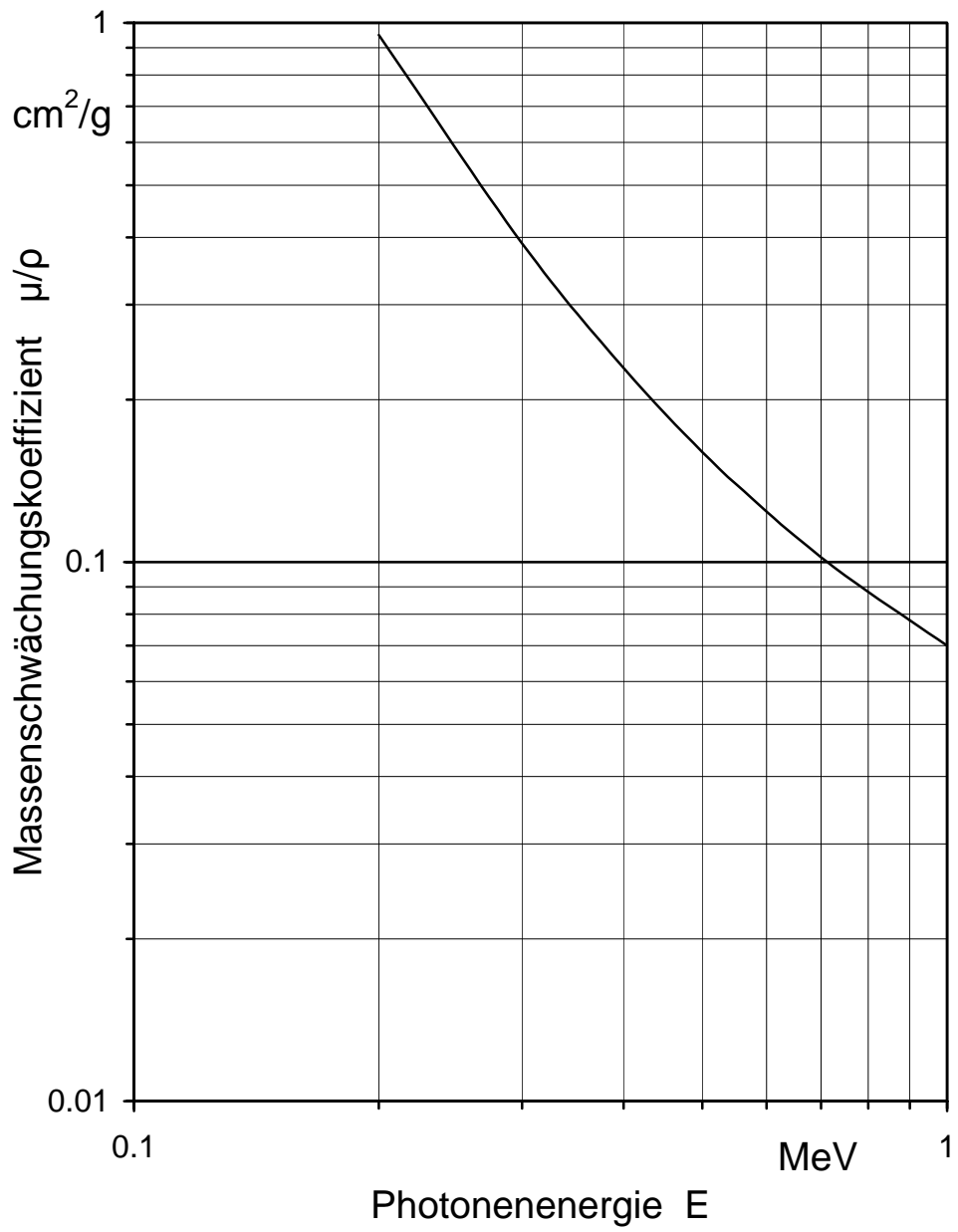


Abb. 4 MASSENSCHWÄCHUNGSKOEFFIZIENT

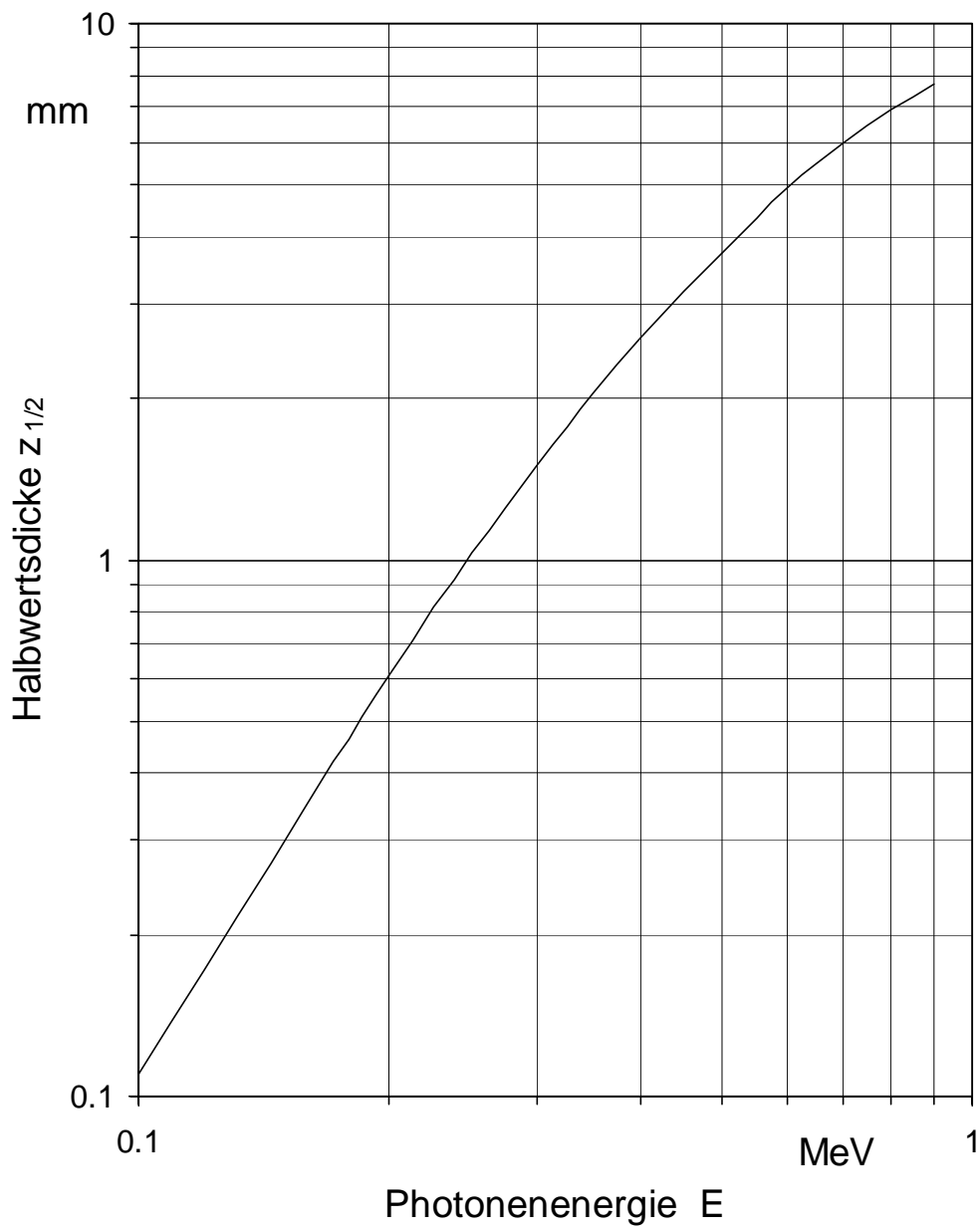


Abb. 5 HALBWERTSDICKE

M2 MESSUNG VON TRÄGHEITSMOMENTEN

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Drehmoment, Massenmittelpunkt, Trägheitsmoment, Steinerscher Satz, Dreh-schwingung.

Das Trägheitsmoment J_A eines Körpers bezüglich einer Drehachse A ist definiert als

$$J_A = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV. \quad (1)$$

Hierbei ist r der senkrechte Abstand des Massenelementes dm von der Drehachse A . Die Integration ist über das gesamte Volumen des Körpers durchzuführen unter Beachtung der Dichte ρ des Körpers. Für homogene Körper ist die Dichte konstant und kann dann vor das Integralzeichen gezogen werden.

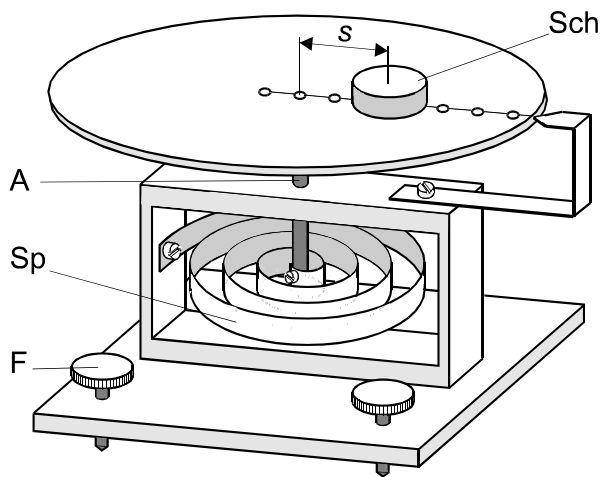


Abb. 1 DREHTISCH

Jeder Körper hat unendlich viele Trägheitsmomente, weil es inner- und außerhalb des Körpers unendlich viele Drehachsen gibt. Nach dem Steinerschen Satz ist das Trägheitsmoment J_A um eine beliebige Achse A , die im Abstand s parallel zu einer Schwerpunktsachse mit dem Trägheitsmoment J_S verläuft, durch

$$J_A = J_S + ms^2 \quad (2)$$

gegeben, wobei m die Gesamtmasse des

Körpers ist. Damit müssen nur noch die Trägheitsmomente bezüglich der Schwerpunktsachsen ermittelt werden, was für symmetrische homogene Körper rechnerisch möglich ist, weil dann das Integral des Trägheitsmomentes (Gl. (1)) meist elementar lösbar ist. Man erhält beispielsweise für das Trägheitsmoment eines Zylinders der Masse m , des Radius R und der Höhe h für die Symmetrieachse

$$J_1 = \frac{1}{2} mR^2 \quad (3)$$

und für jede dazu senkrechte Schwerpunktsachse

$$J_2 = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mh^2. \quad (4)$$

Die Bestimmung von Trägheitsmomenten kann auch experimentell erfolgen, z. B. durch Messung der Schwingungsdauer eines Drehschwingers (Abb. 1). Um eine senkrechte Achse A führt der Drehtisch mit dem Trägheitsmoment J_A infolge der elastischen Deformation einer Schneckenfeder Sp (Winkelrichtgröße D) schwach gedämpfte Schwingungen aus. Die Schwingungsdauer T des Drehschwingers ist gegeben durch

$$T = 2\pi\sqrt{J_A / D}. \quad (5)$$

Das Trägheitsmoment des Drehtisches kann durch Auflegen einer Scheibe Sch definiert verändert werden. Diese Scheibe (Masse m' , Radius R'), die in verschiedenen Abständen s von der Drehachse des Tisches aufgelegt wird, ergibt ein zusätzliches Trägheitsmoment (Gl. (2) und Gl. (3))

$$J_z = \frac{1}{2} m' R'^2 + m' s^2. \quad (6)$$

Ist J_T das Trägheitsmoment des Drehtisches, dann ist mit der Scheibe Sch das Gesamtträgheitsmoment der schwingenden Anordnung

$$J_A = J_T + J_z, \quad (7)$$

und aus Gleichung (5) erhält man

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} (J_z + J_T). \quad (8)$$

Die grafische Darstellung $T^2 = f(J_z)$ ergibt also eine Gerade mit dem Anstieg $4\pi^2 / D$, die die J_z -Achse bei $J_z = -J_T$ schneidet.

AUFGABEN

1. Messung der Schwingungsdauer des Drehtisches ohne und für 6 verschiedene Lagen der Kreisscheibe zur Drehachse.
2. Berechnung der Zusatzträgheitsmomente für die 6 verschiedenen Lagen der Kreisscheibe (Gl. (6)).
3. Grafische Darstellung der Eichkurve $T^2 = f(J_z)$.
4. Ermittlung des Trägheitsmomentes J_T des Drehtisches und Abschätzung des Größtfehlers aus der grafischen Darstellung von Aufgabe 3.
5. Experimentelle Bestimmung der Trägheitsmomente eines Zylinders bezüglich seiner Symmetrieachse und einer dazu senkrecht stehenden Schwerpunktsachse mit dem Drehtisch.
6. Berechnung der Trägheitsmomente des in Aufgabe 5 benutzten Zylinders für die gemessenen Drehachsen (Gl. (3) bzw. (4)).

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Der Drehtisch (Abb. 1) wird so justiert, dass seine Drehachse senkrecht steht. Dazu lege man die Kreisscheibe an verschiedene Stellen des Drehtischrandes und stelle die Fußschrauben F so lange nach, bis die Kreisscheibe in keiner Lage dem Tisch ein Drehmoment erteilt. Für Aufgabe 1 messe man zweimal die Zeit für 10 Schwingungen. Für Aufgabe 2 berechne man die Zusatzträgheitsmomente (Gl. (6)) und fertige für Aufgabe 3 die Eichkurve an.

Für Aufgabe 5 messe man zweimal die Zeit für 10 Schwingungen und lese aus der Eichkurve die zugehörigen Trägheitsmomente für die beiden Stellungen des Zylinders ab. Für Aufgabe 6 be-

rechne man aus der Masse m , dem Radius R und der Höhe h des Zylinders die Trägheitsmomente für die angegebenen Achsen (Gl. (3) bzw. (4)) und vergleiche diese Werte mit den experimentellen Ergebnissen aus Aufgabe 5.

FRAGEN

1. In welcher Weise verfälscht die Halterung des Zylinders in Aufgabe 5 das Messergebnis?
2. In welcher Phase der Schwingung ist der Stoppfehler zur Ermittlung der Schwingungsdauer am kleinsten?
3. Wie lautet die Bewegungsgleichung für einen Drehschwinger?

M3 ELASTIZITÄT UND TORSION

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Dehnung, Torsion, Normal- und Schubspannung, Hookesches Gesetz Elastische Konstanten, Drehmoment, Massenträgheitsmoment.

1. Elastizität und Hookesches Gesetz: Durch Einwirkung äußerer Kräfte können Festkörper Form- und/oder Volumenänderungen (Deformationen) erfahren. Verschwinden die Deformationen nach Wegfall der äußeren Kräfte, dann spricht man vom elastischen, sonst vom plastischen Verhalten des Festkörpers. Die elastischen Eigenschaften beruhen auf den atomaren Bindungskräften zwischen den Atomen (bzw. Molekülen) im Festkörper. Eine äußere Kraft erzeugt im Innern des Festkörpers einen Spannungszustand, durch den die Atome aus ihrer Ruhelage entfernt werden. Dadurch entstehen innere, atomare Kräfte, die der äußeren Kraft entgegenwirken. Nach Aufhören der äußeren Krafteinwirkung gehen bei elastischer Deformation die Atome in ihre Ruhelage zurück. Im Hookeschen Gesetz werden die Deformationen des Festkörpers näherungsweise proportional den durch die äußeren Kräfte entstehenden Spannungen im Festkörper gesetzt.

Bei sehr großen äußeren Kräften treten jedoch große Verschiebungen einzelner Atome oder ganzer Kristallite auf, so dass eine bleibende Formänderung entsteht; der Festkörper ist plastisch verformt. In diesem Bereich verliert das Hookesche Gesetz seine Gültigkeit.

Für eine elementare Beschreibung des elastischen Verhaltens eines isotropen Festkörpers verwendet man 4 Materialkonstanten, die aber nicht unabhängig voneinander sind. Es sind dies: Elastizitätsmodul E , Torsionsmodul G , Kompressionsmodul K und die Poissonsche Zahl μ .

2. Dehnung und Querkontraktion: An einem isotropen, zylindrischen Körper, z. B. einem Draht der Länge l , verursacht eine senkrecht zum Querschnitt A wirkende Kraft F eine Längenänderung Δl (Abb. 1) bzw. die relative Längenänderung $\varepsilon = \Delta l / l$. Das Verhältnis der senkrecht zur Querschnittsfläche wirkenden Kraft zur Fläche bezeichnet man als Normalspannung $\sigma = F / A$. Im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes ist

$$\varepsilon \sim \sigma \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{A}, \quad (1)$$

wobei E (SI-Einheit: $[E] = \text{N/m}^2 = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$) der Elastizitätsmodul ist.

Die Normalspannung verändert nicht nur die Länge l eines Körpers um Δl , sondern auch seine Querabmessungen, also etwa den Durchmesser d eines Drahtes um Δd . Im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes besteht der Zusammenhang

$$\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta l}{l}, \quad (2)$$

wobei μ die Poissonsche Zahl ist. Das negative Vorzeichen wird gewählt, weil die Änderung des Durchmessers Δd der Längenänderung Δl entgegengesetzt gerichtet ist und die Poissonsche

Zahl positiv definiert sein soll. Für die relative Volumenänderung eines zylindrischen Stabes erhält man also bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta l}{l} (1 - 2\mu) = \varepsilon(1 - 2\mu), \quad (3)$$

woraus sich ergibt: Erfährt der Festkörper keine Volumenänderung, d. h. verhält er sich wie eine inkompressible Flüssigkeit, so ergibt sich aus Gl. (3) $\mu = 0,5$, und wenn die Querkontraktion verschwindet, ergibt sich aus Gl. (2) $\mu = 0$. Aus diesen Grenzfällen eines elastischen Festkörpers ergibt sich für die Poissonsche Zahl die Ungleichung

$$0 < \mu < 0,5. \quad (4)$$

Steht ein Körper unter allseitigem Druck, so ruft eine Druckänderung Δp eine Volumenänderung ΔV hervor, die im Bereich des Hookeschen Gesetzes dem Volumen V proportional ist:

$$\Delta V = -\frac{1}{K} V \Delta p.$$

Die Materialgröße K heißt Kompressionsmodul.

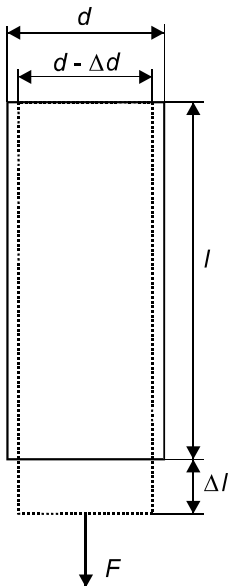


Abb.1 DEHNUNG

3. Torsion: Ist die Kraft tangential zu der Ebene gerichtet, an der sie angreift, so spricht man von Schub- oder Scherspannung. Lassen wir etwa an der Oberseite eines Würfels, dessen Grundfläche A festgehalten wird, die Kraft F tangential angreifen, so bewirkt die Schubspannung $\tau = F/A$ eine Neigung der Seitenflächen um den Winkel γ , die,

entsprechend dem Hookeschen Gesetz, im elastischen Bereich der Schubspannung proportional ist

$$\tau = G\gamma,$$

wobei G der Schub-, Scherungs- oder Torsionsmodul ist (SI-Einheit: $[G] = \text{N/m}^2 = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$). Ein zylindrischer Draht (Abb. 3), der an einem Ende fest eingespannt ist, wird durch ein am anderen Drahtende angreifendes Drehmoment M um den Winkel γ verdrillt. Da der Verdrillungswinkel jedes Drahtquerschnittes proportional dem Abstand des betreffenden Querschnittes von der Einspannstelle ist, treten im ganzen Draht Scherspannungen auf (Abb. 3). An

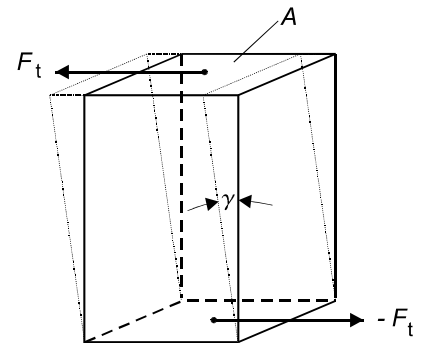


Abb. 2 SCHERUNG

einem dünnen Hohlzylinder der Länge l mit dem Radius r und der Dicke dr greift an der unteren Fläche das Drehmoment $dM = r dF$ an. Dadurch wird die Zylindermantellinie \overline{AB} in die Lage $\overline{AB'}$ verdrillt. Wegen $\tau = \frac{dF}{dA} = G\gamma$ folgt

$$dM = r \cdot G \cdot \gamma \cdot dA.$$

Für den Bogen b gelten die Beziehungen $\alpha = \frac{b}{r}$ und $\tan \gamma = \frac{b}{l} \approx \gamma$, und daraus ergibt sich

$$\gamma = \frac{r}{l} \alpha.$$

Mit diesem Zusammenhang zwischen α und γ und dem Wert der Querschnittsfläche $dA = 2\pi \cdot r \cdot dr$ erhält man für das am Hohlzylinder angreifende Drehmoment

$$dM = \frac{2\pi}{l} \cdot G \cdot \alpha \cdot r^3 dr.$$

Durch Integration über r erhält man das am Draht angreifende Gesamtdrehmoment

$$M = \int dM = \frac{2\pi}{l} G \alpha \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2l} G \alpha R^4. \quad (5)$$

Dieses Drehmoment verdrillt den Draht um den Winkel γ und steht im Gleichgewicht mit dem rücktreibenden Drehmoment $M = D\alpha$ auf Grund der Elastizität des Drahtes. Die Größe D heißt

Richtmoment und ist nach Gl. (5) durch die geometrischen Abmessungen des Drahtes bestimmt:

$$D = \frac{\pi}{2l} G R^4. \quad (6)$$

4. Bestimmung des Torsionsmoduls aus Drehschwingungen: Die Periodendauer T eines schwingungsfähigen Körpers mit dem Trägheitsmoment J und dem Richtmoment D beträgt (vgl. Versuch M2)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}. \quad (7)$$

Da das Richtmoment D eines tordierten Drahtes vom Torsionsmodul G abhängt (Gl. (6)), kann man aus Drehschwingungen den Torsionsmodul nach

$$G = \frac{8\pi l}{R^4} \cdot \frac{J}{T^2} \quad (8)$$

bestimmen. Hierzu müssen die Größen R , T , l und das Trägheitsmoment J der schwingungsfähigen Anordnung bekannt sein.

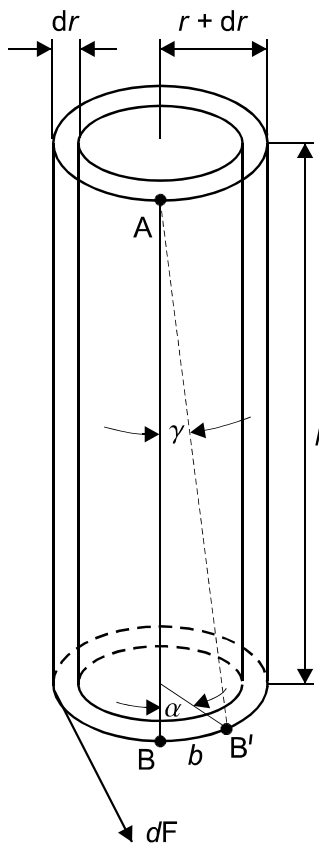


Abb.3 TORSION EINES DRAHTES

Die Bestimmung des Trägheitsmomentes J_V der schwingenden Versuchsanordnung (Draht, Einrichtung zur Aufnahme der Massenstücke usw.) kann durch definierte Veränderung des Trägheitsmoments umgangen werden. Zunächst bestimmt man die

Periodendauer T_V der Drehschwingung der Versuchsanordnung aus ca. 30 Schwingungen bei Belastung mit 50 g. Dann verändert man das Trägheitsmoment J_V der Versuchsanordnung definiert durch Anschrauben einer Scheibe mit dem Zusatzträgheitsmoment J_S und bestimmt jetzt die Periodendauer T_S aus 10 Schwingungen, für die sich entsprechend Gl. (7) ergibt:

$$T_S = 2\pi \sqrt{\frac{J_V + J_S}{D}}. \quad (9)$$

Eliminiert man das Trägheitsmoment J_V (Gl. (7) und (9)) und setzt für die zylindrische Scheibe das Trägheitsmoment $J_S = mr^2 / 2$ (m Masse und r Radius der Scheibe) ein, ergibt sich für den Torsionsmodul die Beziehung:

$$G = \frac{8\pi l}{R^4} \cdot \frac{J_S}{T_S^2 - T_V^2} = \frac{4\pi l}{R^4} \cdot \frac{mr^2}{T_S^2 - T_V^2}. \quad (10)$$

AUFGABEN

1. Messung der Längenänderung Δl eines Messingdrahtes als Funktion der Belastung.
2. Grafische Darstellung $\Delta l = f(m)$ und Berechnung des Elastizitätsmoduls E von Messing aus dem Anstieg (Gl. (11)).
3. Messung der Periodendauern T_V und T_S und Berechnung des Schubmoduls (Gl. (10)).

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Am unteren Ende eines oben befestigten langen Drahtes D ist ein Stab angeschraubt, auf den man Massenstücke mit der Masse m von 50 und 100 g aufstecken kann (Abb. 4). Am oberen Ende des Stabes liegt der Balken L auf der Schneide A auf. Durch Anhängen der Massenstücke

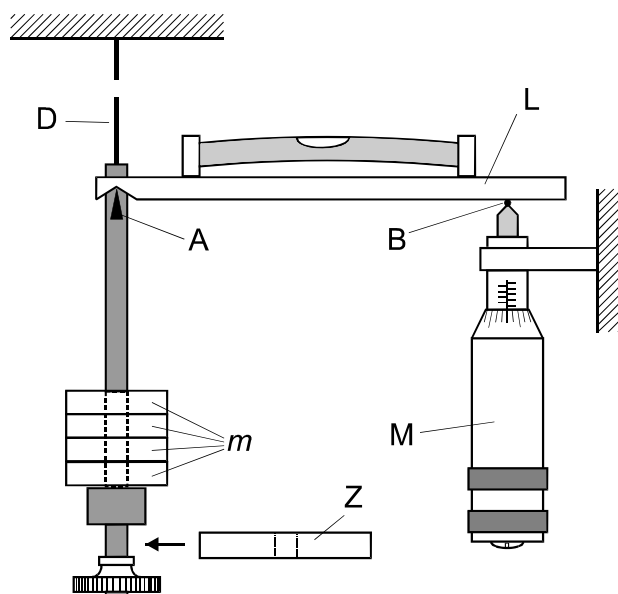


Abb. 4 VERSUCHSANORDNUNG

wirkt die Kraft $F_G = mg$, und der Draht dehnt sich. Die Schneide A senkt sich, und der ursprünglich waagrecht gestellte Balken L (Kontrolle mittels der eingekitteten Libelle) dreht sich um die Achse B . Durch die Messschraube M kann der Balken L wieder horizontal gestellt werden. Die Dehnung Δl des Drahtes wird aus der Differenz der Skalenteile der Messschraube vor und nach der Horizontalstellung des Balkens ermittelt. Der Durchmesser des Drahtes wird an einem am Versuchsplatz liegenden Draht gleichen Durchmessers durch mehrfache Messung mit einer Messschraube bestimmt.

Für Aufgabe 1 wird der Draht mit Massenstücken von 50 bis 800 g belastet und anschließend schrittweise entlastet. An der Masse m greift die Gewichtskraft an, so dass aus Gl. (1)

$$\Delta l = \frac{1}{E} \frac{l}{A} gm \quad (11)$$

folgt. Für Aufgabe 2 fertige man eine grafische Darstellung $\Delta l = f(m)$ an und ermittle aus dem Anstieg den Elastizitätsmodul E und seine Messunsicherheit.

Für Aufgabe 3 bestimmt man die Periodendauer T_V der Drehschwingung der Anordnung aus ca. 30 Schwingungen bei Belastung mit 50 g. Dann verändert man das Trägheitsmoment der Anordnung durch Anschrauben des scheibenförmigen Zylinders Z mit dem Trägheitsmoment J_S und bestimmt erneut die Schwingungsdauer T_S aus 10 Schwingungen. Den Mittelwert aus jeweils 6 Messungen von T_V und T_S verwendet man dann zusammen mit den Daten des scheibenförmigen Zylinders und des Drahtes zur Berechnung des Schubmoduls G (Gl. (10)).

FRAGEN

1. Erläutern Sie den Unterschied zwischen elastischer und plastischer Verformung!
2. Wie viel unabhängige elastische Konstanten benötigt man zur Beschreibung des elastischen Verhaltens isotroper Körper?
3. Zwischen den elastischen Konstanten (vgl. Abschn. 1) bestehen die Beziehungen
$$E = 2 G (1 + \mu) \quad \text{und} \quad E = 3 K (1 - 2 \mu).$$
Wie erklären Sie sich diese Zusammenhänge?
4. Welche Teile der experimentellen Anordnung „Draht-Haltevorrichtung - zusätzlich befestigter Zylinder“ tragen in der Gl. (9) zur Winkelrichtgröße D und welche zum Trägheitsmoment $J_S + J_V$ bei und warum?

M5 OBERFLÄCHENSPANNUNG

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Kohäsion, Adhäsion, Kohäsionsdruck, Oberflächenenergie, Oberflächenspannung, Kapillarität.

Zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit wirken anziehende Kräfte, die einen Wirkungsradius von größenordnungsmäßig 10^{-8} m haben. Im Innern der Flüssigkeit ist jedes Molekül allseitig von Nachbarmolekülen umgeben, so dass sich die Kräfte im zeitlichen Mittel aufheben. An der Oberfläche jedoch fehlt eine nach außen gerichtete Anziehungskraft, bzw. sie ist, bedingt durch die Moleküle des angrenzenden Gases, wesentlich schwächer. An den Molekülen in der Oberfläche einer Flüssigkeit (Dicke $\approx 10^{-8}$ m) greift eine senkrecht ins Innere der Flüssigkeit gerichtete resultierende Kraft an. Der Quotient aus dieser Kraft pro Fläche wird Binnen- oder Kohäsionsdruck genannt. Gegen diesen Kohäsionsdruck muss Arbeit verrichtet werden, um Moleküle aus dem Innern an die Oberfläche zu bringen. Die Moleküle an der Flüssigkeitsoberfläche haben daher eine höhere potentielle Energie (Oberflächenenergie). Die Zunahme der Oberflächenenergie ΔW ist der Oberflächenvergrößerung ΔA proportional:

$$\Delta W = \sigma \Delta A, \quad (1)$$

wobei die Materialkonstante σ spezifische Oberflächenenergie heißt.

Das stabile Gleichgewicht entspricht einem Minimum der potentiellen Energie, deshalb versucht eine Flüssigkeit ihre Oberfläche auf ein Minimum zusammenzuziehen. Dieses Verhalten der Flüssigkeit kann man durch eine tangential zur Oberfläche gerichtete Kraft F_t deuten, die an einer in der Oberfläche liegenden Linie senkrecht zu dieser Linie angreift. Verschiebt man diese Linie der Länge l um eine zu ihr senkrechte Strecke Δs , dann vergrößert man die Oberfläche um $\Delta A = l \Delta s$, und es wird die Arbeit $\Delta W = F_t \Delta s$ verrichtet. Damit ergibt sich aus (Gl. (1))

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F_t \Delta s}{l \Delta s} = \frac{F_t}{l}. \quad (2)$$

Die spezifische Oberflächenenergie σ ist gleich dem auf die Länge der Linie bezogenen Betrag der Oberflächenkraft. Deshalb wird sie auch als Oberflächenspannung bezeichnet. Spezifische Oberflächenenergie und Oberflächenspannung sind physikalisch identische Größen (SI-Einheit: $1 \text{ J/m}^2 = 1 \text{ N/m}$).

Zur Messung der Oberflächenspannung werden hier zwei Methoden behandelt.

1. Bügelmethode:

Die Messanordnung besteht aus einer mechanischen Kompensationseinrichtung. In die Messflüssigkeit im Glasschälchen Sch (Abb. 1) taucht ein Drahtbügel mit dem Messdraht D der Länge l ein. Der Drahtbügel hängt an dem Balken B einer Waage. Wird das Glasschälchen abgesenkt, so bleibt eine Flüssigkeitslamelle L an dem Messdraht hängen, die versucht, den Drahtbügel nach unten zu ziehen, um die Oberfläche zu verkleinern. Diese in die Flüssigkeit gerichtete Kraft wird

durch die Kraft der Feder F_e kompensiert, die durch Drehen an der Messschraube M so variiert werden kann, dass der mit Kerben versehene Waagebalken B stets in der Nullstellung verbleibt.

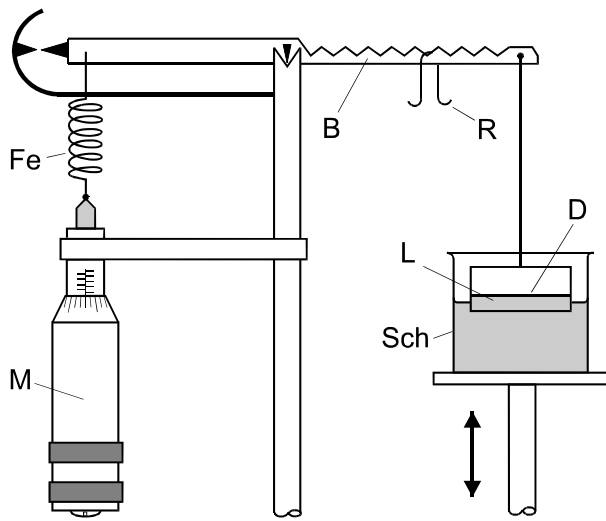


Abb. 1 BÜGELMETHODE

Vergrößert man die aus der Flüssigkeit herausgezogene Lamelle, wird sie bei irgendeiner Stellung der Mikrometerschraube abreißen. Dieser Oberflächenvergrößerung auf der Vorder- und Rückseite der Lamelle entspricht der Maximalwert der Kraft

$$F = 2 l \sigma. \quad (3)$$

2. Kapillarsteighöhenmethode:

Taucht man eine Kapillare mit dem Radius r in eine benetzende Flüssigkeit, so steigt in der Kapillare die Flüssigkeit um die Höhe h an (Abb. 2). Nimmt man vollständige Benetzung an (sie ist stark von der

Reinheit von Kapillare und Flüssigkeit abhängig), so ist die durch die Oberflächenspannung bedingte nach oben gerichtete Kraft

$$F_\sigma = l\sigma = 2\pi r\sigma, \quad (4)$$

da man als wirksame Linie in diesem Fall den inneren Umfang der kreisförmig angenommenen Kapillare $l = 2\pi r$ ansehen kann. Im Gleichgewicht ist F_σ betragsmäßig gleich dem Gewicht der Flüssigkeitssäule

$$F_G = m_{Fl}g = \rho Vg = \rho\pi r^2 hg. \quad (5)$$

Aus $\vec{F}_\sigma + \vec{F}_G = 0$ erhält man für die Steighöhe

$$h = \frac{2\sigma}{\rho r g}. \quad (6)$$

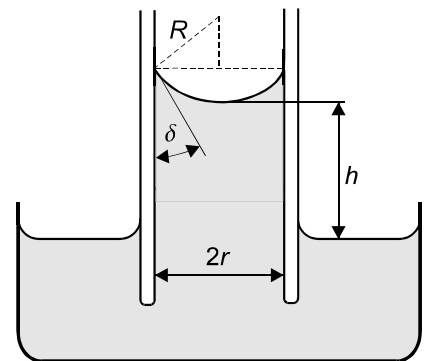


Abb. 2 KAPILLARSTEIGHÖHE

AUFGABEN

1. Aufnahme der Eichkurve einer Waage. Grafische Darstellung: Auslenkung als Funktion der Belastung.
2. Messung der Oberflächenspannung von Wasser bei Zimmertemperatur und nahe 0°C nach der Bügelmethode.
3. Messung der Oberflächenspannung von Wasser bei Zimmertemperatur nach der Kapillarsteighöhenmethode für 4 verschiedene Kapillardurchmesser.
4. Vergleich der Ergebnisse beider Methoden.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Für Aufgabe 1 wird die nur mit dem Messbügel belastete Waage mit Hilfe der Messschraube abgeglichen. Die Stellung a_0 der Messschraube wird als Bezugspunkt für die weiteren Messungen notiert. Anschließend wird ein Reiter mit der Masse m nacheinander in die Kerben $i = 1$ bis 9 (und zurück) des Waagebalkens gesetzt und jeweils nach erneutem Abgleich die Stellung a_i der Messschraube notiert. Beispiel: Liegt der Reiter in der 6. Kerbe, dann beträgt die Kraft: $F_6 = 0,6 \cdot m \cdot g$ und der Ausschlag ist: $a'_6 = a_6 - a_0$. Zur Dämpfung störender Schwingungen des Waagebalkens kann die Aufnahme der Eichkurve $a'_i = f(F_i)$ mit dem in die Messflüssigkeit eingetauchten Messbügel (s. Aufgabe 2) ausgeführt werden.

Für Aufgabe 2 wird der Messdraht völlig in die Messflüssigkeit eingetaucht, die Waage abgeglichen und der Bezugspunkt a_0 für die Kraftmessung an der Messschraube M erneut abgelesen. Anschließend wird gleichsinnig die Schale mit der Messflüssigkeit abgesenkt und die Messschraube so verstellt, dass die Waage so gut wie möglich im abgeglichenen Zustand verbleibt. Diese Einstellung erfordert Sorgfalt und sollte langsam erfolgen. Die beim Abreißen der Lamelle erreichte Stellung a_i der Messschraube wird notiert. Diesen Messprozess - Ermittlung der Nullstellung a_0 , Absenken, Abreißen und Ablesen der Stellung a_i - wiederhole man mindestens sechsmal (n). Der Mittelwert der Differenzen $\bar{a}' = \frac{1}{n} \sum_i (a_i - a_0)$ ergibt dann mit Hilfe der

Eichkurve (Aufgabe 1) die gesuchte Kraft F , um die Oberflächenspannung zu berechnen (Gl. (3)).

Wasser von etwa 0°C erhält man durch Abkühlen des Gefäßes mit destilliertem Wasser im Kältebad, welches unter Verwendung von Schabeeis und Kochsalz angesetzt wird.

Für Aufgabe 3 werden die Kapillaren in die Messflüssigkeit getaucht und die Steighöhe wird an einer Skale abgelesen. Der Nullpunkt der Steighöhenskale kann mit möglichst kleinem Fehler eingestellt werden, wenn man die Metallspitze am unteren Ende der Skale und ihr Spiegelbild an der Wasseroberfläche nutzt. Der Beobachter betrachtet die Oberfläche der Messflüssigkeit schräg von unten und stellt die Höhe der Schale mit der Flüssigkeit so ein, dass sich die Metallspitze gerade mit ihrem Spiegelbild an der „Unterseite“ der Flüssigkeitsoberfläche berührt. Um den Reinheitsgrad der Kapillare zu überprüfen, erzeugt man mit Hilfe eines Gummischlauches am oberen Ende Druckveränderungen in der Kapillare, so dass die Flüssigkeit in der Kapillare schwingt. Im Gleichgewicht muss sich bei ausreichender Reinheit immer die gleiche Höhe einstellen. Auf diese Weise wird die Steighöhe für jede Kapillare sechsmal bestimmt.

Der Durchmesser der Kapillare wird mit einem Mikroskop gemessen. Um Abweichungen vom kreisförmigen Querschnitt berücksichtigen zu können, wird durch Drehen des Okulars der Durchmesser an verschiedenen Stellen gemessen und der Mittelwert berechnet. Aus dem Anstieg

der grafischen Darstellung $h = f(1/r)$ bestimme man die Oberflächenspannung (vgl. Gl. (6)). Aus dem Fehler des Anstiegs und der Dichte ermittle man den Größtfehler von σ .

FRAGEN

1. In welcher Weise ist die Oberflächenspannung von der Temperatur abhängig?
2. Warum nehmen Flüssigkeitstropfen oder Gasbläschen Kugelgestalt an?
3. Wie ändert sich die Steighöhe, wenn eine Kapillare in eine nichtbenetzende Flüssigkeit eintaucht?

M6 INNERE REIBUNG

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: *Innere Reibung, laminare und turbulente Strömung, Viskosität, Stokessches Gesetz, ähnliche Strömungen, Reynolds- Zahl* (Stroppe, S. 116-120).

Bei Strömungen von Flüssigkeiten und Gasen treten infolge von Wechselwirkungen der Moleküle im Innern Reibungskräfte auf. Wird ein fester Körper in einer zähen Flüssigkeit mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, so ist trotz der gleichförmigen Bewegung eine Kraft erforderlich,

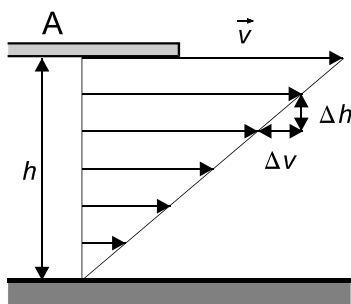


Abb. 1 INNERE REIBUNG

weil die in der Flüssigkeit auftretende Reibungskraft F_R überwunden werden muss. Die Kraft F_R lässt sich durch folgende Modellvorstellung deuten:

Man nimmt eine laminare Strömung an, d. h. in der Flüssigkeit gleiten Schichten (Lamellen) mit verschiedenen Geschwindigkeiten aneinander vorbei, ohne sich zu vermischen. Bewegt man eine ebene Platte der Fläche A im Abstand h an einer ruhenden Wand mit der konstanten Geschwindigkeit v tangential vorbei (Abb. 1), so nimmt die bewegte Platte die an ihr haftende Flüssigkeitsschicht mit, die nun ihrerseits die benachbarte Flüssigkeitsschicht zu einer gleichgerichteten Bewegung mit einer um Δv kleineren Geschwindigkeit veranlasst usw. Die an der ruhenden Wand haftende Flüssigkeitsschicht befindet sich in Ruhe. Auf diese Weise entsteht in der Flüssigkeit ein Geschwindigkeitsgefälle $\Delta v/\Delta h$, das nicht linear sein muss und deshalb allgemeiner mit dem Differentialquotienten dv/dh beschrieben wird. Die Reibungskraft F_R ist proportional zum Geschwindigkeitsgefälle dv/dh und zur Fläche A

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dh}. \quad (1)$$

Die durch diese Gleichung definierte Stoffkonstante η wird dynamische Viskosität genannt (SI-Einheit: 1 Pa·s). Der Quotient aus dynamischer Viskosität und Dichte ρ

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (2)$$

heißt kinematische Viskosität (SI-Einheit: 1 m²/s). Für den Spezialfall, dass eine Kugel vom Radius r_K von einer Flüssigkeit umströmt wird oder gleichbedeutend, dass sich die Kugel mit der Geschwindigkeit v in einer ruhenden Flüssigkeit bewegt, gilt für die Reibungskraft das Stokessche Gesetz

$$F_R = 6 \pi \eta r_K v. \quad (3)$$

Die dynamische Viskosität ist stark temperaturabhängig, es gilt der Zusammenhang

$$\eta = \eta_0 \exp\left(\frac{a}{T}\right) \quad (4)$$

mit η_0 und a als Konstanten und T der absoluten Temperatur.

Bei unterschiedlich geformten Körpern und Flüssigkeiten hängt die Art der Strömung von der Strömungsgeschwindigkeit, den geometrischen Abmessungen des Körpers, der Viskosität und der Dichte der Flüssigkeit ab, sie wird charakterisiert durch eine dimensionslose Zahl, die Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{v l \rho_{Fl}}{\eta} \quad (5)$$

Darin ist l eine für die Geometrie des Körpers charakteristische Länge, z. B. ist bei einer Kugel für l der Radius r_K einzusetzen. Bei hinreichend kleiner Reynolds-Zahl ergibt sich eine laminare Strömung, beim Überschreiten einer kritischen Reynolds-Zahl eine mit Wirbelbildung verbundene turbulente Strömung. Geometrisch ähnliche Körper erzeugen hydrodynamisch ähnliche Strömungen, wenn ihre Reynolds-Zahlen gleich sind. Das Stokessche Gesetz hat nur Gültigkeit, wenn $Re \ll 1$ ist, es ist die Grundlage der folgenden Messmethode für die dynamische Viskosität.

Kugelfallmethode: Fällt eine Kugel (Dichte ρ_K) in einem mit einer zähen Flüssigkeit (Dichte ρ_{Fl}) gefüllten Standzylinder, dessen Radius r_Z sehr groß gegen den Kugelradius r_K ist, so wirken auf die fallende Kugel folgende Kräfte:

Schwerkraft:
$$\vec{F}_G = \frac{4}{3} \pi r_K^3 \vec{g} \rho_K, \quad (6)$$

Auftriebskraft:
$$\vec{F}_A = -\frac{4}{3} \pi r_K^3 \vec{g} \rho_{Fl}, \quad (7)$$

Reibungskraft nach Stokes:
$$\vec{F}_R = -6\pi\eta \cdot r_K \vec{v}. \quad (8)$$

Die Auftriebs- und die Reibungskraft wirken der Schwerkraft entgegen. Letztere beschleunigt die Kugel solange bis

$$\vec{F}_G + \vec{F}_A + \vec{F}_R = 0, \quad (9)$$

dann bewegt sich die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit („kräftefreie Bewegung“). Nach Einsetzen der einzelnen Kräfte in Gleichung (9) erhält man für die dynamische Viskosität

$$\eta = \frac{2}{9} r_K^2 \cdot g \frac{\rho_K - \rho_{Fl}}{v}. \quad (10)$$

Berücksichtigt man den endlichen Zylinderradius r_Z , so gilt nach Ladenburg für die Reibungskraft die korrigierte Formel

$$F_R = 6\pi\eta r_K \cdot v \left(1 + 2.1 \frac{r_K}{r_Z} \right) \quad (11)$$

und damit

$$\eta_{Korr} = \frac{2}{9} r_K^2 g \frac{\rho_K - \rho_{Fl}}{v \left(1 + 2.1 r_K / r_Z \right)}. \quad (12)$$

AUFGABEN

1. Messung der Sinkgeschwindigkeiten von vier Kugeln mit verschiedenen Radien und Berechnung der dynamischen Viskosität von Rizinusöl (Gl. (10)).

2. Berechnung der korrigierten dynamischen Viskosität für die vier Kugeln (Gl. 12) und Mittelung über diese Werte.
3. Berechnung der kinematischen Viskosität (Gl. (2)).
4. Überprüfen, ob die Bedingung $Re \ll 1$ für die vier Kugeln erfüllt ist.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Zur Bestimmung der Sinkgeschwindigkeit der Kugeln ist der mit Rizinusöl gefüllte Standzylinder in Abständen von je 10 cm mit Ringmarken versehen. Es ist festzustellen, von welcher Ringmarke an die Bewegung der Kugel mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt. Für diesen Test wähle man zweckmäßigerweise die größte Kugel.

Für Aufgabe 1 ist für die vier Kugelsorten im Bereich dieser Ringmarken die Sinkgeschwindigkeit jeweils für 10 Kugeln mit gleichem Radius zu messen. Man achte darauf, dass sich die Kugeln möglichst in der Achse des Fallrohres bewegen. Die Dichte des Öls wird mit dem Aräometer bestimmt. Die Temperatur wird während der Versuchsreihe kontrolliert und notiert. Die mit diesen Messwerten bestimmten dynamischen Viskositäten (Gl. (10)) zeigen noch systematische Abweichungen aufgrund des endlichen Zylinderdurchmessers. Deshalb bestimme man für Aufgabe 2 die dynamischen Viskositäten unter Beachtung der Ladenburg-Korrektur (Gl. (12)) und bestimme den Mittelwert. Die Messunsicherheit für die dynamische Viskosität (Gl. (10)) ermittle man durch Größtfehlerabschätzung unter Verwendung der Messunsicherheiten für die Zeitmessung, die Dichte des Öls und den Radius der Kugeln.

FRAGEN

1. In welcher Weise wirkt sich eine Temperaturerhöhung des Ölbad auf die Größe der Viskosität aus?
2. Worin besteht der Unterschied zwischen laminarer und turbulenter Strömung?
3. Unter welcher Bedingung erzeugen geometrisch ähnliche Körper hydrodynamisch ähnliche Strömungen?

M10 GYROSKOP

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Drehimpulserhaltungssatz, Kreisel, Figuren-, Drehimpuls- und momentane Drehachse, Präzession und Nutation

1. Begriff des Kreisels: Ein Kreisel ist ein rotierender starrer Körper, der in einem Punkt festgehalten ist oder, allgemeiner, dessen Bewegung um einen Punkt getrennt von der Bewegung dieses Punktes behandelt werden kann. Kreisel treten in der Technik als rotierende Maschinenbauteile vielfältig auf. In der Natur können z.B. Moleküle oder rotierende Himmelskörper als Kreisel behandelt werden.

Grundlage für die Kreiselmovement ist die Grundgleichung der Rotationsbewegung:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (1)$$

wonach sich der Drehimpuls \vec{L} nur verändert, wenn ein äußeres Drehmoment \vec{M} auf den Körper einwirkt. Die eigentümlichen und im allgemeinen Fall nicht einfach zu überschauenden Bewegungsabläufe von Kreiseln sind auf diese Grundgleichung zurückzuführen.

Zur Vereinfachung der Darstellung beschränken wir uns bei den folgenden Ausführungen auf symmetrische Kreisel, bei denen zwei der drei Hauptträgheitsmomente (siehe Versuch M2) gleich sind: Bezogen auf das körperfeste Koordinatensystem der Hauptträgheitsachsen sei $J_x \neq J_y = J_z$. In diesem Fall ist die x-Achse die sog. Figurenachse des Kreisels.

2. Nutation des kräftefreien Kreisels: Ein Kreisel heißt kräftefrei, wenn auf ihn kein äußeres Drehmoment wirkt. In diesem Fall folgt aus der Grundgleichung der Rotationsbewegung (Gl. (1)) der Drehimpulserhaltungssatz

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{const.}, \quad (2)$$

d.h. der Drehimpulsvektor \vec{L} ist nach Betrag und Richtung zeitlich konstant. Die einfachste Bewegung ist eine Rotation um die Figurenachse. Hier ist $\vec{L} = J_x \vec{\omega}$, und $\vec{\omega}$ ist, wie auch \vec{L} , raum-

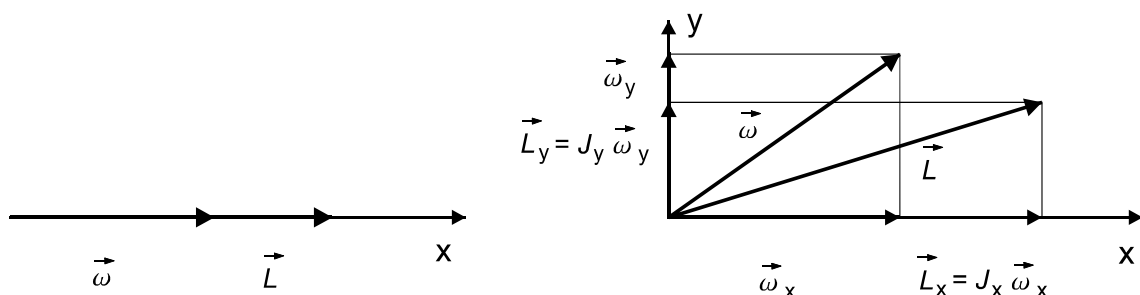


Abb.1 a) ROTATION UM DIE FIGURENACHSE b) ALLGEMEINER FALL DER ROTATION

fest und fällt mit der Richtung von \vec{L} und der ebenfalls raumfesten Figurenachse (hier die x-Achse) zusammen (Abb.1a). Wird der Kreisel - z.B. durch einen kurzen seitlichen Schlag - in dieser Bewegungsform gestört oder rotiert er von vornherein nicht um die Figurenachse, so tritt die sog. Nutationsbewegung auf. Hierbei sind \vec{L} und $\vec{\omega}$ nicht mehr parallel, da

$$\vec{L} = J_x \vec{\omega}_x + J_y \vec{\omega}_y + J_z \vec{\omega}_z. \quad (3)$$

Dies wird in Abb.1b für einen bestimmten Zeitpunkt der Bewegung ($\vec{\omega}_z = 0$) gezeigt. Jetzt ist $\vec{\omega}$ nicht mehr raumfest. Das Gleiche gilt auch für die Figurenachse, die dann weder parallel zu \vec{L} noch zu $\vec{\omega}$ ist. Da $\vec{\omega}$ auch nicht körperfest ist, wird die Drehachse *momentane Drehachse* genannt; sie verändert ständig ihre Lage im Körper. Momentane Drehachse und Figurenachse

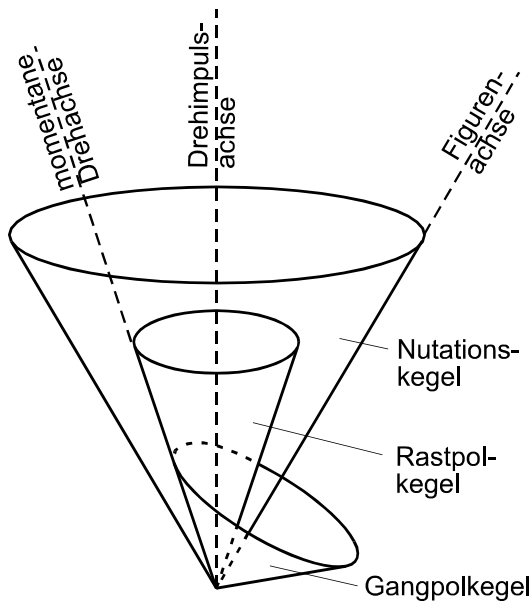


Abb.2 KRÄFTEFREIER KREISEL

rotieren mit der Nutationswinkelgeschwindigkeit ω_N um die raumfeste Drehimpulsachse und beschreiben dabei Kreisegel (Abb.2), die symmetrisch zur Drehimpulsachse liegen. Die Bewegung kann man sich veranschaulichen durch das Abrollen des sog. Gangpolkegels, dessen Symmetrieachse die Figurenachse ist, am sog. Rastpolkegel, der die Drehimpulsachse zur Symmetrieachse hat. Die Berührungslinie zwischen beiden Kegeln ergibt die Lage der momentanen Drehachse. Wie man aus dieser Darstellung sieht, liegen die drei Achsen stets in einer (sich mit der Nutationswinkelgeschwindigkeit ω_N im Raum drehenden) Ebene. Abb.2 beschreibt die Verhältnisse für einen abgeplatteten Kreisel ($J_x > J_y = J_z$). Im Fall

des verlängerten Kreisels gilt $J_x < J_y = J_z$, dann rollt der Gangpolkegel mit seiner Außenseite am Rastpolkegel ab. Wie man sich leicht klar machen kann, liegt dann die momentane Drehachse zwischen Drehimpuls- und Figurenachse.

Die Nutationswinkelgeschwindigkeit ω_N erhält man durch folgende Überlegung: Aus Gl. (3) folgt mit $J_y = J_z = J_s$ sowie $\vec{\omega} = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y + \vec{\omega}_z$ und Auflösung nach $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{L}}{J_s} + \left(1 - \frac{J_x}{J_s}\right) \cdot \vec{\omega}_x. \quad (4)$$

Dieser Ausdruck stellt eine Komponentenzzerlegung von $\vec{\omega}$ in Richtung \vec{L} und in x-Richtung dar. Die erste Komponente ist die Nutationswinkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega}_N = \frac{\vec{L}}{J_s}. \quad (5)$$

3. Präzession des Kreisels unter Einwirkung äußerer Drehmomente: Wirkt auf einen Kreisel ein äußeres Drehmoment \vec{M} , so ändert sich sein Drehimpuls nach Gl. (1):

$$d\vec{L} = \vec{M}dt. \quad (6)$$

Zerlegt man $d\vec{L}$ in die beiden Komponenten $d\vec{L}_{\parallel}$ und $d\vec{L}_{\perp}$ (Abb.3), dann liegt die Komponente

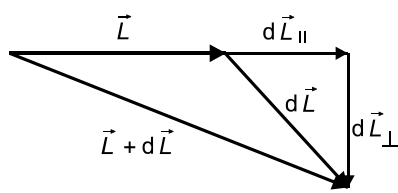


Abb.3 DREHIMPULSZERLEGUNG

$d\vec{L}_{\parallel}$ parallel zum Drehimpulsvektor \vec{L} und vergrößert dadurch die Winkelgeschwindigkeit. Beispielsweise erhöht sich die Drehzahl eines Elektromotors, wenn durch die Erhöhung der Spannung die am Anker (Kreisel) angreifenden magnetischen Drehmomente wachsen. Die Komponente $d\vec{L}_{\perp}$ steht senkrecht auf dem Drehimpulsvektor

\vec{L} und bewirkt, dass sich die Richtung von \vec{L} ändert - der Kreisel *präzediert*. Diese Bewegung lässt sich anschaulich mit dem sog. Gyroskop zeigen. Das Gyroskop (Abb.4) ist vom Prinzip her ein kardanischer Kreisel, auf den man ein zusätzliches äußeres Drehmoment, das eine Präzessionsbewegung des Kreisels hervorruft, wirken lassen kann.

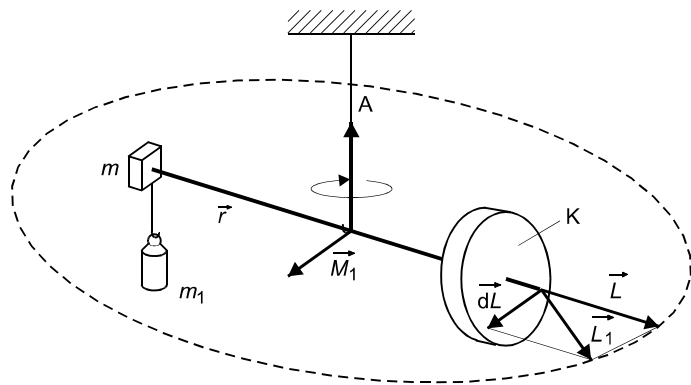


Abb. 4 GYROSKOP (PRINZIP)

Betrachten wir zunächst die Bewegung bei fehlendem äußerem Drehmoment. Dies wäre in Abb. 4 der Fall, wenn sich die entgegengesetzten Drehmomente der Kreiselscheibe und der Ausgleichsmasse m kompensieren (für $m_1 = 0 \Rightarrow \vec{M}_1 = 0$). In diesem Fall ist die Schwerkraft vollständig kompensiert und die als Waage aufgebaute Anordnung im Gleichgewicht. Der Kreisel soll mit dem Drehimpuls

\vec{L} um die Figurenachse rotieren. Nach dem Drehimpulserhaltungssatz sind \vec{L} und damit auch die Figurenachse raumfest. Erzeugt man durch eine Zusatzmasse m_1 ein zusätzliches Drehmoment $\vec{M}_1 = \vec{r} \times (m_1 \vec{g})$, das auf Grund der Anordnung senkrecht auf dem Drehimpulsvektor \vec{L} steht, so muss dieser seine Richtung

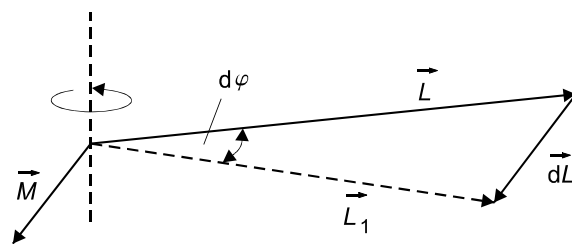


Abb. 5 PRÄZSSION

fortlaufend ändern und die ganze Anordnung dreht sich mit der Präzessionswinkelgeschwindigkeit ω_P um die Achse A. Für die zeitliche Änderung $d\varphi$ ergibt sich nach Abb. 5 mit Gl. (6) $d\varphi = dL / L = M \cdot dt / L$, woraus folgt:

$$\omega_P = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L}. \quad (7)$$

4. Bestimmung der Hauptträgheitsmomente: Aus Messungen der Nutationsperiode T_N und der Präzessionsperiode T_P können die Hauptträgheitsmomente J_x und J_s des Kreisels wie folgt bestimmt werden: Aus Gl. (7) folgt mit $L = \omega_x J_x$ und $\omega_x = 2\pi \cdot n$ (n - Kreiseldrehzahl) für die Periodendauer der Präzession

$$T_P = \frac{4\pi^2 J_x n}{M}, \quad (8)$$

woraus J_x berechnet werden kann.

Auf die Bestimmung von J_s führt folgende Überlegung: Durch einen seitlichen Stoß auf die Kreiselachse zur Einleitung der Nutation wird der Drehimpuls (besonders in seiner Richtung) etwas verändert. Es gilt Gl. (3), die, multipliziert mit dem Einheitsvektor in x-Richtung (Figurenachse!), $L \cos \delta = J_x \omega_x$ ergibt. Dabei ist δ der halbe Öffnungswinkel des Nutationskegels. Mit der Näherung $\cos \delta \approx 1$ für kleine Öffnungswinkel folgt aus Gl. (5)

$$T_N = \frac{J_s}{J_x} \cdot \frac{1}{n}, \quad (9)$$

die Periodendauer der Nutationsbewegung, woraus J_s berechnet werden kann.

AUFGABEN

1. Messung der Periodendauer T_P der Präzession für 10 verschiedene Drehmomente bei einer Kreiseldrehzahl $n = 12 \text{ s}^{-1}$, graphische Darstellung $T_P = f(1/M)$ (Gl. (8)) und Bestimmung des Trägheitsmomentes J_x .
2. Messung der Periodendauer T_P der Präzession für 10 verschiedene Kreiseldrehzahlen im Bereich zwischen $n = 7 \text{ s}^{-1}$ und $n = 16 \text{ s}^{-1}$ bei festem Drehmoment (mit Massenstück $m = 200 \text{ g}$), graphische Darstellung $T_P = f(n)$ (Gl. (8)) und Bestimmung des Trägheitsmomentes J_x .
3. Messung der Periodendauer T_N der Nutation am präzessionsfreien Kreisel für 10 verschiedene Kreiseldrehzahlen im Bereich von $n = 4 \text{ s}^{-1}$ bis $n = 12 \text{ s}^{-1}$, graphische Darstellung $T_N = f(1/n)$ (Gl. (9)) und Bestimmung des Trägheitsmomentes J_s .
4. Näherungsweise Berechnung des Trägheitsmomentes J_x des Gyroskops und Vergleich mit den experimentellen Werten aus den Aufgaben 1 und 2.
5. a) obligatorisch: Vergleich des experimentellen Wertes für J_s (Aufgabe 3) mit dem Sollwert:
 Versuchsplatz 1: $(9,0 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$ Versuchsplatz 2: $(8,7 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$
 Versuchsplatz 3: $(9,1 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$ Versuchsplatz 4: $(9,7 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$
 b) freiwillig: selbständige Berechnung der in a) vorgegebenen Sollwerte.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Der Versuchsaufbau im Praktikum (Abb.6) ist eine Realisierung des oben beschriebenen Gyroskops. Der Kreisel K ist an einem Ende des Waagebalkens W so angebracht, dass seine Figurenachse mit der Richtung des Waagebalkens zusammenfällt. Der Kreisel wird über eine Reibradkupplung mit Gummiring durch einen kleinen Elektromotor M mit einstellbarer Drehzahl angetrieben. Die Drehzahl kann mit einer Lichtschrankenordnung LS und nachgeschaltetem Digi-

talzähler gemessen werden. Hierbei erfolgt die Signalübertragung vom beweglich aufgehängten Teil des Gyroskops auf den ortsfesten Teil des Übertragungssystems zum Anzeigegerät optoelektronisch mittels Leuchtdiode, Lichtleiter und Fototransistor. Der Waagebalken ist in einem

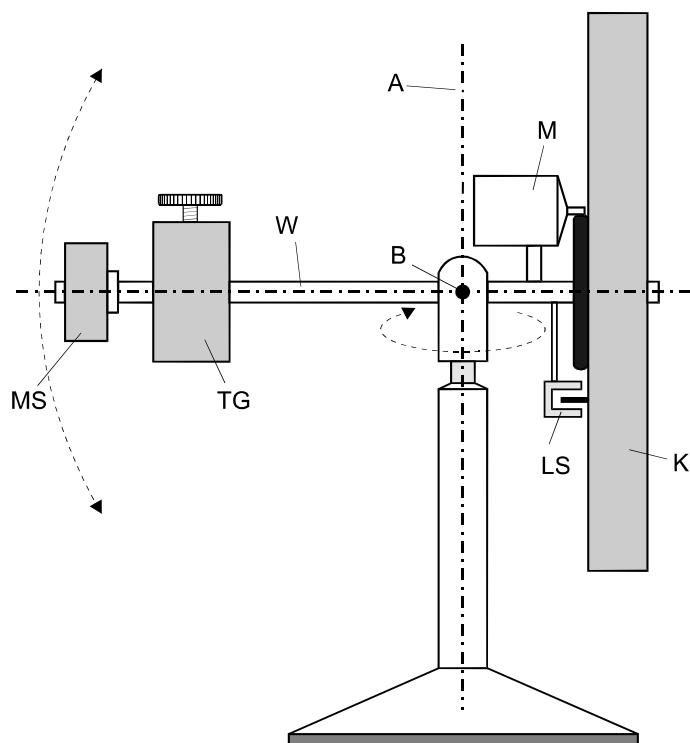


Abb. 6 VERSUCHSANORDNUNG

Gelenk drehbar um die Achse B aufgehängt. Das Gelenk selbst und damit der ganze Aufbau ist zusätzlich um die Achse A leicht drehbar gelagert. Auf der anderen Seite des Waagebalkens befinden sich ein verschiebbares Tariergewicht TG und eine Aufnahme für auswechselbare Massestücke MS. Die Massestücke im Bereich von $m = 50 \text{ g}$ bis $m = 500 \text{ g}$ sind 50 g -weise gestuft. Bei zunächst nicht aufgesteckten Massestücken kann die Anordnung durch Verschieben des Tariergewichtes TG so austariert werden, dass sie im Schwerpunkt unterstützt ist und folglich keine Drehmomente auf den Kreisel wirken. Der rotierende Kreisel behält seine Figurenachse (=

Drehimpulsachse) im Raum bei. Durch Aufstecken der Massestücke MS mit bekannter Masse m können jetzt definierte Drehmomente erzeugt und damit die Präzession eingeleitet werden.

Alle Drehzahländerungen müssen langsam vorgenommen werden, um die Reibradkupplung zu schonen!

Für die Aufgaben 1 bis 3 werden die Periodendauern T_P und T_N mit einer elektronischen Handstoppuhr gemessen. Die Messung der für die Auswertung erforderlichen geometrischen Daten erfolgt mit einem Messschieber. Die Nutationsbewegung (Aufgabe 3) wird am gut austarierten Gyroskop durch einen leichten Stoß gegen den Waagebalken eingeleitet. Die Messung von T_N ist wegen der rel. schnell abklingenden Nutation bei rel. hoher Nutationsfrequenz etwas schwierig und sollte deshalb zunächst ein wenig trainiert werden.

Zur näherungsweisen Berechnung des Trägheitsmomentes J_x (Aufgabe 4) wird der Kreisel (gedanklich!) in zweckmäßig gewählte Hohlzylinder zerlegt, deren Trägheitsmomente summiert werden. Das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders mit dem Innenradius r_1 und dem Außenradius r_2 , der Höhe h und der Dichte ρ bezüglich seiner Symmetrieachse ergibt sich aus

$$J = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot h \cdot (r_2^4 - r_1^4).$$

Für Aufgabe 5b) werden analog wie bei Aufgabe 4 die Trägheitsmomente aller zu J_s beitragenden Zylinder und Hohlzylinder, hier aber bzgl. der relevanten Drehachse **B** (Abb.6), addiert. Bezeichnet man den Abstand zwischen der Drehachse **B** und der zu **B** parallelen Schwerpunktsachse eines Hohlzylinders mit s , so beträgt sein (äquatoriales) Trägheitsmoment

$$J = \rho \cdot \pi \cdot h \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot \left\{ \frac{1}{4} (r_2^2 + r_1^2) + \frac{h^2}{12} + s^2 \right\}.$$

Zur Ausführung der Rechnungen steht das PC-Programm "KREISEL" zur Verfügung. Eingabegrößen sind die geometrischen Daten mit Messunsicherheiten, ausgegeben werden die Einzelträgheitsmomente und deren Summe mit Messunsicherheiten.

Zusätzliche Angaben:

Dichte von Messing $\rho_M = 8,4 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}$

Dichte von Eisen $\rho_{Fe} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}$.

FRAGEN

1. Was versteht man unter den Hauptträgheitsmomenten eines starren Körpers?
2. Welchen Einfluss hat das Trägheitsmoment des Motorankers auf das Messergebnis für J_x ?
3. Welche Anwendungen des Kreiselpinzips in der Technik kennen Sie?

M13 ULTRASCHALL

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Wellen, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit, Doppler-Effekt, Piezoelektrischer Effekt.

Schallwellen sind mechanische Wellen, welche sich in Körpern aufgrund deren elastischer Eigenschaften ausbreiten. Von **Ultraschall** redet man im Frequenzbereich oberhalb des Hörschallbereichs, d.h. von 20 kHz bis über 10 GHz, etwa der Obergrenze für die Schallerzeugung auf technischem Wege.

Die Gleichung der ebenen harmonischen Welle, welche sich mit der Geschwindigkeit c in Richtung der positiven x -Achse ausbreitet, lautet

$$u(t, x) = u_0 \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right). \quad (1)$$

Hierbei bezeichnen $u(t, x)$ die sich periodisch ändernde Größe am Ort x zum Zeitpunkt t , u_0 die Amplitude, $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz, $f = 1/T$ die Frequenz und T die Periodendauer. Das Argument der Sinusfunktion bezeichnet man als Phase und φ_0 als Anfangsphase der Welle. Die Anfangsphase wird im Folgenden gleich Null gesetzt, da sie hier keine Rolle spielt. Den kleinsten Abstand zweier Orte gleicher Phase nennt man Wellenlänge λ und aus der Periodizität der Sinusfunktion folgt für die Ausbreitungsgeschwindigkeit, welche auch **Phasengeschwindigkeit** genannt wird,

$$c = f \cdot \lambda. \quad (2)$$

Entsprechend der zeitlichen und räumlichen Periodizität einer Welle kann sie auf zwei verschiedene Arten dargestellt werden (Abb.1). In Flüssigkeiten und Gasen treten Schallwellen immer als **Longitudinalwellen** auf. Im Festkörper hingegen können sich auch Transversalwellen ausbilden, denn jede Dilatation ist immer mit einer mehr oder weniger großen Querkontraktion verbunden (Vgl. Versuch M3), so dass auch Scherkräfte auftreten.

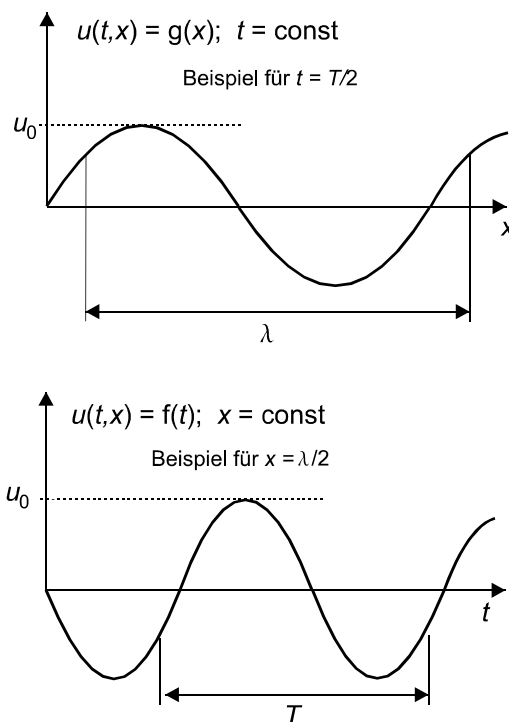


Abb.1 DARSTELLUNGSFORMEN EINER WELLE

Bei Tabellenwerten für die Schallgeschwindigkeiten in Festkörpern ist deshalb darauf zu achten, ob die Daten für dünne Stäbe oder ausgedehnte Körper angegeben sind.

Stehende Wellen: Lässt man zwei Wellenzüge gleicher Amplitude und Wellenlänge, aber entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung interferieren, so führt die Addition der zugehörigen Gleichungen auf die Gleichung für die stehende Welle

$$u_0 \sin\left(\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\right) + u_0 \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) = 2u_0 \cos\left(\omega \frac{x}{c}\right) \sin(\omega t). \quad (3)$$

Hier stellt der sin-Faktor eine im ganzen Raum phasengleiche harmonische Schwingung dar, deren Amplitude $2u_0 \cos(\omega x / c)$ eine periodische Funktion von x mit der Periodenlänge λ ist. So wie die cos-Funktion abwechselnd 0 und +/-1 wird, reihen sich abwechselnd **Schwingungsknoten** und **Schwingungsbäuche** aneinander.

Dopplereffekt: Bewegen sich Schallquelle und -empfänger mit der Relativgeschwindigkeit v , dann stellt man am Empfänger bei Annäherung eine Frequenzerhöhung und bei Entfernung eine Frequenzerniedrigung fest. Da sich die Schallwellen in einem ruhenden stofflichen Medium ausbreiten, ist die Größe der Frequenzänderung davon abhängig, ob sich die Quelle oder der Empfänger bewegt. Man erhält bei einer Quellenfrequenz f_0 für die Empfangsfrequenz bei bewegtem Empfänger

$$f = f_0 \left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \quad \text{bzw.} \quad \Delta f = \pm f_0 \frac{v}{c} \quad (4)$$

mit dem Pluszeichen bei Annäherung und dem Minuszeichen bei Entfernung. Bei bewegter Quelle erhält man dagegen als Empfangsfrequenz des Empfängers

$$f = \frac{f_0}{\left(1 \mp \frac{v}{c}\right)} \quad \text{bzw.} \quad \Delta f = f_0 \left(\pm \frac{v}{c} + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \pm \dots\right), \quad (5)$$

mit dem Minuszeichen bei Annäherung und dem Pluszeichen bei Entfernung.

Gruppengeschwindigkeit: Bestimmt man die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen aus der Laufzeit z.B. eines Schallimpulses, so sind Messzeit und Messstrecke begrenzt. Solche "abgeschnittenen" Wellenzüge, auch Wellenpakete oder Wellengruppen genannt, breiten sich mit ihrer Gruppengeschwindigkeit aus, welche bei Auftreten von Dispersion von der Ausbreitungsgeschwindigkeit unendlich ausgedehnter Wellenzüge und damit der Phasengeschwindigkeit verschieden ist. Im vorliegenden Experiment tritt keine Dispersion auf und es muss demzufolge hier nicht zwischen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit unterschieden werden.

AUFGABEN

1. Bestimmung der Wellenlänge und der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schall in Wasser durch Vergleich der Phasenbeziehung zwischen den am Schallsender und -empfänger gemessenen Signalen.
2. Bestimmung der Wellenlänge und der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schall in Wasser durch Messung der stehenden Wellen zwischen zwei Reflektoren.
3. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Wasser unter Ausnutzung des Dopplereffektes.

4. Vergleich der Ergebnisse für die Wellenlänge und die Ausbreitungsgeschwindigkeit aus den Aufgaben 1. - 3.
5. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Aluminium, Kupfer und Messing durch Laufzeit-Messungen.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Der Ultraschallgenerator erzeugt hochfrequente sinusförmige Schwingungen, welche in einem Schallkopf mit einem piezokeramischen Wandler Ultraschallwellen erzeugen, die abgestrahlt werden. Neben der kontinuierlichen Abstrahlung im Sinusbetrieb kann wahlweise auch auf Impulsbetrieb (für Aufgabe 5) umgeschaltet werden. Der Schallkopf strahlt dann pulsartig kurze Wellenzüge mit einer Folgefrequenz von 500 Hz ab.

Die Generatorausgänge "Monitor" und "Synchr." dienen zur Darstellung der Schall- bzw. Generatorsignale auf einem Zweikanal-Oszilloskop. Die Phasenlage der zur Erregerspannung proportionalen

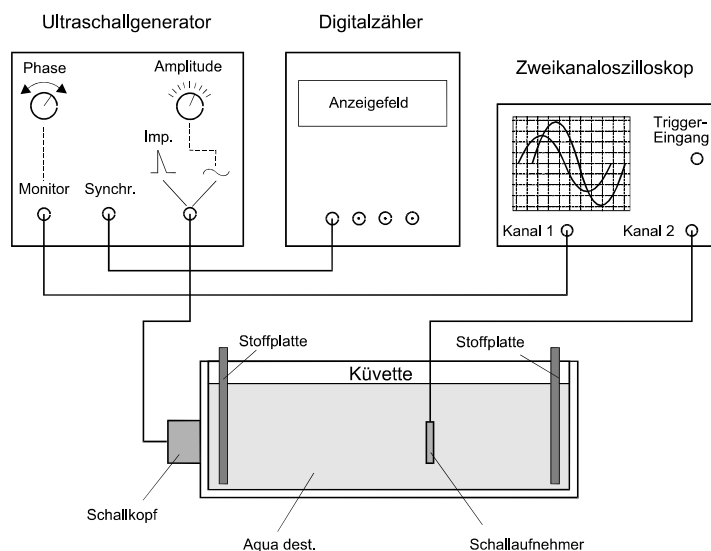


Abb. 2 VERSUCHSAUFBAU FÜR AUFGABE 1

"Synchr." entnommene Spannungsimpuls setzt ca. 10 ns vor Monitor- und Erregerimpuls ein, so dass diese bei externer Triggerung mit dem Synchr.-Signal mit Sicherheit oszillographisch erfasst werden.

Der wasserdichte, als piezoelektrischer Wandler ausgeführte Schallaufnehmer liefert dem Schallwechseldruck proportionale Spannungssignale und ermöglicht die Darstellung von Ultraschallwellen und -impulsen auf dem Oszilloskop.

Für Aufgabe 1 (Abb. 2) wird die Kuvette zu 3/4 mit destilliertem Wasser gefüllt. Zur Ankopplung des Ultraschallkopfes an die Schmalseite der Kuvette werden einige Tropfen Glycerin in den verbleibenden Spalt gegeben. Die Stoffplatten an den inneren Schmalseiten der Kuvette sollen die Ausbildung stehender Wellen hemmen. Mittels einer motorgetriebenen Gewindespindel kann der

Monitorspannung kann mit dem Stellknopf "Phase" um ca. 150° relativ zur Erregerspannung verschoben werden. Die Synchr.-Spannung von konstant 5 V ist phasenstarr zur Erregerspannung.

Im Impulsbetrieb setzt der Monitorimpuls gleichzeitig mit dem Erregerimpuls ein, so dass bei gleichzeitiger Darstellung des Monitor- und des aufgenommenen Schallimpulses auf dem Zweikanal-Oszilloskop die Laufzeit des Schallimpulses bestimmt werden kann. Der am Ausgang

Schallaufnehmer mit einstellbarer Geschwindigkeit in Richtung bzw. entgegen der Schallausbreitung bewegt werden.

Mit einem Zweikanal-Oszilloskop werden das Signal der Schallquelle und das dem Schallwechseldruck proportionale Signal des

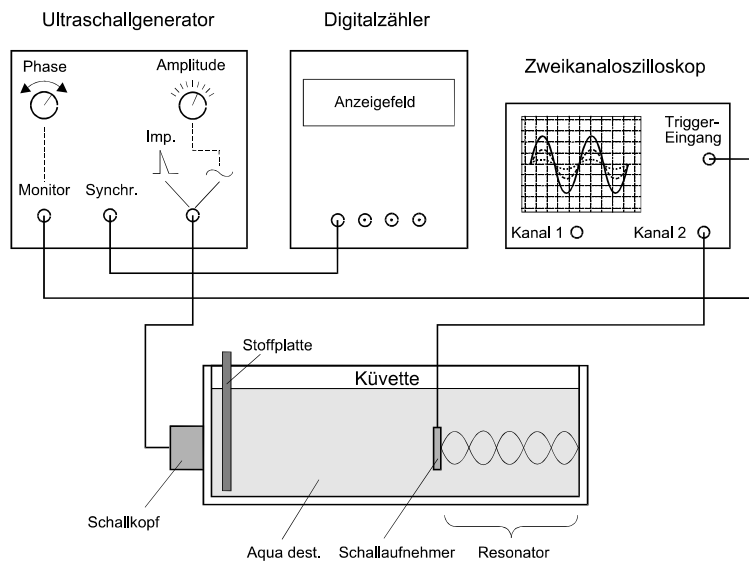


Abb. 3 VERSUCHSAUFBAU FÜR AUFGABE 2

mehreren Zentimetern. Die Wellenlänge beträgt dann $\lambda = s/N$. Zur Berechnung der Ausbreitungsgeschwindigkeit nach Gl. (2) wird die Frequenz am Synchron.-Ausgang des Generators mit einem Digitalzähler bestimmt.

Für Aufgabe 2 wird der Aufbau geringfügig geändert (Abb. 3): Das Monitorsignal des Generators wird nicht mehr Kanal 1 des Oszilloskops zugeführt, sondern zur externen Triggerung des Aufnehmersignals genutzt und an den dafür vorgesehenen Eingang des Oszilloskops angeschlossen. Außerdem wird die Stoffplatte von der dem Aufnehmer gegenüberliegenden Wand entfernt, damit die Welle reflektiert werden kann.

Bei bestimmten Abständen zwischen dem Aufnehmer und dieser Wand, die sich um jeweils $\lambda/2$ unterscheiden, bildet sich im somit geschaffenen Resonator eine stehende Welle aus.

Aus der Anzahl N der bei Verschiebung s des Aufnehmers um einige Zentimeter überstrichenen

Wellenlänge ist die ursprüngliche Phasenlage wieder erreicht. Im Interesse einer hohen Messgenauigkeit empfiehlt sich die Zählung der überstrichenen Wellenlängen N über eine Strecke s von

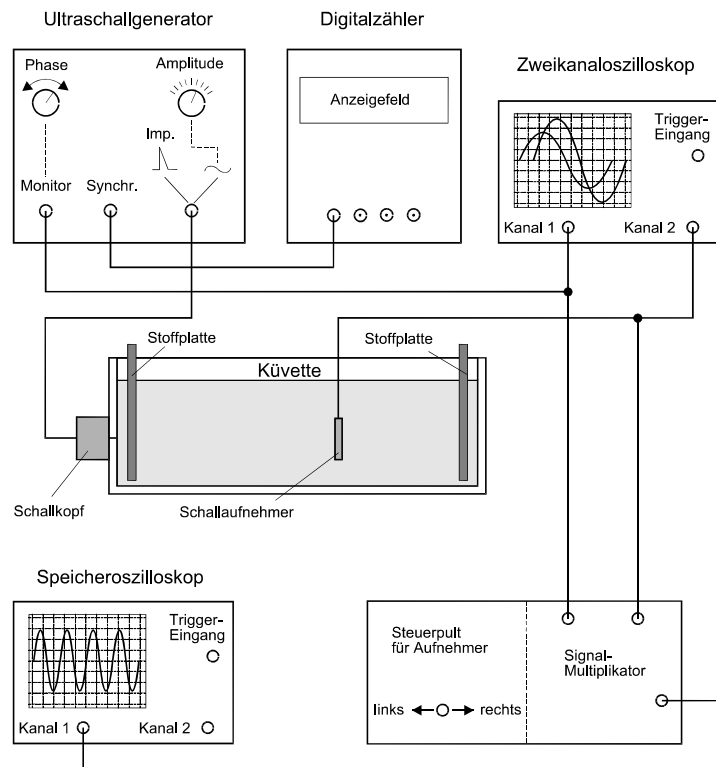


Abb. 4 VERSUCHSAUFBAU FÜR AUFGABE 3

Amplitudenmaxima (oder -minima) wird die Wellenlänge gemäß $\lambda = 2s/N$ und daraus nach Gl. (2) die Ausbreitungsgeschwindigkeit c berechnet.

Für Aufgabe 3 wird der Aufbau für Aufgabe 1 erweitert (Abb.4). Beide Stoffplatten müssen eingebaut sein, um die Ausbildung einer stehenden Welle so gut wie möglich zu dämpfen.

Die grundsätzlich mögliche Bestimmung von Δf durch getrennte Messung von f_0 und f und folgende Differenzbildung würde erfordern, dass die Frequenzdrift während der Messungen deutlich kleiner als das zu erwartende Δf bleibt, was apparativ hier nicht gesichert werden kann. Der hier beschrittene Ausweg besteht in der direkten Bestimmung von Δf auf folgende Weise: Die gleichzeitig gemessenen Sender- und Empfängersignale werden in einer speziellen elektronischen Schaltung auf gleiche Amplitude normiert und anschließend miteinander multipliziert nach dem Prinzip

$$2\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f t) = \cos[2\pi t(f_0 - f)] + \cos[2\pi t(f_0 + f)].$$

Der hochfrequente zweite Summand wird ausgesiebt und das Signal mit der Frequenz Δf wird direkt auf dem Bildschirm des Speicheroszilloskops aufgezeichnet. Aus dem Abstand mehrerer Maxima und der eingestellten Zeitbasis kann jetzt Δf berechnet werden. Zur Bestimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeit c nach Gl.(4) wird Δf für jeweils 5 verschiedene Empfängergeschwindigkeiten v in Hin- und Rückrichtung gemessen und c aus dem Anstieg des Graphen $\Delta f = f(v)$ berechnet. Zur Bestimmung von v kann die angezeigte Gewindespindeldrehzahl für den Empfängervortrieb genutzt werden, wenn zuvor die Ganghöhe mit einem Messschieber über ca. 5 cm Gewindelänge geteilt durch hiermit erfasste Gewindegänge bestimmt wurde. Für die Spindeldrehzahl wird ein systematischer Fehler von 0,5 % angenommen.

Für Aufgabe 5 (Abb.5) wird der jeweilige Spalt zwischen Metallprobe und Schallkopf bzw. Auf-

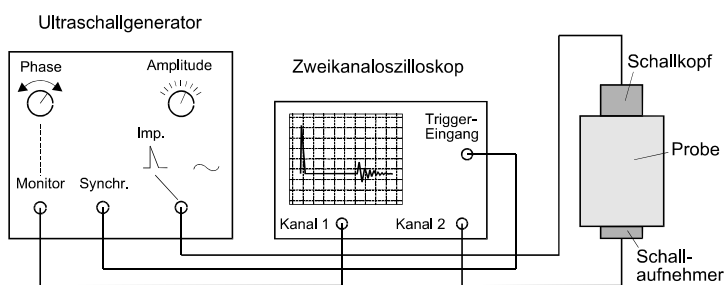


Abb. 5 VERSUCHSAUFBAU FÜR AUFGABE 5

nehmer mit einem Tropfen Glycerin zur sicheren Schallankopplung ausgefüllt. Die im Impulsbetrieb des Generators vom Schallkopf abgestrahlten Ultraschallimpulse werden auf dem Bildschirm des Oszilloskops angezeigt. Hierzu wird der Monitorausgang des Generators mit einem Kanal ver-

bunden. Das nach Durchlaufen der Metallprobe am Aufnehmer entstehende Signal wird auf den anderen Kanal gegeben. Bei der Triggerung mit dem um ca. 10 ns vorseilenden Synchr.-Signal kann bei geeigneter Einstellung der Zeitbasis ein stehendes Bild erreicht werden, welches Sende- und Empfangsimpuls gleichzeitig anzeigt. Aus der Verschiebung beider Signale auf der Zeitachse kann die Laufzeit t und hieraus die Ausbreitungsgeschwindigkeit c bestimmt werden, wenn zuvor die geometrische Ausdehnung der Probe gemessen wurde.

FRAGEN

1. Was versteht man unter dem piezoelektrischen Effekt und wie nutzt man ihn zur Aussendung und zum Empfang von Schallsignalen?
2. Worin besteht der Unterschied zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit bei der Ausbreitung von Wellen?
3. Wie leitet man die Formeln für den Dopplereffekt (Gl. (4) und Gl. (5)) her?

T1 WÄRMEKAPAZITÄT EINES KALORIMETERS

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Erster Hauptsatz, Wärmekapazität, Arbeit von Gleich- und Wechselstrom. Wärmeaustauschkorrektur (Einführungsskript, Abschnitt 3.2).

Wärme ist eine Energieform, die zwischen Körpern ausgetauscht wird oder in andere Energieformen umgewandelt werden kann. Führt man einem Körper der Masse m die Wärmemenge dQ zu, dann ist die sich einstellende Temperaturerhöhung dT proportional zur zugeführten Wärmemenge

$$dQ = m c dT, \quad (1)$$

wobei der Proportionalitätsfaktor

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} \quad (\text{SI-Einheit: } [c] = \text{J/kg K}) \quad (2)$$

eine Stoffkonstante ist, die in kleineren Temperaturbereichen praktisch konstant ist und spezifische Wärmekapazität heißt. Das Produkt

$$C = c m \quad (\text{SI-Einheit: } [C] = \text{J/K}) \quad (3)$$

nennt man Wärmekapazität des Körpers.

Zur Bestimmung von Wärmemengen benutzt man Kalorimeter, dies sind gut wärmeisolierte Gefäße. Führt man einem mit Wasser (Masse m_w) gefüllten Kalorimeter die Wärmemenge ΔQ zu, dann werden außer dem Wasser auch Teile des Kalorimeters wie Gefäßwandung, Thermometer und Rührer erwärmt. Die Wärmekapazität der Versuchsanordnung setzt sich also aus der des Wassers ($m_w c_w$) und der des Kalorimeters C_K zusammen:

$$\Delta Q = (m_w c_w + C_K) \Delta T. \quad (4)$$

Die spezifische Wärmekapazität des Wassers hat den Wert $c_w = 4,187 \text{ kJ/kgK}$. Die Bestimmung der Wärmekapazität C_K des Kalorimeters ist rechnerisch nur näherungsweise möglich, deshalb wird sie im Allgemeinen experimentell ermittelt.

1. Elektrische Methode: Fließt durch einen ohmschen Leiter (Heizspirale), an dem die Spannung U anliegt, der Strom I , dann entsteht in der Zeit Δt in ihm eine der elektrischen Energie äquivalente Wärmemenge

$$\Delta Q = IU \Delta t. \quad (5)$$

Überträgt man diese Wärmemenge an das Wasser (Masse m_w) und das Kalorimeter (Wärmekapazität C_K), dann steigt die Wassertemperatur (Gl. (4)). Bei verlustloser Wärmeübertragung sind beide Wärmemengen gleich (Energieerhaltungssatz), und es gilt

$$IU \Delta t = (m_w c_w + C_K) \Delta T, \quad (6)$$

woraus C_K bestimmt werden kann.

2. Mischungsmethode: Fügt man dem kalten Wasser (Masse m_1 , Temperatur T_1) eines Kalorimeters warmes Wasser (Masse m_2 , Temperatur T_2) hinzu, dann findet ein Wärmeaustausch statt, bis das gesamte Wasser die Mischungstemperatur T_m hat. Aus dem Energieerhaltungssatz folgt, dass die vom warmen Wasser abgegebene Wärmeenergie

$$\Delta Q_2 = m_2 c_w (T_2 - T_m)$$

gleich der vom kalten Wasser und dem Kalorimeter aufgenommenen Wärmeenergie

$$\Delta Q_1 = (m_1 c_w + C_K)(T_m - T_1)$$

ist. Der Energieerhaltungssatz in dieser speziellen Form des Austausches von Wärmemengen heißt Richmannsche Mischungsregel und ergibt die Gleichung

$$(m_1 c_w + C_K)(T_m - T_1) = m_2 c_w (T_2 - T_m) \quad (7)$$

zur Bestimmung der Wärmekapazität C_K des Kalorimeters.

Korrektur des Wärmeaustausches mit der Umgebung: Bei kalorimetrischen Messungen ist im Allgemeinen der Wärmeaustausch mit der Umgebung als systematischer Fehler zu korrigieren. Das Prinzip dieser Korrektur besteht darin, den langsam erfolgenden Erwärmungsprozess und den dadurch möglichen Wärmeaustausch mit der Umgebung auf eine **momentane** Wärmeaufnahme ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung zu extrapolieren. Man misst vor dem Beginn

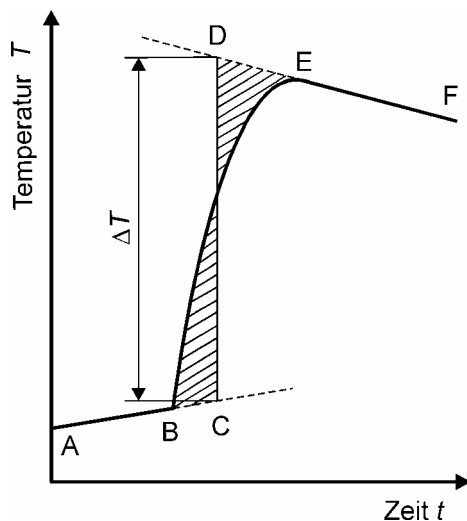


Abb. 1 WÄRMEAUSTAUSCH-KORREKTUR

des eigentlichen Wärmeaustausches fünfmal in Abständen von 1 min die Wassertemperatur (Vorperiode AB, Abb. 1). Während des beabsichtigten Wärmeaustausches (Hauptperiode BE) ändert sich die Temperatur schnell und es wird in kürzeren Zeitabständen (15-30 s) gemessen. Nach Beendigung des Wärmeaustausches misst man die Temperatur wieder fünfmal in Abständen von 1 min (Nachperiode EF). Die gemessenen Temperaturen T werden in Abhängigkeit von der Zeit grafisch dargestellt und die nahezu geradlinigen Kurvenanteile von Vor- und Nachperiode linear extrapoliert.

Zur Bestimmung der Temperaturdifferenz ΔT lege man eine Gerade CD senkrecht zur Zeit-Achse, so dass die schraffierten Flächen gleich groß werden. Beim hier

beschriebenen Kurvenverlauf wird vorausgesetzt, dass die Umgebungstemperatur T_u zwischen Anfangs- und Mischungstemperatur liegt, dies sollte man immer anstreben, um den Wärmeaustausch mit der Umgebung gering zu halten. Erzeugt der Wärmeaustausch eine Abkühlung der Kalorimeterflüssigkeit, dann verändert sich der Kurvenverlauf sinngemäß, aber das Korrekturverfahren kann in gleicher Weise angewandt werden.

AUFGABEN

1. Bestimmung der Wärmekapazität C_K nach der elektrischen Methode (Gl. (6)).
2. Bestimmung der Wärmekapazität C_K nach der Mischungsmethode (Gl. (7)).
3. Bestimmung der Messunsicherheiten (Gl. (8) bzw. (9)) und Vergleich beider Messmethoden.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Für Aufgabe 1 wird der Heizeinsatz in das mit 300 cm³ Wasser gefüllte Kalorimeter getaucht (Tauchsiederprinzip) und der Rührer eingeschaltet. Nach der Messung der Vorperiode wird die Heizung eingeschaltet und für fünf Minuten alle 30 s die Temperatur, die Spannung und der Strom gemessen. Zur Berechnung der Wärmekapazität (Gl. (6)) werden für die Spannung U und den Strom I die Mittelwerte aus den während der Hauptperiode gemessenen Werten eingesetzt. Die Temperaturdifferenz ΔT wird der grafischen Darstellung zur Wärmeaustauschkorrektur entnommen. Der Versuch wird zweimal durchgeführt.

Für Aufgabe 2 fülle man das Kalorimeter mit 150 cm³ Leitungswasser, schalte den Rührer ein und messe die Temperatur T_1 . Dann gieße man 150 cm³ Wasser von 35 - 45 °C dazu und messe

die Mischungstemperatur T_m . Der Versuch wird dreimal durchgeführt ohne Wärmeaustauschkorrektur.

Für Aufgabe 3 ergibt die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf die Auswertungsformeln (Gl. (6)) bzw. (7)) sehr unübersichtliche Ausdrücke. Bei sorgfältiger Durchführung der Messungen können bei der elektrischen Methode die Messunsicherheiten von m_w und t und bei der Mischungsmethode die Messunsicherheiten von m_1 und m_2 vernachlässigt werden. Zur Berechnung der Messunsicherheiten verwende man deshalb für die elektrische Methode die Näherungsformel

$$u_{C_K} = \frac{IU\Delta t}{\Delta T} \left\{ \left| \frac{u_I}{I} \right| + \left| \frac{u_U}{U} \right| + \left| \frac{u_{\Delta T}}{\Delta T} \right| \right\} \quad (8)$$

und für die Mischungsmethode die Näherungsformel

$$u_{C_K} = m_2 c_w \left\{ \left| \frac{u_{T_2}}{T_m - T_1} \right| + \left| \frac{T_1 - T_2}{(T_m - T_1)^2} u_{T_m} \right| + \left| \frac{T_2 - T_m}{(T_m - T_1)^2} u_{T_1} \right| \right\}. \quad (9)$$

FRAGEN

1. Weshalb ist die Wärmekapazität C_K des Kalorimeters von der eingefüllten Wassermenge und der Temperatur abhängig?
2. Warum ist für die Mischungsmethode keine Wärmeaustauschkorrektur erforderlich?
3. Der Wert der spezifischen Wärmekapazität für Wasser ist groß im Vergleich zu anderen Flüssigkeiten und Festkörpern. Welche Bedeutung hat dies für das Klima?

T4 IDEALES GAS

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Boyle-Mariottesches Gesetz, Gay-Lussacsches Gesetz, Zustandsgleichung idealer Gase, Gasthermometer, Mol, kinetische Gastheorie.

Aus den experimentell ermittelten Zusammenhängen der Zustandsgrößen Druck p , Volumen V und Temperatur T bei isothermen (T konstant), isochoren (V konstant) und isobaren (p konstant) Zustandsänderungen von Gasen kann die Zustandsgleichung der idealen Gase

$$pV = nRT \quad (1)$$

abgeleitet werden. Dabei ist n die Zahl der Mole im Gasvolumen und $R = 8,3144 \text{ J / (mol K)}$ die allgemeine Gaskonstante, die unabhängig von der Gasart ist.

Aus der Zustandsgleichung ergibt sich für eine isochore Zustandsänderung idealer Gase die Temperaturabhängigkeit

$$p_t = p_0(1 + \gamma t) \quad (2)$$

Hierbei sind t die Temperatur in $^{\circ}\text{C}$, p_0 bzw. p_t der Druck bei 0°C bzw. $t^{\circ}\text{C}$ und $\gamma = 1/273 \text{ K}^{-1}$ der Druck- oder Spannungskoeffizient.

Die Zustandsgleichung der idealen Gase (Gl. (1)) kann im Modell der kinetischen Gastheorie aus einfachen Annahmen über die Atome abgeleitet werden. In diesem Modell des idealen Gases werden die Atome als Massenpunkte angenommen, deren Eigenvolumen sowie gegenseitige Wechselwirkungskräfte vernachlässigbar sind und die ungeordnete Bewegungen ausführen. Für Gase, deren Temperatur oberhalb des Verflüssigungspunktes liegt und die unter geringem Druck stehen, sind diese Annahmen weitgehend erfüllt. Die makroskopische Zustandsgröße Druck lässt sich in diesem Modell aus den elastischen Stößen der Gasatome mit der Gefäßwand berechnen. Der Druck von Gasatomen der Masse m und der Atomzahldichte n' (Atome/Volumeneinheit) ergibt sich zu

$$p = \frac{1}{3} mn' \overline{v^2} \quad (3)$$

wobei $\overline{v^2}$ der Mittelwert der Quadrate der Geschwindigkeiten ist.

AUFGABEN

1. Messung der Höhendifferenz h am Gasthermometer bei Zimmertemperatur, für Eiswasser und siedendes Wasser; jeweils 10 Messwerte.
2. Berechnung des Spannungskoeffizienten nach Gl. (2) mit Abschätzung der Messunsicherheit.
3. Berechnung der Zimmertemperatur mit Hilfe des in Aufgabe 2 ermittelten Spannungskoeffizienten.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Das Gasthermometer besteht aus einem mit Luft gefüllten Glasballon K (Abb. 1), der über eine enge Kapillare R mit einem Quecksilber-Manometer in Verbindung steht. Der rechte Schenkel des Manometers kann mit einer Stellschraube gehoben und gesenkt werden. Durch Einstellen der

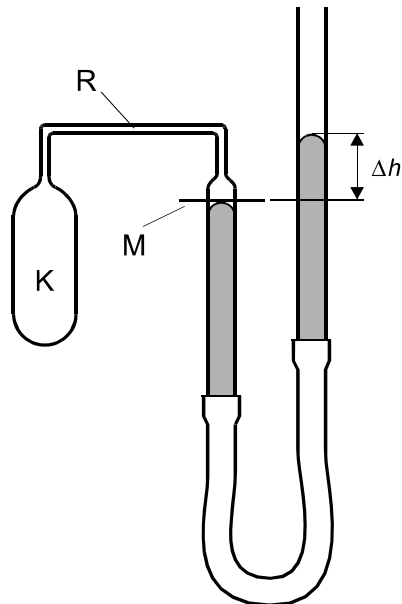


Abb. 1 JOLLY-THERMOMETER

durch Einstellen der Quecksilberkuppe im linken Schenkel des Manometers auf die Marke M, welche auf einem kleinen Spiegel markiert ist, kann bei jeder Temperatur ein ganz bestimmtes Volumen eingestellt werden. Der Druck, unter dem die Luft in diesem Volumen steht, ist gleich dem äußeren Luftdruck p_a plus dem aus der jeweiligen Höhendifferenz Δh der beiden Quecksilberkuppen errechneten Druck. Die Höhendifferenz Δh wird in Millimetern Quecksilbersäule an einer Spiegelskala abgelesen und in Pascal (SI-Einheit für Druck) umgerechnet:

$$1 \text{ mm Hg-Säule} \hat{=} 133,3 \text{ Pascal}$$

Für Aufgabe 2 benötigt man die genaue Siedetemperatur t_s des Wassers, die man aus der empirischen Formel

$$t_s / ^\circ\text{C} = 100 + 2,81 \cdot 10^{-4} (p_a / \text{Pa} - 10,13 \cdot 10^4) \quad (4)$$

ermitteln kann. Die Fehler in beiden Aufgaben werden durch die Fehler der Druckmessungen bedingt; man lege

ACHTUNG !

Beim Arbeiten mit dem Gasthermometer ist große Vorsicht geboten. Man tauche den Glaskolben nicht in siedendes Wasser, sondern erwärme das Wasser allmählich mit dem Kolben bis zum Sieden. Nach der Druckmessung bei 100°C muss vor dem Entfernen des Siedegeäßes der Quecksilberspiegel bei M unbedingt so weit gesenkt werden, dass kein Hg in die Kapillare oder in den Glaskolben hinübertreten kann. Ferner müssen während der Messung die Verbindungsstellen zwischen Schlauch und Glas stets unter Quecksilber stehen, damit dort nicht Luft ein- oder austreten kann.

FRAGEN

1. Inwiefern gehen die Wärmeausdehnung des Glaskolbens und das Volumen der Kapillare, welches nicht auf die Messtemperatur gebracht wurde, als systematischer Fehler ein?
2. Welchen Einfluss hat der äußere Luftdruck auf die Messergebnisse?
3. Welchen Impuls überträgt ein Körper mit dem Impuls mv beim elastischen Stoß gegen eine ruhende Wand ($m_{\text{Wand}} \gg m$)?
4. Erläutern Sie die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung!

T6 THERMOELEMENT

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Thermospannung, Austrittsarbeit, Thermoelement, Abkühlungsgesetz.

Bei Berührung zweier Metalle A und B (Abb. 1) treten im Mittel mehr Elektronen von dem Metall A mit der kleineren Austrittsarbeit der Elektronen in das Metall B mit der größeren Austrittsarbeit über als umgekehrt. Die Austrittsarbeit ist die Mindestenergie, die einem Leitungselektron im Metall zugeführt werden muss, damit das Elektron aus dem Metall ins Vakuum austreten kann. Das Metall A, das Elektronen abgibt, wird positiv gegenüber dem Metall B aufgeladen,

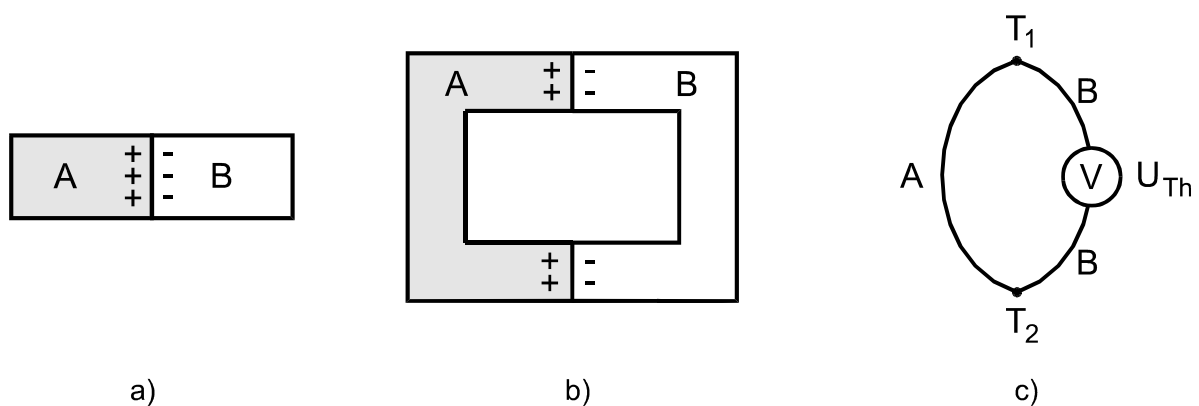


Abb.1 THERMOELEMENT

den, in der Berührungsschicht entsteht eine Kontaktspannung (Abb. 1a). Werden die beiden freien Enden der Metalle ebenfalls zur Berührung gebracht, so entsteht dort die gleiche Kontaktspannung (Abb. 1b). Beide Spannungen sind entgegengesetzt gleich, es fließt kein Strom.

Der Übergang der Elektronen von einem Metall zum anderen ist abhängig von der Temperatur der Berührungsstelle. Erwärmt man eine der Berührungsstellen, so wird die Kontaktspannung des wärmeren Kontaktes größer als die des anderen. Die Potentialdifferenz zwischen den Berührungsstellen heißt Thermospannung U_{Th} und das Metallpaar (meist Drähte), das bei einem Temperaturunterschied der beiden Berührungsstellen (meist Lötstellen) eine elektrische Spannung liefert, heißt Thermoelement (Abb. 1c). Der Verlauf der Thermospannung U_{Th} in Abhängigkeit von der Temperaturdifferenz ($T_1 - T_2$) der Lötstellen ist von der gewählten Materialkombination abhängig. Gebräuchliche Kombinationen sind z. B. Kupfer/Konstantan bis zu 500 °C und Wolfram/Wolfram-Molybdän bis zu 3 300 °C. Thermoelemente werden als Temperaturmessgeräte verwendet. Dabei wird die eine Lötstelle an die Messstelle gebracht und die andere auf konstanter Temperatur gehalten. Die praktische Bedeutung der Thermoelemente liegt vor allem in ihrem großen Messbereich, ihrer geringen Wärmekapazität und der elektrischen Anzeige.

Als Empfindlichkeit eines Thermoelementes (auch Thermokraft genannt) definiert man die

Größe

$$S = \frac{dU_{\text{Th}}}{dT}, \quad (1)$$

worin dU_{Th} die Änderung der Thermospannung bei Änderung der Temperatur einer Lötstelle um dT bedeutet. Die Thermokraft liegt bei Metallen in der Größenordnung von einigen $\mu\text{V/K}$ und bei Halbleitern etwa bei $10^2 \mu\text{V/K}$.

Newton'sches Abkühlungsgesetz: Ein Körper, dessen Temperatur T höher ist als die Temperatur T_u seiner Umgebung, kühlt sich ab. Die Temperaturänderung erfolgt umso schneller, je größer der Temperaturunterschied ist. Beruht die Abkühlung ausschließlich auf Konvektion (also keine Strahlung!), dann lässt sich dieser Vorgang mit guter Näherung durch das Newton'sche Abkühlungsgesetz beschreiben. Die Abkühlungsgeschwindigkeit $-dT/dt$ ist der Temperaturdifferenz $(T - T_u)$ proportional

$$-\frac{dT}{dt} = a(T - T_u). \quad (2)$$

Die Abkühlungskonstante a (SI-Einheit: s^{-1}) hängt von den thermischen und geometrischen Größen des Körpers (z. B. Wärmekapazität, Masse und Oberflächenbeschaffenheit) ab. Integriert man die Gl. (2) zwischen der Anfangstemperatur T_0 des Körpers (für $t = 0$) und der Temperatur T nach Ablauf der Zeit t , so folgt

$$T(t) = T_u + (T_0 - T_u) \exp(-at). \quad (3)$$

Dies ist die integrale Form des Newton'schen Abkühlungsgesetzes.

AUFGABEN

1. Aufnahme der Eichkurve $U_{\text{Th}} = f(T)$ eines Kupfer-Konstantan-Thermoelementes mit Hilfe der Fixpunkte Siedetemperatur des Wassers und den Erstarrungspunkten dreier Metalle.
2. Bestimmung der Thermokraft bei $0 \text{ }^\circ\text{C}$, $100 \text{ }^\circ\text{C}$ und $300 \text{ }^\circ\text{C}$ und Abschätzung der Messunsicherheit für diese Werte.
3. Messung der Abkühlungskurven zweier Messingkörper gleicher Masse, aber unterschiedlicher Oberfläche. Grafische Darstellung $\frac{T - T_u}{T_0 - T_u} = f(t)$ auf Exponentialpapier.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Die Thermospannung wird mit einem Digitalvoltmeter gemessen. Eine Lötstelle wird während der gesamten Versuchsdauer in Eiswasser ($0 \text{ }^\circ\text{C}$) auf konstanter Temperatur gehalten.

Für Aufgabe 1 wird die zweite Lötstelle in siedendes Wasser getaucht (1. Eichpunkt). Als weitere Eichpunkte dienen die Erstarrungspunkte von Zink, Blei und Zinn. Diese Metalle befinden sich in Eisengefäßen, die einzeln erhitzt werden können. Zum Eichen stecke man die zweite Löt-

stelle in die Bohrung der Gefäße und erhitze sie bis über den Schmelzpunkt des entsprechenden Metalls, aus Sicherheitsgründen jedoch nur bis zu den folgenden Werten:

Zn mit $T_S = 419 \text{ °C}$ bis 22 mV

Pb mit $T_S = 327 \text{ °C}$ bis 18 mV und

Sn mit $T_S = 232 \text{ °C}$ bis 12 mV.

Nach Erreichen des Maximalwertes entferne man den Bunsenbrenner und messe die Abkühlungskurve $U_{Th} = f(t)$, indem man alle 5 s die Thermospannung abliest. Beim Erstarren des Metalls tritt deutlich eine zeitliche Konstanz der Thermospannung auf, dieser Wert wird für die Eichkurve verwendet. Für Aufgabe 2 ermittle man für die angegebenen Temperaturen den Anstieg der Eichkurve mit Hilfe eines Spiegellineals. Für Aufgabe 3 wird auf den Brennerring ein Messingkörper gelegt und die Lötstelle des Thermoelementes in die Bohrung gesteckt. Der Messingkörper wird auf etwa 320 °C erhitzt und anschließend mit einem Ventilator abgekühlt. Man lese die Temperatur bis 150 °C alle 30 s, bis 50 °C alle 60 s ab. Mit dem zweiten Körper wird der Versuch wiederholt.

Ergänzend zum Digitalvoltmeter kann wahlweise ein Schreiber zur Messung des zeitlichen Verlaufs der Thermospannung benutzt werden. Bei diesem Schreiber bewegt sich die Schreibfeder mit konstanter Geschwindigkeit in x -Richtung (d.h. $x \sim t$), und der Ausschlag in y -Richtung ist proportional zur Thermospannung.

FRAGEN

1. Warum hat die Abkühlungskurve eines erstarrenden Metalls einen Bereich der zeitlichen Konstanz der Temperatur?
2. Kennen Sie weitere Gesetze, die durch die Exponentialfunktion beschrieben werden?
3. Welche Vor- und Nachteile hat ein Thermoelement gegenüber einem üblichen Glasthermometer?

E1 WHEATSTONESCHE BRÜCKE

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Elektrischer Widerstand, Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Gesetze, Potentiometer, Wheatstonesche Brücke.

1. Kirchhoffsche Gesetze

Wird an einen elektrischen Leiter eine Spannung U angelegt und es fließt ein Strom I , dann definiert man das Verhältnis

$$R = \frac{U}{I} \quad (1)$$

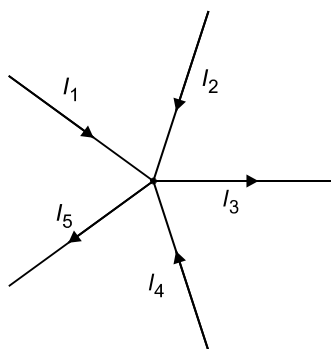
(SI-Einheit: $1 \Omega = 1 \text{ V}/1 \text{ A}$) als den Widerstand des Leiters.

Falls R nur vom Verhältnis U/I und nicht von den Einzelgrößen selbst abhängt, wird R Ohmscher Widerstand genannt. Es gilt dann das Ohmsche Gesetz

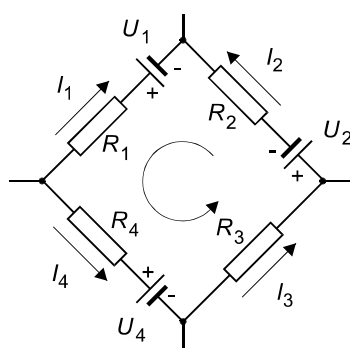
$$U = R I, \quad (2)$$

in dem $R = \text{const.}$ vorausgesetzt wird.

Zur Berechnung der Ströme und Spannungen in Netzwerken - darunter versteht man jede beliebige Kombination aus Spannungsquellen, Widerständen und Leitungsdrähten - benötigt man



a) Knotensatz



b) Maschensatz

Abb. 1 KIRCHHOFFSCHE GESETZE

neben dem Ohmschen Gesetz die Kirchhoffschen Sätze:

1. Knotensatz: In jedem Knotenpunkt einer Schaltung ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme (Abb. 1a)). Gibt man den zufließenden Strömen positives, den wegfließenden Strömen negatives Vorzeichen, dann erhält der Knotensatz die Form:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0. \quad (3)$$

2. Maschensatz: In jeder Masche eines Netzwerkes (Abb. 1b) ist die Summe der Spannungen aller Spannungsquellen gleich der Summe der Spannungsabfälle an den Widerständen der Masche:

$$\sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n R_i I_i. \quad (4)$$

Für die praktischen Berechnungen muss für jede Masche ein Umlaufsinn und für jeden Zweig der Masche eine Zählrichtung des Stromes festgelegt werden; diese Festlegungen können willkürlich erfolgen. Zur Berechnung einer Masche (Abb. 1b)) gehe man von einem Knotenpunkt der Masche aus und berechne im Umlaufsinn die Summe der Spannungen und der Spannungsabfälle. Wird eine Spannungsquelle vom Minus- zum Pluspol durchlaufen, rechnet man die Spannung positiv, andernfalls negativ. Stimmen angenommene (technische) Stromrichtung und Umlaufsinn überein, so gilt der Spannungsabfall am Widerstand als positiv, andernfalls negativ. Für die dargestellte Masche erhält man bei Beachtung dieser Regeln

$$-U_1 + U_2 + U_4 = I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_4 R_4.$$

2. Widerstandsnetzwerke

Werden Ohmsche Widerstände $R_1, R_2 \dots R_n$ in einem Gleichstromkreis zusammengeschaltet, so können sie zu einem resultierenden Widerstand R_g zusammengefasst werden. Unter Anwendung des Ohmschen Gesetzes und der Kirchhoffschen Sätze ergibt sich

bei Reihenschaltung
$$R_g = \sum_{i=1}^n R_i, \quad (5)$$

bei Parallelschaltung
$$1/R_g = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (6)$$

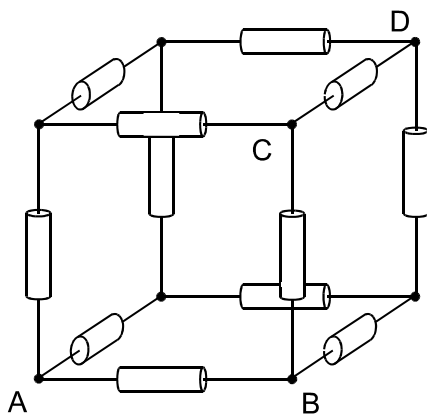


Abb. 2 WIDERSTANDSWÜRFEL

Mit diesen Formeln lassen sich kompliziertere Netzwerke oft einfacher berechnen als durch die direkte Anwendung der Kirchhoffschen Sätze (Gl. (3) u. (4)). Beispielsweise erhält man für zwölf gleichgroße Widerstände R , die die

Kanten eines Würfels bilden (Abb. 2), folgende Werte für den Gesamtwiderstand R_g

zwischen A und B (Würfelkante)
$$R_g = 7/12 \cdot R \quad (7)$$

zwischen A und C (Flächendiagonale)
$$R_g = 3/4 \cdot R \quad (8)$$

zwischen A und D (Raumdiagonale)
$$R_g = 5/6 \cdot R \quad (9)$$

3. Widerstandsmessung

Auf der Grundlage der Definition des Widerstandes (Gl. (1)) könnte eine Bestimmung von R durch die Messung von Spannung und Strom mit einem Schaltungsaufbau nach

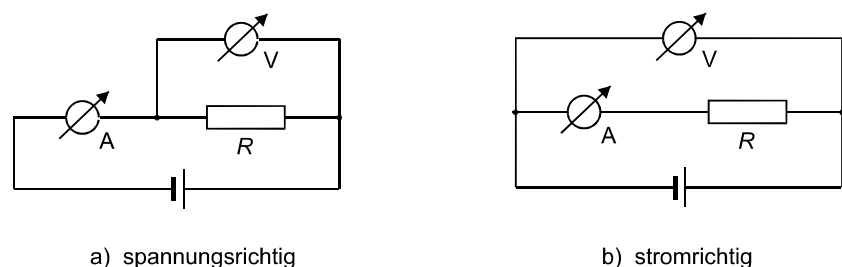


Abb. 3 MESSUNG VON STROM UND SPANNUNG

Abb. 3 a) oder 3 b) erfolgen. Beide Schaltungen führen aber zu systematischen Fehlern bei der Bestimmung von R . Bei der sog. „spannungsrichtigen“ Schaltung (Abb. 3 a)) wird die Spannung am Widerstand R korrekt gemessen, aber der Strommesser A erfasst auch den durch den Span-

nungsmesser V fließenden Strom. Der Strom würde nur dann richtig gemessen, wenn der Spannungsmesser einen unendlich hohen Innenwiderstand hätte. Mit der sog. „stromrichtigen“ Schaltung könnte die Spannung nur dann richtig gemessen werden, wenn der Innenwiderstand des Strommessers $R_A = 0$ wäre. Einfache Labormessmittel erfüllen diese Anforderungen im Allgemeinen nicht hinreichend. Auf der Grundlage der Kirchhoffschen Gesetze wäre eine Korrektur dieser systematischen Fehler möglich, würde aber die Kenntnis bzw. eine zusätzliche Bestimmung der Innenwiderstände der benutzten Messgeräte erfordern.

Diese insbesondere die Präzisionsmessung von Widerständen erschwerenden Umstände können bei einer Messung von R mit der Wheatstoneschen Brücke (Abb. 4) umgegangen werden.

Sie besteht aus einem unbekanntem Widerstand R_x , einem Normalwiderstand R_N , einem Potentiometer P , einem empfindlichen Anzeigegerät I , einer Spannungsquelle U_0 und einem Schalter S . Der Widerstand des Potentiometers wird durch einen verstellbaren Schleifkontakt in die Teilwiderstände R_1 und R_2 geteilt. Zur Messung wird das Potentiometer so eingestellt, dass das Anzeigegerät bei geschlossenem Schalter keinen Ausschlag zeigt, d.h. zwischen den Punkten A und B keine Potentialdifferenz besteht und damit kein Strom fließt. In diesem Fall spricht man vom Brückengleichgewicht und die Kirchhoffschen Gesetze liefern nach dem Maschensatz (Gl. (4)) und nach dem Knotensatz (Gl. (3)):

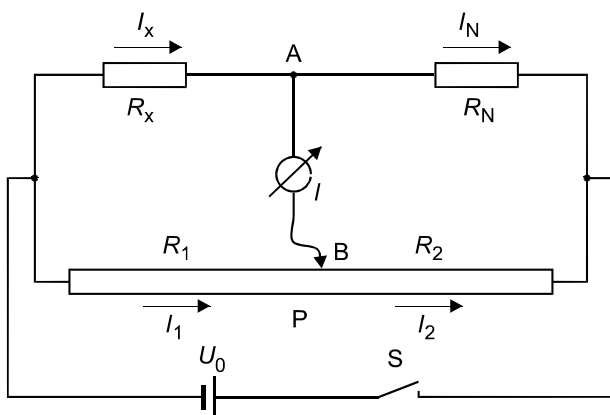


Abb. 4 BRÜCKENSCHALTUNG

Der Widerstand des Potentiometers wird durch einen verstellbaren Schleifkontakt in die Teilwiderstände R_1 und R_2 geteilt. Zur Messung wird das Potentiometer so eingestellt, dass das Anzeigegerät bei geschlossenem Schalter keinen Ausschlag zeigt, d.h. zwischen den Punkten A und B keine Potentialdifferenz besteht und damit kein Strom fließt. In diesem Fall spricht man vom Brückengleichgewicht und die Kirchhoffschen Gesetze liefern nach dem Maschensatz (Gl. (4)) und nach dem Knotensatz (Gl. (3)):

dem Maschensatz (Gl. (4)) und nach dem Knotensatz (Gl. (3)):

$$\begin{aligned} I_x R_x &= I_1 R_1 & \text{bzw.} & & I_N R_N &= I_2 R_2 \\ I_x &= I_N & \text{bzw.} & & I_1 &= I_2 \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhält man

$$R_x = R_N \frac{R_1}{R_2} \quad (10)$$

Zur Bestimmung des Widerstandes R_x ist somit nur die Kenntnis des Normalwiderstandes R_N sowie des Widerstandsverhältnisses R_1/R_2 notwendig. Das Anzeigegerät wird ausschließlich als Spannungsindikator zum Abgleichen der Messbrücke benutzt und muss deshalb nicht geeicht sein. Die Betriebsspannung U_0 muss weder bekannt noch besonders konstant sein, eine Verringerung würde aber zu sinkender Empfindlichkeit der Anzeige und damit zur Herabsetzung der Messgenauigkeit führen.

AUFGABEN

1. Es sind drei Widerstände einzeln und in 5 verschiedenen Dreierkombinationen je sechsmal auszumessen.
2. Die Widerstände für die Dreier-Kombinationen sind außerdem aus den Messwerten der Einzelwiderstände zu berechnen (Gl. (5) bzw. (Gl. (6)) und mit den Messwerten der Dreierkombinationen zu vergleichen.
3. An einem Widerstandswürfel aus 12 gleichgroßen Einzelwiderständen R sind die jeweiligen Gesamtwiderstände über eine Kante, eine Flächendiagonale und eine Raumdiagonale zu messen und daraus R zu berechnen (Gl. (7),(8),(9)).

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Der Schaltungsaufbau erfolgt nach Abb. 4. Das Potentiometer besteht aus einem homogenen Nickeldraht der Länge $l = 1$ m mit einem verschiebbaren Schleifkontakt, welcher den Draht in zwei Abschnitte mit den Teillängen x und $l - x$ unterteilt. Dadurch wird das Widerstandsverhältnis R_1/R_2 durch ein Längenverhältnis ausgedrückt und aus der Gleichung für die Wheatstone-sche Brücke (Gl. (9)) folgt

$$R_x = R_N \frac{x}{l - x}. \quad (11)$$

Der Normalwiderstand R_N wird durch Dekadenwiderstände gebildet. Beim Messvorgang wird zunächst der unempfindlichste Messbereich des Anzeigeeinstrumentes gewählt, der Schleifkontakt etwa in Mittelstellung geschoben und bei wiederholtem kurzzeitigen Tasten des Schalters das Brückengleichgewicht durch eine passende Wahl des Normalwiderstandes R_N annähernd herbeigeführt. Die anschließende Feineinstellung erfolgt nur noch mit dem Schleifkontakt des Potentiometers, wobei das Brückengleichgewicht jeweils durch kurze Schalterbetätigung getestet wird. Bei abgeglichener Brücke darf auch im empfindlichsten Messbereich keine Zeigerbewegung bemerkbar sein.

Theoretisch könnte bei beliebigem Normalwiderstand R_N jeder Widerstand R_x gemessen werden (Gl. (9)), da der Quotient R_1/R_2 alle Werte zwischen Null und unendlich annehmen kann. Die Messgenauigkeit wird jedoch am größten für $R_x = R_N$, d. h. $R_1/R_2 = 1$. Dies lässt sich durch Diskussion der relativen Messunsicherheit von R_x begründen. Bei Vernachlässigung des Fehlers von l gilt:

$$\frac{u_{R_x}}{R_x} = \left| \frac{u_{R_N}}{R_N} \right| + \left| \frac{l u_x}{x(l - x)} \right|.$$

Das Minimum der Messunsicherheit liegt vor, wenn der Nenner $x(l - x)$ maximal wird, d. h. bei $x = l/2$ bzw. $R_1 = R_2$. Der Normalwiderstand sollte also immer dem Messproblem angepasst werden.

FRAGEN

1. Was besagen die Kirchhoffschen Gesetze und wie sind sie auf die Wheatstonesche Brücke anzuwenden?
2. Leiten Sie den Gesamtwiderstand für die Reihenschaltung (Gl. (5)) und die Parallelschaltung (Gl. (6)) von Einzelwiderständen ab.
3. Leiten Sie die Beziehungen Gl. (7) bis Gl. (9) für den Widerstandswürfel ab.
4. Diskutieren Sie Vor- und Nachteile Ihnen bekannter Methoden zur Widerstandsmessung.
5. Wie verändert man die Messbereiche von Strom- und Spannungsmessern?
6. Was versteht man unter dem spezifischen Widerstand?

E3 TRANSFORMATOR

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Spule im Wechselstromkreis, magnetische Induktion, Induktionsfluss, Induktionsgesetz, Zeigerdiagramm, Blindstrom, Wirkstrom.

1. Aufbau des Transformators: Der Transformator dient zur verlustarmen Änderung der Amplituden von Wechselspannungen. Die Transformierbarkeit ist ein wesentlicher Vorteil der Wechselspannungen gegenüber Gleichspannungen. Prinzipiell besteht ein Transformator aus zwei räumlich benachbarten Spulen, einer Primärspule (Windungszahl n_p), an der die Eingangs- oder

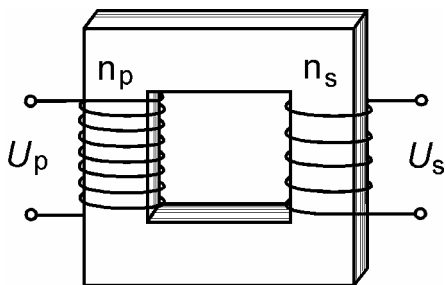


Abb.1 TRANSFORMATOR

Primärspannung U_p liegt und einer Sekundärspule (Windungszahl n_s), an der die veränderte Ausgangs- oder Sekundärspannung U_s abgegriffen wird. In den meisten Fällen sind die Spulen auf einen gemeinsamen Kern aus einem ferromagnetischen Material gewickelt (Abb. 1).

Für Niederfrequenztransformatoren und insbesondere Transformatoren für technische Wechselströme benutzt man als Kernmaterial Weicheisen mit geringer Remanenz zur Minimierung von Hystereseverlusten (Versuch E 11) und

hoher Permeabilität zur Erzielung einer hohen Induktivität. Zur Vermeidung von Wirbelstromverlusten wird der Kern aus dünnen Blechen geschichtet, zwischen denen sich eine isolierende Papier- oder Lackschicht befindet. Den nicht völlig vermeidbaren Streuverlusten begegnet man, indem der Kern in sich geschlossen ausgeführt wird und einen in Bezug auf die beabsichtigte Leistungsübertragung ausreichend großen Querschnitt erhält. Die Sekundärspule besitzt häufig mehrere Anzapfungen, so dass der Abgriff unterschiedlicher Spannungen möglich ist. Bei Stelltransformatoren erfolgt ein kontinuierlicher Abgriff durch Schleifkontakte. Hochfrequenztransformatoren besitzen anstelle eines Eisenkerns verlustarme Ferritkerne; bei sehr hohen Frequenzen wird auf Kerne ganz verzichtet.

Die weiteren Betrachtungen erfolgen zunächst für einen idealen, d. h. verlustfrei arbeitenden Transformator. Die Auswirkung der am realen Transformator auftretenden Leistungsverluste auf den Wirkungsgrad wird in Abschn. 3 behandelt.

2. Wirkungsprinzip des idealen Transformators: Legt man bei zunächst offener Sekundärspule, d.h. bei einem unbelasteten Transformator, an die Primärspule mit dem induktiven Widerstand ωL (ω = Kreisfrequenz) eine Wechselspannung $U_p = U_m \sin \omega t$, so fließt der gegenüber U_p um den Phasenwinkel $\pi/2$ nacheilende Wechselstrom

$$I_p = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

(Versuch E4). Im Primärkreis fließt ein sog. Blindstrom, welcher das zuführende Leitungssystem umso weniger belastet, je größer die Induktivität L ist. Der Wechselstrom $I_p(t)$ erzeugt im Eisen-

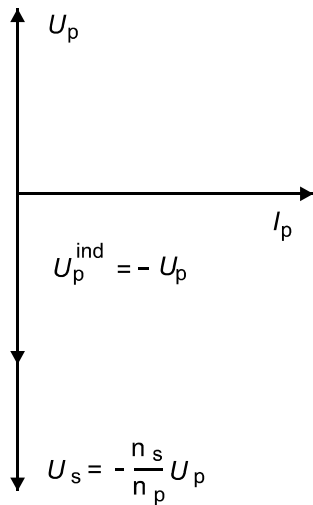


Abb.2 UNBELASTETER TRANSFORMATOR

kern das magnetische Feld $B(t)$ und den magnetischen Kraftfluss $\Phi(t)$, welcher - durch den Eisenkern geführt - sowohl die Primärspule als auch die Sekundärspule in gleicher Weise durchsetzt. Der sich zeitlich ändernde Induktionsfluss führt nach dem Induktionsgesetz an den Spulenklennen zu den induzierten Spannungen

$$U_p^{\text{ind}} = -n_p d\Phi / dt \quad \text{und} \quad U_s^{\text{ind}} = -n_s d\Phi / dt. \quad (1)$$

Beachtet man die Forderung des Kirchhoffschen Maschensatzes $U_p^{\text{ind}} = -U_p$ und bezeichnet U_s^{ind} im Weiteren abkürzend mit U_s , so folgt aus Gl.(1)

$$U_s / U_p = -n_s / n_p. \quad (2)$$

Das Verhältnis n_s / n_p bezeichnet man als Übersetzungsverhältnis des Transformators. Es wird in der Praxis aus dem Span-

nungsverhältnis im Leerlauf bestimmt.

Die Phasenbeziehungen zwischen U_p , I_p , U_p^{ind} und U_s sind in Abb.2 dargestellt.

Veränderte Verhältnisse ergeben sich für den belasteten Transformator, d.h. bei Anschluss eines Verbrauchers an die Sekundärspule. Der am einfachsten zu behandelnde Fall liegt vor, wenn ein ohmscher Widerstand angeschlossen wird. Der in diesem Fall phasengleich zur Sekundärspannung U_s fließende Sekundärstrom I_s erzeugt einen magnetischen Fluss Φ_s , welcher den ursprünglichen Induktionsfluss nach der Lenzschen Regel schwächen würde. Damit dennoch im Primärkreis der Maschensatz erfüllt bleibt, muss weiterhin $U_p^{\text{ind}} = -U_p$ sein. Deshalb muss in der Primärspule phasengleich mit U_p zusätzlich ein Strom I_p^* (siehe unten Gl.(3)) fließen, so dass der von I_p^* erzeugte magnetische Fluss Φ_p^* den Fluss Φ_s gerade kompensiert (Abb.3). Beim belasteten Transformator setzt sich der fließende Primärstrom I_p^{**} vektoriell aus den Komponenten Blindstrom I_p und Wirkstrom I_p^* zusammen. Zwischen I_p^{**} und U_p besteht die Phasendifferenz φ . Der Energieerhaltungssatz verlangt, dass die am ohmschen Widerstand im Sekundärkreis entzogene Energie durch die Stromquelle im Primärkreis aufgebracht werden muss.

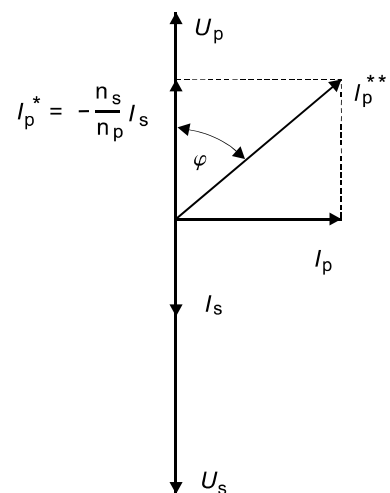


Abb.3 BELASTETER TRANSFORMATOR

Die fundamentale Beziehung Φ (belastet) = Φ (unbelastet) ist zunächst überraschend aber für das Verständnis des Transformators wesentlich. Sie ist auch für den realen Transformator sehr gut erfüllt.

Für den idealen Transformator führt die Leistungsgleichheit in Primär- und Sekundärkreis $U_s I_s = U_p I_p^*$ und Einsetzen von Gl.(2) auf den Primärwirkstrom

$$I_p^* = -\frac{n_s}{n_p} I_s. \quad (3)$$

Die Leistung im Primärkreis

$$P_p = U_p I_p^* = U_p I_p^{**} \cos \varphi \quad (4)$$

ist Null für den unbelasteten idealen Transformator und steigt mit wachsendem Wirkstrom I_p^* und damit abnehmender Phasenverschiebung φ bei steigender Belastung.

3. Wirkungsgrad des realen Transformators: Als Wirkungsgrad η des Transformators definiert man das Verhältnis der Wirkleistungen

$$\eta = P_s / P_p \quad (5)$$

im Primär- und Sekundärkreis. Er ist beim realen (im Unterschied zum idealen) Transformator immer kleiner als 1, weil von der Stromquelle im Primärkreis zusätzlich zur im Sekundärkreis entzogenen Arbeit die eingangs erwähnten Energieverluste sowie die Wärmeverluste an den ohmschen Widerständen der Transformatorspulen aufgebracht werden müssen. Der Wirkungsgrad eines nur mit einem ohmschen Widerstand belasteten Transformators beträgt nach Gl.(7) und Gl.(6)

$$\eta = \frac{U_s I_s}{U_p I_p^{**} \cos \varphi}. \quad (6)$$

Transformatoren für technische Wechselströme erreichen Wirkungsgrade über 95%.

AUFGABEN

1. Bestimmung des Übersetzungsverhältnisses eines Transformators aus der grafischen Darstellung $U_s = f(U_p)$ für den unbelasteten Fall.
2. Bestimmung des Leerlaufstromes und der Leerlaufleistung eines unbelasteten Transformators für ca. 40 V Primärspannung.
3. Messung der Leistungen im Primär- und Sekundärkreis in Abhängigkeit von der ohmschen Belastung.
4. Grafische Darstellungen des Primärstromes I_p^{**} , des Wirkungsgrades η und der Phasenverschiebung φ als Funktion des Sekundärstroms.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Für Aufgabe 1, die Messung des Übersetzungsverhältnisses, wird die in Abb. 4 angegebene Schaltung benutzt. Über ein Potentiometer im Primärkreis kann die Spannung im Bereich von 0 V bis ca. 40 V variiert werden. Das Übersetzungsverhältnis wird aus dem Anstieg der grafischen Darstellung $U_S = f(U_P)$ entnommen (Gl. (2)).

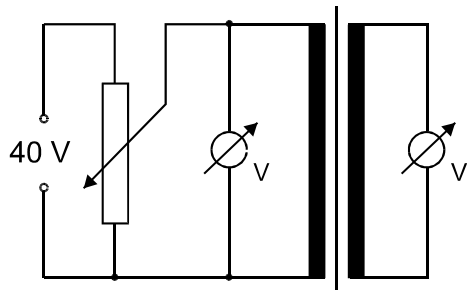


Abb.4 ÜBERSETZUNGSVERHÄLTNIS

Für die Aufgaben 2 und 3 wird die Schaltung nach Abb. 5 verwendet. Die Leistung P_P im Primärkreis wird mit dem Wattmeter W gemessen, außerdem wird im Primärkreis der Strom I_P^{**} und die Spannung U_P mit separaten Instrumenten gemessen. Damit kann aus P_P unmittelbar die Phasenverschiebung berechnet werden (Gl. (4)). Bei der Messung von I_P^{**} (das ist der

Effektivwert des Primärstromes!) ist zu beachten, dass ein so genannter „wahrer“ Effektivwertmesser (True RMS) benutzt werden muss. Messgeräte ohne diese ausdrückliche Kennzeichnung sind in der Regel für harmonische Spannungen bzw. Ströme geeicht. Diese Voraussetzung ist für den Primärstrom wegen der Hystereseverluste im Eisenkern des Trafos nicht erfüllt. Diese Verluste sind der nicht widerstandslosen Umagnetisierung der vormagnetisierten Bereiche (Weißsche Bezirke) im ferromagnetischen Material geschuldet (siehe Versuch E 11 Magnetische Hysterese).

Im Sekundärkreis wird die Leistung $P_S = U_S I_S$ ermittelt und anschließend der

Wirkungsgrad (Gl. (6)) bestimmt. Zur Messung der Leerlaufparameter wird der Sekundärkreis am Transformator unterbrochen.

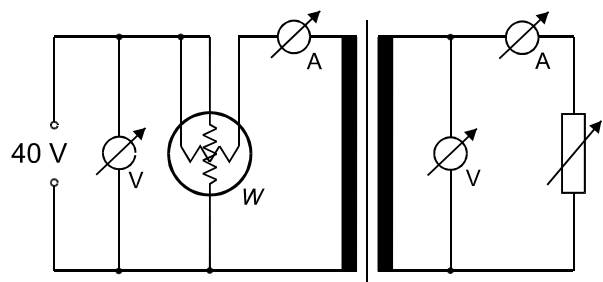


Abb.5 BELASTETER TRANSFORMATOR

FRAGEN

1. Wie lautet das Faradaysche Induktionsgesetz?
2. Welche Verluste treten beim Transformator auf?
3. Unter welcher Voraussetzung ist beim Transformator das Verhältnis U_S / U_P (siehe Gl.(2)) unabhängig von der Belastung?
4. Welche Anwendungsbeispiele für Transformatoren kennen Sie?

E4 WECHSELSTROMWIDERSTÄNDE

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Ohmscher, induktiver und kapazitiver Widerstand im Wechselstromkreis, Ohmsches Gesetz, Darstellung von Widerständen in der komplexen Ebene, Reihenschwingkreis, Resonanz.

In der Wechselstromlehre fasst man Spannung, Strom und Widerstände vorteilhaft als komplexe Größen auf und stellt sie als Zeiger dar. Benutzt man für die Wechselspannung bzw. den Wechselstrom die komplexen Ausdrücke

$$u = U_m e^{j\omega t} = U_m (\cos \omega t + j \sin \omega t) \quad (1)$$

$$i = I_m e^{j(\omega t - \varphi)} = I_m [\cos(\omega t - \varphi) + j \sin(\omega t - \varphi)] \quad (2)$$

mit $j = \sqrt{-1}$ als imaginärer Einheit, ω als Kreisfrequenz und φ als Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung, so gilt das Ohmsche Gesetz in komplexer Schreibweise

$$u = Zi. \quad (3)$$

Z ist der Wechselstromwiderstand, der im Allgemeinen eine komplexe Größe ist. Besteht zwischen Strom und Spannung eine Phasendifferenz φ , so ist diese im Zeiger des Widerstandes enthalten

$$Z = |Z|e^{j\varphi}. \quad (4)$$

Der Betrag des Wechselstromwiderstandes $|Z|$ heißt Scheinwiderstand. Er kann bestimmt werden durch Messung der Scheitel- oder der Effektivwerte von Strom und Spannung, denn durch

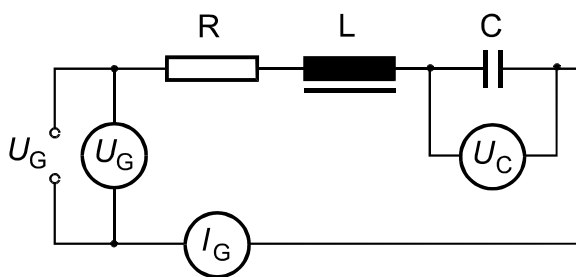


Abb.1 REIHENSCHWINGKREIS

Einsetzen in Gl. (3) erhält man für die Scheitelwerte

$$U_m e^{j\omega t} = |Z|e^{j\varphi} \cdot I_m e^{j\omega t} e^{-j\varphi}$$

$$U_m = |Z| \cdot I_m \quad (5)$$

und durch Division durch $\sqrt{2}$ für die Effektivwerte

$$U_{\text{eff}} = |Z| \cdot I_{\text{eff}}. \quad (6)$$

Der Wechselstromwiderstand Z setzt sich im Allgemeinen aus ohmschen, induktiven und kapazitiven Anteilen zusammen. Durch die formale Einführung der komplexen Widerstandsoperatoren Z_R , Z_L und Z_C erreicht man eine übersichtliche Beschreibung der Verhältnisse im Wechselstromkreis in Analogie zur Behandlung im Gleichstromkreis.

Für einen ohmschen Widerstand R ist

$$Z_R = R \quad \text{und} \quad |Z_R| = R \quad (\text{Wirkwiderstand}), \quad (7)$$

für einen induktiven Widerstand ist

$$Z_L = j\omega L \quad \text{und} \quad |Z_L| = \omega L \quad (\text{induktiver Blindwiderstand}), \quad (8)$$

für einen kapazitiven Widerstand ist

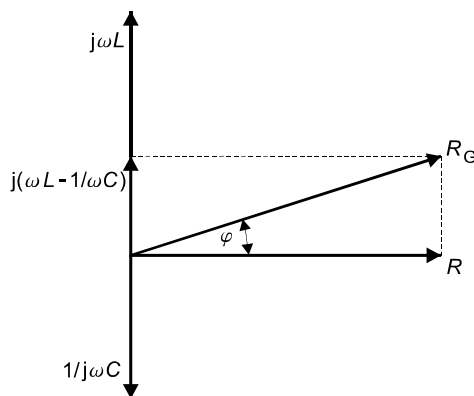
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} \quad \text{und} \quad |Z_C| = \frac{1}{\omega C} \quad (\text{kapazitiver Blindwiderstand}).$$

(9)

Zur Berechnung des Wechselstromwiderstandes Z eines beliebigen Wechselstromkreises gelten für die Widerstandsoperatoren R , $j\omega L$ und $-\frac{j}{\omega C}$ die aus der Gleichstromlehre bekannten

Gesetze für Reihen- und Parallelschaltung. Für eine Reihenschaltung aus R , L und C (Reihenschwingkreis, Abb. 1) ist der Wechselstromwiderstand

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \quad (10)$$



In der komplexen Ebene (Abb. 2) ergibt sich Z durch Vektoraddition von R und $j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ und für den

Betrag von Z erhält man (Pythagoras)

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (11)$$

Verändert man L , C oder ω kontinuierlich, so nimmt für $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ der Widerstand $|Z| = R$ ein Minimum

und der Strom I ein Maximum an. Man spricht dann von Resonanz im Reihenschwingkreis mit der Resonanzfrequenz (Thomsonsche Formel)

$$\omega_{\text{res}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (12)$$

Das Strommaximum bei Resonanz kann zu Teilspannungen $(U_C)_{\text{Res}} = (U_L)_{\text{Res}}$ an den Blindwiderständen führen, die größer sind als die am Reihenschwingkreis anliegende Gesamtspannung U_G . Das Verhältnis

$$\rho = \frac{(U_C)_{\text{Res}}}{U_G} = \frac{(U_L)_{\text{Res}}}{U_G} = \frac{1}{\omega_{\text{Res}} CR} = \frac{\omega_{\text{Res}} L}{R} \quad (13)$$

wird Spannungsüberhöhung genannt.

AUFGABEN

1. Bestimmung der Kapazität C eines Kondensators aus der graphischen Darstellung des Kondensatorstromes I_C als Funktion der Frequenz f (Gl. (17)).
2. Bestimmung der Induktivität L und des Ohmschen Widerstandes R einer Spule aus den graphischen Darstellungen: Quadrat des Scheinwiderstandes R_S^2 als Funktion des Quadrates der Frequenz f^2 (Gl. (19)).

3. Bestimmung des Resonanzverhaltens eines Reihenschwingkreises bei Frequenzänderung. Graphische Darstellung des Stromes I und der Spannungsüberhöhung U_C/U_G als Funktion der Frequenz f (Gl. (13)) in einem gemeinsamen Diagramm.
4. Berechnung der Resonanzfrequenz aus den Werten der Aufgaben 1 und 2 (Gl. (20)) und Vergleich mit dem in Aufgabe 3 bestimmten Wert. Fehlerdiskussion.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Zur Erzeugung der harmonischen Wechselspannung dient ein Tonfrequenz-RC-Generator, dessen Ausgangsspannung $U_G = 1,80 \text{ V}$ fest eingestellt und dessen Frequenz variabel ist. Alle Strom- und Spannungsmessungen werden mit einem Zweikanal-Oszilloskop durchgeführt, dessen Bedienung der Platanleitung zu entnehmen ist. **Bei allen Messungen schalte man das Oszilloskop zuletzt ein und zuerst aus!**

Die Verstärkung der beiden Vertikalverstärker Y_A bzw. Y_B des Oszilloskops kann mit dem Stufenschalter (hinterer Drehknopf) in 11 Stufen V_j von 20 VOLTS/DIV. bis 0,01 VOLTS/DIV. (wobei 1 DIV. = 1 cm) und in jeder Stufe kontinuierlich (vorderer Drehknopf) verändert werden. Für alle Messaufgaben werden bei beiden Systemen die vorderen Drehknöpfe bis zum Einrasten (Anschlag) nach rechts gedreht, nur dann stimmt die Kalibrierung der Verstärker.

Spannungsmessung: Zur Messung einer unbekanntenen Spannung U wird jeweils die Stufe V_j gewählt, die innerhalb des Messrasters des Bildschirms das größtmögliche Messsignal bewirkt. Ist h die Gesamthöhe des Signals in cm, so berechnet sich die Spannung U nach

$$U = h \cdot V_j. \quad (14)$$

Strommessung: Sie erfolgt durch die Bestimmung des Spannungsabfalls U an einem Präzisionswiderstand (Dekadenwiderstand) von $R_p = 10 \Omega$. Der Strom berechnet sich nach

$$I = \frac{U}{R_p} = h \frac{V_j}{R_p}. \quad (15)$$

Der Widerstand R_p ist in guter Näherung gegenüber den Widerständen von Spule und Kondensator vernachlässigbar.

Für Aufgabe 1 (Schaltung nach (Abb. 3)) wird die Generatorspannung ($U_G = 1,80 \text{ V}$) dem Vertikalverstärker Y_B zugeführt. Mit dem anderen Vertikalverstärker Y_A wird der Spannungsabfall über R_p gemessen und daraus der Kondensatorstrom I_C berechnet (Gl. (15)). Die Generatorfrequenz wird von 1 kHz bis 15 kHz in Schritten von 1 kHz variiert. Für den kapazitiven Widerstand R_C gilt

$$R_C = \frac{U_G}{I_C} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}, \quad (16)$$

und daraus folgt

$$I_C = 2\pi C U_G f. \quad (17)$$

Aus der graphischen Darstellung von I_C als Funktion der Frequenz f (Gl. (17)) bestimme man die Kapazität C des Kondensators.

Für Aufgabe 2 wird in der Schaltung nach Abb. 3 der Kondensator C durch die Spule L ersetzt.

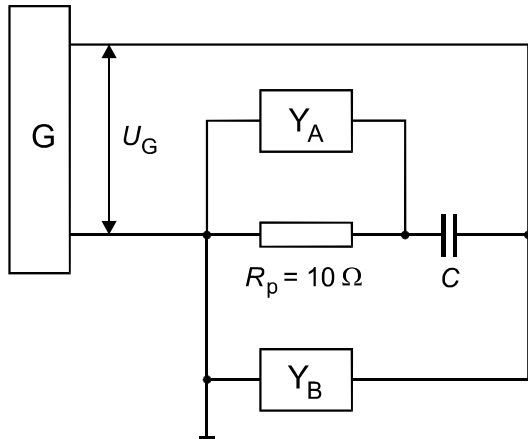


Abb.3 KAPAZITÄTSMESSUNG

Die Messung des Spulenstromes I_L erfolgt wie in Aufgabe 1. Die Generatorfrequenz wird im Bereich **a** von 10 Hz bis 100 Hz in Schritten von 10 Hz und im Bereich **b** von 100 Hz bis 500 Hz in Schritten von 100 Hz variiert. Für beide Frequenzbereiche stelle man grafisch das Quadrat des Scheinwiderstandes R_S^2 als Funktion des Frequenzquadrates f^2 dar (Gl. (19)) und ermittle aus der grafischen Darstellung im Bereich **a** den ohmschen Widerstand R (Schnittpunkt mit der R_S^2 -Achse) und aus der im Bereich **b** die Induktivität L aus dem Anstieg. Für den Scheinwider-

stand R_S gilt (Gl. 11)

$$R_S = \frac{U_G}{I_L} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{R^2 + 4 \pi^2 f^2 L^2} \quad (18)$$

bzw.

$$R_S^2 = R^2 + 4\pi^2 L^2 f^2. \quad (19)$$

Für Aufgabe 3 (Schaltung nach Abb. 4) wird die Spannung U_C am Kondensator mit dem Vertikalverstärker Y_B und der Strom I im Schwingkreis (Spannungsabfall über R_p) mit dem Vertikalverstärker Y_A gemessen (Gl. (14) bzw. (15)). Die Generatorfrequenz wird von 100 Hz bis 1200 Hz in Schritten von 100 Hz variiert, wobei im Resonanzgebiet die Schritte soweit verringert werden müssen, dass das Strommaximum möglichst genau erfasst werden kann.

Graphisch trage man den Strom I und das Spannungsverhältnis U_C / U_G als Funktion der Frequenz f auf. Für die Resonanzfrequenz f_{Res} bestimmt man die Spannungsüberhöhung $\rho = \frac{U_{CRes}}{U_G}$ (Gl. (13)). Daraus

berechne man R und vergleiche diesen Wert mit dem aus Aufgabe 2 (R ist der ohmsche Widerstand der Spule).

Nach Abschluss aller Messungen stelle man bei der Resonanzfrequenz f_{Res} unter Benutzung der Stufen- und Feinverstärkung beider Kanäle gleichgroße Signale von Strom und Spannung unter voller Ausnutzung der Bildschirmhöhe ein und bestimme die Phasenverschiebung φ von Strom und Spannung!

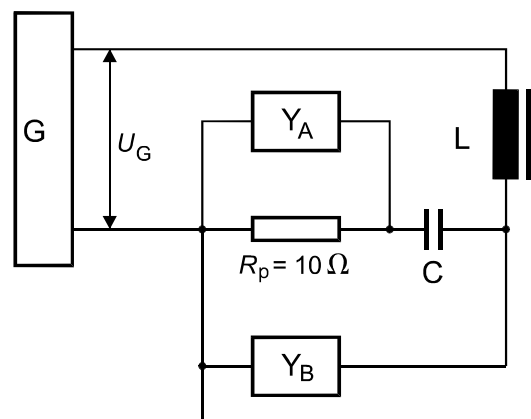


Abb.4 MESSUNG AM REIHENSCHWINGKREIS

Für Aufgabe 4 benutze man die Thomsonsche Schwingungsgleichung

$$f_{\text{Res}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (20)$$

FRAGEN

1. Leiten Sie die Gleichung für die Phasendifferenz φ zwischen Strom I und Gesamtspannung U_G im Reihenschwingkreis ab (siehe hierzu Abb. 2). Wie groß ist die Phasendifferenz im Resonanzfall?
2. Warum kann mit den am Versuchsplatz vorhandenen Geräten die Spannungsmessung zur Ermittlung der Spannungsüberhöhung (Aufgabe 3) nur am Kondensator und nicht auch an der Spule erfolgen?
3. Wie lauten die Additionsgesetze für Induktivitäten und Kapazitäten?

E5 GLEICHRICHTERSCHALTUNGEN

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Gleichrichtung, pn-Übergang, Halbleiterdiode, Effektivwerte von Strom und Spannung.

Gleichrichterschaltungen dienen der Umwandlung von Wechselspannungen in Gleichspannungen. Hierzu verwendet man als Gleichrichter bezeichnete Bauelemente (Halbleiter- oder Vakuumdioden), deren elektrischer Widerstand von der Polarität der angelegten Spannung abhängt.

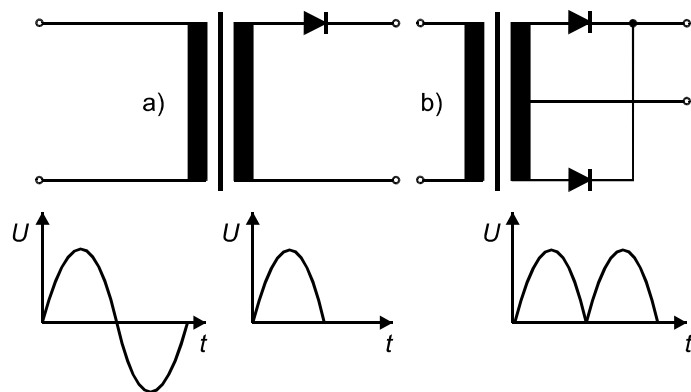


Abb. 1 GLEICHRICHTERSCHALTUNGEN

Anliegen einer harmonischen Wechselspannung $u = U_m \sin \omega t$ zeigt Abb. 1. Während bei der Einweggleichrichtung (Abb. 1a) nur die positiven (oder nur die negativen) Halbwellen ausgenutzt werden, tragen bei der Zweiweggleichrichtung (Abb. 1b) beide Halbwellen zur Gleichspannung bei. Die Zweiweggleichrichtung setzt allerdings einen Transformator mit Mittelanschluss voraus. Um die gleiche Amplitude wie bei der Einweggleichrichtung zu erreichen, muss von jeder Teilwicklung die gleiche Spannung wie bei der Einweggleichrichtung erzeugt werden. Die gleichgerichteten pulsierenden Gleichspannungen können durch einen zum Spannungsausgang parallel geschalteten Kondensator (Abb. 4) geglättet werden. Den zeitlichen Verlauf einer geglätteten Spannung für eine Einweggleichrichtung zeigt qualitativ Abb. 2 (ausgezogene Linie). Die verbleibende Welligkeit der gleichgerichteten Spannung hängt von der Größe des Kondensators, der Belastung und dem Innenwiderstand des Gleichrichters ab.

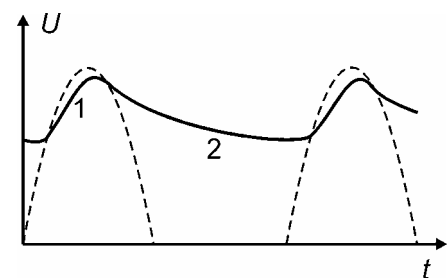


Abb.2

Die mathematische Beschreibung des Ladevorganges (Teil 1 der Kurve) ist schwierig, da sich die Ladespannung zeitlich ändert (gestrichelte Kurve) und der Innenwiderstand des Gleichrichters im Allgemeinen nicht konstant ist. Der Entladevorgang (Teil 2 der Kurve) erfolgt exponentiell mit negativem Exponenten.

Anzeige der Messinstrumente: Werden Drehspulinstrumente als Gleichspannungsmessgeräte verwendet, ist der Zeigerausschlag proportional dem Spannungsmesswert. Pulsiert die Gleichspannung, so wird wegen der Trägheit des Messsystems bei genügend großer Folgefrequenz $f = 1/T$ (T = Periodendauer) der zeitliche Mittelwert der Spannung

$$\bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad (1)$$

angezeigt. Bei Drehspulinstrumenten als Wechselspannungsmessgerät ist ein Gleichrichter vorgeschaltet, und der Zeigerausschlag zeigt Effektivwerte an, die durch die Beziehung

$$U_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt \quad (2)$$

definiert sind. Aufgrund dieser Unterschiede von Gleich- und Wechselspannungsinstrumenten zeigt der Spannungsmesser V_2 (Abb. 4) unterschiedliche Werte an, je nachdem welcher Instrumententyp verwendet wird. Die folgende Zusammenstellung der zeitlichen Mittelwerte und Effektivwerte bei unbelasteter Einweg- und Zweiweggleichrichtung ohne Glättungskondensator erklärt diesen Unterschied.

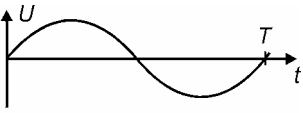
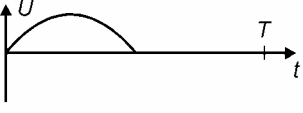
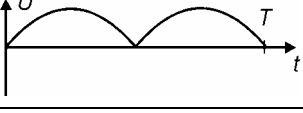
		Mittelwert \bar{U}	Effektivwert U_{eff}
Wechselspannung		0	$\frac{U_m}{\sqrt{2}}$
Gleichspannung (Einweg)		$\frac{U_m}{\pi}$	$\frac{U_m}{2}$
Gleichspannung (Zweiweg)		$\frac{2U_m}{\pi}$	$\frac{U_m}{\sqrt{2}}$

Abb. 3 MITTEL - UND EFFEKTIVWERTE

AUFGABEN

- Messung der zeitlichen Mittelwerte \bar{U} der Gleichspannungen als Funktion des Laststromes I für Ein- und Zweiweggleichrichtung jeweils mit und ohne Kondensator ($10 \mu\text{F}$). Grafische Darstellung der Ergebnisse in einem gemeinsamen Diagramm und Ergebnisdiskussion.
- Getrennt für die Einweg- und die Zweiweggleichrichtung sollen in jeweils gemeinsamen Diagrammen die Spannungsverläufe dargestellt werden für die Fälle:
 - keine Belastung, ohne Ladekondensator,
 - keine Belastung, mit Ladekondensator,

- c) mittlere Belastung, mit Ladekondensator.
3. Für die Einweg- und die Zweiweggleichrichtung bestimme man im Leerlauf die Gleichspannung \bar{U} und die Wechsellspannung U_{eff} und berechne aus beiden Angaben die Amplitude U_m (vgl. Tabelle in Abb. 3).

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Die Schaltung der Zweiweggleichrichtung (Abb. 4) wird unter Verwendung von Halbleiterdioden aufgebaut. Der Laststrom wird mit dem Regelwiderstand R eingestellt. Aus der aufge-

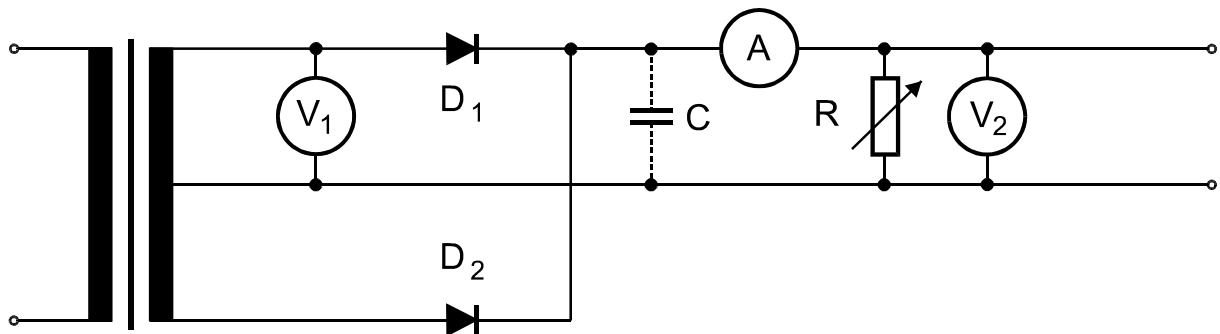


Abb. 4 SCHALTUNG ZUM VERSUCH

bauten Zweiweggleichrichtung erhält man die Einweggleichrichtung durch Unterbrechung des Katoden- oder Anodenanschlusses von D_2 . Für V_1 verwende man ein für Wechsellspannungen (Effektivwertanzeige U_{eff}) geeichtes Messgerät. Für Aufgabe 2 werden die Spannungsverläufe vom Bildschirm des Oszillografen abgezeichnet. Für Aufgabe 3 werden Lastwiderstand R und Kondensator C aus der Schaltung entfernt. Man vergleiche die aus den Messungen mit V_1 und V_2 ermittelten Amplitudenwerte.

FRAGEN

1. Erläutern Sie das Wirkprinzip einer Halbleiterdiode (Stroppe, S. 436).
2. Erläutern Sie die Wirkungsweise eines Oszillographen.
3. Erläutern Sie die Vor- und Nachteile der Einweg- gegenüber der Zweiweggleichrichtung.
4. Berechnen Sie die Mittelwerte (Gl. (1)) und die Effektivwerte (Gl. (2)) für die in der Tabelle angegebenen Spannungsverläufe.

E12 ELEKTRONEN IN FELDERN

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Oszillograf, spezifische Ladung, elektrisches und magnetisches Feld, Lorentzkraft, Coulombkraft.

Die spezifische Ladung e/m geladener Teilchen mit der Masse m und der Ladung e kann aus der Untersuchung ihrer Ablenkung beim Durchlaufen elektrischer und magnetischer Felder \vec{E} bzw. \vec{B} bestimmt werden. Bei diesem Versuch wird die Ablenkung von Elektronen in einer Oszillogafenröhre untersucht. Die elektrischen Felder werden durch die üblicherweise eingebauten X- bzw. Y-Plattenpaare und die magnetischen Felder durch zusätzliche Spulen außerhalb der Röhre erzeugt (Abb.4). Untersucht wird die Ablenkung von Elektronen, welche mit der

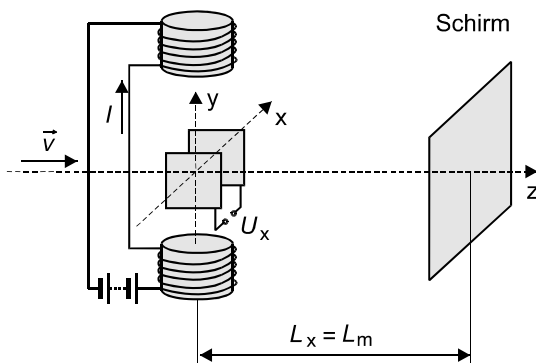


Abb.1 WIEN-FILTER

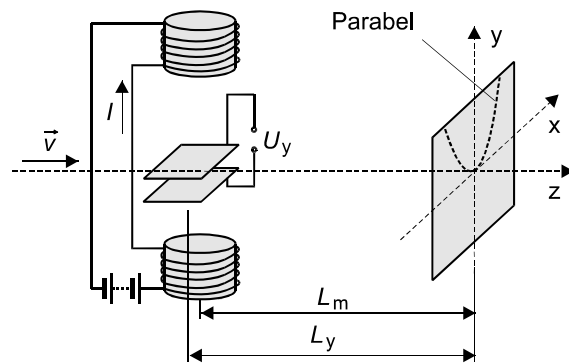


Abb.2 PARABELMETHODE

Geschwindigkeit $\vec{v} = \{0,0,v\}$ entweder senkrecht in \vec{E} - und \vec{B} -Felder eintreten, welche zueinander senkrecht (Wien-Filter, Abb.1) oder parallel (Thomsonsche Parabelmethode, Abb.2) gerichtet sind oder welche beim Durchlaufen eines in z-Richtung verlaufenden \vec{B} -Feldes eine dazu senkrechte Geschwindigkeitskomponente besitzen (Methode nach Busch).

1. Ablenkung durch ein elektrisches **oder** ein magnetisches Querfeld

Vor der Untersuchung der Ablenkung in den kombinierten Feldern soll die Ablenkung in elektrischen und magnetischen Querfeldern getrennt betrachtet werden. Dabei werden die Felder zunächst vereinfachend als homogen angenommen. Die realen (d.h. apparativ bedingten) Inhomogenitäten werden anschließend durch die Einführung experimentell bestimmbarer Effektivgrößen berücksichtigt.

1.1 Ablenkung durch ein elektrisches Querfeld: Ein Elektron tritt nach Durchlaufen der Beschleunigungsspannung U_b mit der Geschwindigkeit $v = (2eU_b/m)^{1/2}$ senkrecht zu den Feldlinien in das homogene elektrische Feld eines Plattenkondensators (Plattenabstand d , Plattenspannung U , Feldlänge in Flugrichtung l) ein. Im durch U hervorgerufenen elektrischen Feld $E = U/d$ erfährt das Elektron die konstante Beschleunigung $a = eE/m$ längs der Feld-

linien und in deren Folge am Feldende die Ablenkung $s = Ul^2/4dU_b$. Hieraus ergibt sich für die Ablenkung auf dem Leuchtschirm in x- und y-Richtung

$$x = \frac{U_x l_x L_x}{2d_x U_b}, \quad (1)$$

$$y = \frac{U_y l_y L_y}{2d_y U_b}. \quad (2)$$

Dabei sind U_x, U_y die Ablenkspannungen, l_x, l_y die Feldlängen und L_x, L_y die Abstände zwischen den Feldmitten und dem Schirm.

Aus der Messung der so genannten Ablenkempfindlichkeiten x/U_x und y/U_y können experimentell die effektiven Feldlängen l_x und l_y bestimmt werden, welche die Inhomogenität der Felder berücksichtigen und in die folgenden Formeln einzusetzen sind.

1.2 Ablenkung durch ein magnetisches Querfeld: Tritt ein Elektron nach Durchlaufen einer Beschleunigungsspannung U_b mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \{0,0,v\}$ in ein homogenes magnetisches Feld $\vec{B} = \{0,B,0\}$, so wird es durch die Lorentzkraft $\vec{F} = e(\vec{v} \times \vec{B})$ auf eine Kreisbahn mit der Radialbeschleunigung $a = evB/m$ abgelenkt. Für kleine Ablenkungen gilt für die transversale Ablenkung in x-Richtung am Ende des Magnetfeldes der Länge l_m die Näherung $s = (e/2U_b m)^{1/2} B l_m^2 / 2$ und für die Auslenkung auf dem Leuchtschirm

$$x = \sqrt{\frac{e}{2U_b m}} L_m B l_m$$

mit $L_m =$ Abstand der Feldmitte vom Leuchtschirm. Mit der Ersetzung $B \cdot l_m = K \cdot I$ (mit der

Apparatekonstanten $K = 1/I \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} B(z) dz$ wird die Inhomogenität des \vec{B} -Feldes berücksich-

tigt) erhält man für die Auslenkung auf dem Schirm

$$x = \sqrt{\frac{e}{2U_b m}} L_m K I \quad (3)$$

mit $I =$ Strom durch die Spule. Die Apparatekonstante K wird für jeden Versuchsplatz angegeben.

2. Ablenkung durch ein elektrisches **und** ein magnetisches Querfeld

2.1 Felder senkrecht zueinander (Wien-Filter): Tritt ein Elektron mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \{0,0,v\}$ in die gleichzeitig wirkenden Felder $\vec{E} = \{E,0,0\}$ und $\vec{B} = \{0,B,0\}$ ein, so bewirken beide Felder eine entgegengesetzte Ablenkung in x-Richtung (Gl.(1) und Gl.(3)). Durch geeignete Wahl des Spulenstromes I kann bei gegebenem U_x die Auslenkung des Leuchtflekes auf dem Schirm kompensiert werden:

$$\frac{U_x l_x L_x}{2d_x U_b} = \sqrt{\frac{e}{2mU_b}} L_m K I \quad \Rightarrow \quad U_x = \sqrt{\frac{2eU_b}{m}} \frac{d_x}{l_x} K I. \quad (4)$$

Die grafische Darstellung von $U_x = f(I)$ liefert bei konstantem U_b eine Gerade, aus deren Anstieg die spezifische Ladung e/m bestimmt werden kann.

2.2 Felder parallel zueinander (Thomsonsche Parabelmethode): Tritt ein Elektron mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \{0,0,v\}$ in die gleichzeitig wirkenden Felder $\vec{E} = \{0,E,0\}$ und $\vec{B} = \{0,B,0\}$, so bewirken die Felder eine Ablenkung sowohl in x-Richtung (Gl.(3)) als auch in y-Richtung (Gl.(2)). Folglich durchläuft der Leuchtfleck auf dem Schirm bei Variieren der Beschleunigungsspannung U_b Teile der Parabel

$$y = \frac{U_y / y \cdot L_y}{d_y L_m^2} \cdot \frac{m}{e} \cdot \frac{1}{K^2 \cdot I^2} \cdot x^2. \quad (5)$$

Die grafische Darstellung $y = f(x^2)$ liefert (für $U_y, I = \text{konst.}$) eine Gerade, aus deren Anstieg e/m berechnet werden kann.

2. Bewegung im magnetischen Längsfeld (Methode nach Busch)

Solange sich Elektronen mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \{0,0,v\}$ parallel zu einem magnetischen Längsfeld bewegen, wirkt keine magnetische Kraft. Erhalten sie aber eine Geschwindigkeitskomponente v_T transversal zum magnetischen Längsfeld, so wirkt auf sie die Lorentzkraft senkrecht zur momentanen Flugrichtung und sie werden abgelenkt. Bewirkt man die Auslenkung durch ein (in z-Richtung kurzes) elektrisches Wechselfeld, dass z.B. durch Anlegen einer Wechselspannung an das x-Plattenpaar erzeugt wird, so bewegen sich die Elektronen auf unterschiedlichen Schraubenbahnen bis zum Schirm, weil der Translationsbewegung infolge der Wirkung der Lorentzkraft eine Kreisbewegung überlagert wird (Abb. 3). Da die Umlaufzeit auf der Kreisbahn $T = 2\pi/\omega = 2\pi m/eB$ (im Unterschied zum Radius!) unabhängig von der Größe der Transversalkomponente v_T der Geschwindigkeit ist, treffen sich (bei kleinen Auslenkungen, denn nur dann kann die Geschwindigkeit v in z-Richtung näherungsweise als unverändert angenommen werden,) alle Bahnen in periodisch wiederkehrenden Schnittpunkten im Abstand der sog. Fokussierungslänge

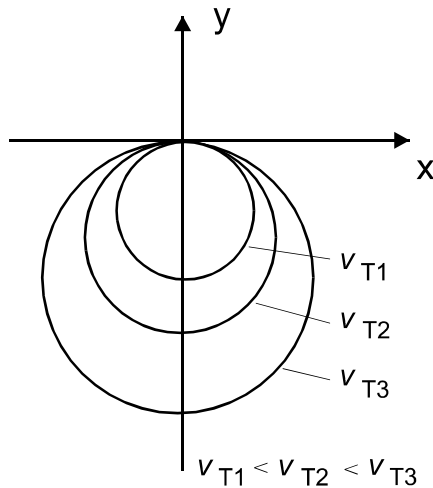


Abb. 3 KREISBAHNEN IM MAGNETISCHEN LÄNGSFELD (Projektion auf x-y-Ebene)

recht zur momentanen Flugrichtung und sie werden abgelenkt. Bewirkt man die Auslenkung durch ein (in z-Richtung kurzes) elektrisches Wechselfeld, dass z.B. durch Anlegen einer Wechselspannung an das x-Plattenpaar erzeugt wird, so bewegen sich die Elektronen auf unterschiedlichen Schraubenbahnen bis zum Schirm, weil der Translationsbewegung infolge der Wirkung der Lorentzkraft eine Kreisbewegung überlagert wird (Abb. 3). Da die Umlaufzeit auf der Kreisbahn $T = 2\pi/\omega = 2\pi m/eB$ (im Unterschied zum Radius!) unabhängig von der Größe der Transversalkomponente v_T der Geschwindigkeit ist, treffen sich (bei kleinen Auslenkungen, denn nur dann kann die Geschwindigkeit v in z-Richtung näherungsweise als unverändert angenommen werden,) alle Bahnen in periodisch wiederkeh-

renden Schnittpunkten im Abstand der sog. Fokussierungslänge

$$L_f = v \cdot T = \frac{\pi}{B} \cdot \sqrt{\frac{8 U_b m}{e}}. \quad (6)$$

Erzeugt man das Längsfeld mit einer langen Spule (Windungszahl N , Länge l , Strom I) und wählt die Beschleunigungsspannung U_b so, dass der durch das x-Wechselfeld aufgeweitete Elektronenstrahl auf dem Leuchtschirm fokussiert erscheint, dann ist L_f gerade gleich L_x und es folgt mit $B = \mu_0 NI/l$ für eine lange gerade Spule die Beziehung

$$U_b = \frac{\mu_0^2}{8\pi^2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{L_x^2 N^2}{l^2} I^2. \quad (7)$$

Die grafische Darstellung $U_b = f(I^2)$ liefert eine Gerade, aus deren Anstieg e/m berechnet werden kann.

AUFGABEN

1. Bestimmung der effektiven Feldlängen l_x und l_y der Plattenkondensatoren.
2. Bestimmung der spezifischen Ladung des Elektrons e/m mit dem Wien-Filter für Beschleunigungsspannungen $U_b = 1,2 \text{ kV}$, $1,6 \text{ kV}$ und 2 kV durch Geradenausgleich des gemessenen Zusammenhanges $U_x = f(I)$ (Gl. (4)).
3. Bestimmung von e/m nach der Thomsonschen Parabelmethode durch Geradenausgleich der aus 3 gemessenen Parabeln entnommenen Zusammenhänge $y = f(x^2)$ (Gl. (5)).
4. Bestimmung von e/m mit der Methode nach Busch durch Geradenausgleich des gemessenen Zusammenhanges $U_b = f(I^2)$ (Gl. (7)) für Beschleunigungsspannungen $U_b = 1 - 2 \text{ kV}$ in Schritten von $0,1 \text{ kV}$.
5. Bildung des gewichteten Mittels für die nach den Aufgaben 2-4 bestimmte spezifische Ladung e/m .

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Die Versuchsanordnung (Abb. 4) besteht aus einer Oszillografenröhre mit hintereinander angeordneten Plattenkondensatoren zur elektrischen x- und y-Ablenkung, welche sich verschiebbar

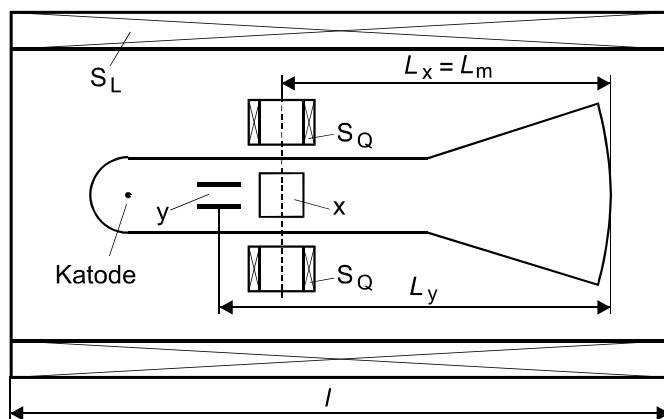


Abb. 4 VERSUCHSANORDNUNG

in einer langen Spule S_L zur Erzeugung des magnetischen Längsfeldes befindet. Zur Erzeugung des magnetischen Querfeldes dient das Spulenpaar S_Q , welches in Höhe der x-Ablenkplatten fest angeordnet ist. Die Gesamtanordnung ist durch einen weichmagnetischen Blechzylinder aus einer Nickel-Eisen-Legierung gegen das magnetische Feld der Erde abgeschirmt.

Folgende technische Daten werden für die Auswertung benötigt:

mittlerer Plattenabstand

$$d_x = (3,9 \pm 0,1) \text{ mm}$$

$$d_y = (3,5 \pm 0,1) \text{ mm}$$

Abstand Feldmitte x-Platten bis zum Schirm

$$L_x = (216 \pm 1) \text{ mm}$$

Abstand Feldmitte y-Platten bis zum Schirm

$$L_y = (253 \pm 1) \text{ mm}$$

Abstand Mitte magnetisches Querfeld bis zum Schirm

$$L_m = (216 \pm 1) \text{ mm}$$

Länge der langen Spule

$$l = (743 \pm 1) \text{ mm}$$

Die Apparatekonstante K des magnetischen Querfeldes und die Windungszahl N der langen Spule werden am Versuchsplatz angegeben. Für die digitalen elektrischen Messgeräte wird ein systematischer Fehler von $\pm (1 \% + 1)$ angenommen. Alle Versuche sollen mit möglichst geringer Strahlhelligkeit ausgeführt werden, um die Leuchtschicht der Oszillografenröhre zu schonen. Zur Bestimmung der effektiven Feldlängen l_x und l_y (Aufgabe 1) werden die Ablenkempfindlichkeiten x/U_x und y/U_y für $U_b = 1,8 \text{ kV}$ und für U_x und U_y im Bereich von 0 bis etwa 100 V in Schritten von 10 V gemessen. Werden die experimentellen Ablenkempfindlichkeiten in Gl.(1) bzw. Gl.(2) eingesetzt, so können aus den Anstiegen der Geraden $x = f(U_x)$ bzw. $y = f(U_y)$ zunächst die Verhältnisse l_x/d_x bzw. l_y/d_y (zur späteren Verwendung bei der Auswertung der Gleichungen (4) und (5)) und daraus die effektiven Feldlängen gewonnen werden.

Für Aufgabe 2 wird die Position des unabgelenkten Leuchtflecks mit einem Filzstift auf dem Bildschirm markiert.

Für Aufgabe 3 sollen die zu den Parabeln gehörenden Wertepaare I, U_y so gewählt werden, dass die sich beim Durchlaufen der Beschleunigungsspannung ergebenden Parabeläste weder zu steil noch zu flach verlaufen. Als ungefähre Orientierung diene z. B. das Wertepaar $I = 90 \text{ mA}$, $U_y = 18 \text{ V}$. Zum Abzeichnen der Parabeläste wird ein Stück Klarsichtfolie mit schmalen Klebstreifen auf den Bildschirm geheftet.

Für Aufgabe 4 müssen die Ablenkspannungen U_x und U_y auf 0 V gestellt werden. Anschließend wird die Röhre so in der langen Spule positioniert, dass der Abstand D des Bildschirms vom vorderen Spulenrand etwa $D = 1/2 (l - L_x)$ beträgt und die elektronenoptische Achse der Röhre parallel zum magnetischen Längsfeld verläuft. Bei richtiger Positionierung darf sich der Leuchtfleck bei Änderung des Spulenstromes nicht mehr verschieben. Für den Messvorgang wird durch Betätigen des „Kipp“-Schalters am Bedienteil eine positive Sägezahnspannung an die x-Platten der Röhre gelegt und der Spulenstrom solange vergrößert, bis der durch das x-Wechselfeld aufgefächerte Elektronenstrahl auf dem Leuchtschirm fokussiert erscheint.

FRAGEN

1. Erläutern Sie Aufbau und Wirkungsweise einer Oszillografenröhre.
2. Welche Kräfte wirken auf geladene Teilchen in elektrischen und magnetischen Feldern?
3. Wann läuft ein Elektron in einem homogenen Magnetfeld auf einer Kreisbahn und wie groß sind Bahnradius und Umlaufzeit?
4. Warum verlaufen die Kreisbahnen in Abb.3 nicht konzentrisch zum Nullpunkt der x-y-Ebene?
5. Warum unterscheidet man zwischen effektiven Feldlängen und Länge der Kondensatorplatten?
6. Warum muss in Gl.(3), Gl.(4) und Gl.(5) $I_m \cdot B$ durch $K \cdot I$ ersetzt werden? Wie könnte K experimentell bestimmt werden?
7. Welche Bedeutung hat in Aufgabe 4 die Positionierung der Röhre in der langen Spule?

O2 MIKROSKOP

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: *Dünne Linse, Bildkonstruktion, Hauptstrahlen, Vergrößerung, Auflösungsvermögen.*

Das Mikroskop ist ein optisches Gerät zur Erzeugung vergrößerter Bilder. Es besteht aus Objektiv und Okular, die die Vergrößerung bewirken, und dem Kondensator zur gleichmäßigen Ausleuchtung des Objektes. Zum prinzipiellen Verständnis des Strahlenganges ist es ausreichend, Objektiv und Okular wie dünne Sammellinsen zu betrachten und die Bildkonstruktion mit Hilfe der Hauptstrahlen (Abb. 1) vorzunehmen.

Das Objektiv (Brennweite f_{Ob}) erzeugt vom Objekt G ein umgekehrtes, reelles und vergrößertes Zwischenbild B_1 , welches innerhalb der Brennweite f_{Ok} des Okulars liegt. Das Okular, welches wie eine Lupe wirkt, erzeugt vom Zwischenbild in der deutlichen Sehweite s_0 (ca. 250 mm) des Auges ein aufrechtes, vergrößertes und virtuelles Bild, das durch die Augenlinse auf die Netzhaut abgebildet wird. Unter Berücksichtigung der Gesetze der geometrischen Optik ergibt sich für die Vergrößerung eines Mikroskops

$$V = \frac{T \cdot s_0}{f_{Ok} \cdot f_{Ob}}, \quad (1)$$

wobei T die optische Tubuslänge ist (Abb. 1). Der Übersichtlichkeit wegen ist Abb. 1 nicht maßstabsgerecht ausgeführt, so dass die optische Tubuslänge relativ viel zu klein erscheint. Wegen der Verwendung kurzbrennweitiger Linsen entspricht sie nahezu der technischen Tubuslänge.

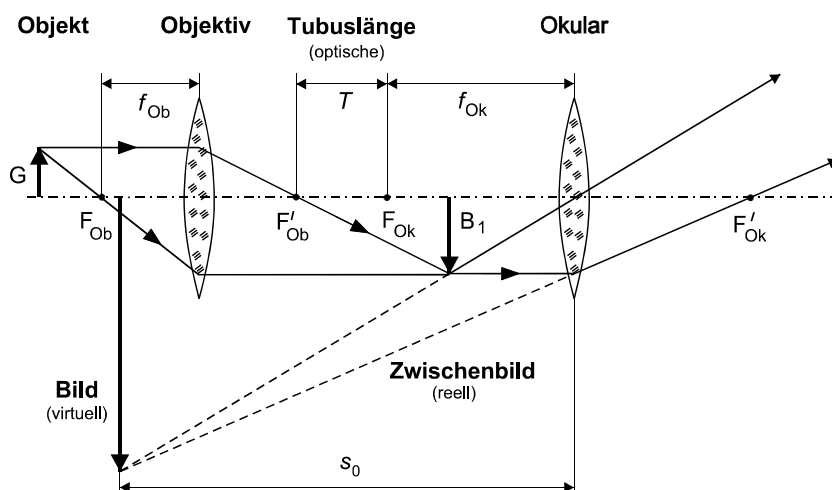


Abb. 1 STRAHLENGANG IM MIKROSKOP

Es soll darauf hingewiesen werden, dass in der Literatur zuweilen auch der Fall behandelt wird, bei dem das Zwischenbild in die Brennebene des Okulars gelegt wird, so dass das virtuelle Bild nicht in der deutlichen Sehweite, sondern im Unendlichen erscheint. In diesem Fall wird die Vergrößerung des Mikroskops unwesentlich

kleiner, und die Augenlinse muss weniger gekrümmt werden, um die hier parallelen Lichtstrahlen hinter dem Okular auf die Netzhaut zu fokussieren. Hinsichtlich der praktischen Benutzung des Mikroskops sind die unterschiedlichen Betrachtungsweisen aber nicht wesentlich.

Gl.(1) kann in einer Form geschrieben werden, welche in der Praxis oft nützlich ist:

$$V = \beta_{Ob} \cdot V_{Ok} \quad (2)$$

mit dem Abbildungsmaßstab des Objektivs $\beta_{Ob} = T/f_{Ob} = B_1/G$ (Beziehung gilt exakt, wenn B_1 in der Brennebene des Okulars liegt, sonst in guter Näherung) und der Winkelvergrößerung $V_{Ok} = s_0/f_{Ok}$ des als Lupe betriebenen Okulars. Gerätespezifische Nennwerte für Abbildungsmaßstab und Winkelvergrößerung sind in der Regel auf Objektiv bzw. Okular aufgedruckt, nicht aber die Brennweiten. Deshalb kann in der Praxis die Vergrößerung des Mikroskops nach Gl. (2) besser abgeschätzt werden als nach Gl. (1).

Die Annahme je einer dünnen Linse für Objektiv und Okular ist für die Überlegungen zum Strahlengang ausreichend. In der Praxis müssen aber Linsenfehler korrigiert werden, weshalb Objektiv und Okular aus komplizierten Linsensystemen bestehen.

Nach Gl.(1) könnte die Vergrößerung des Mikroskops, beispielsweise durch wachsende Tubuslänge, beliebig erhöht werden. Tatsächlich ergibt sich aber aufgrund der Wellennatur des Lichtes (elektromagnetische Welle) und der deshalb am Objektiv stattfindenden Beugung eine Begrenzung für die Vergrößerung des Mikroskops, wie folgende Überlegung, welche auf E. Abbe zurückgeht, zeigt.

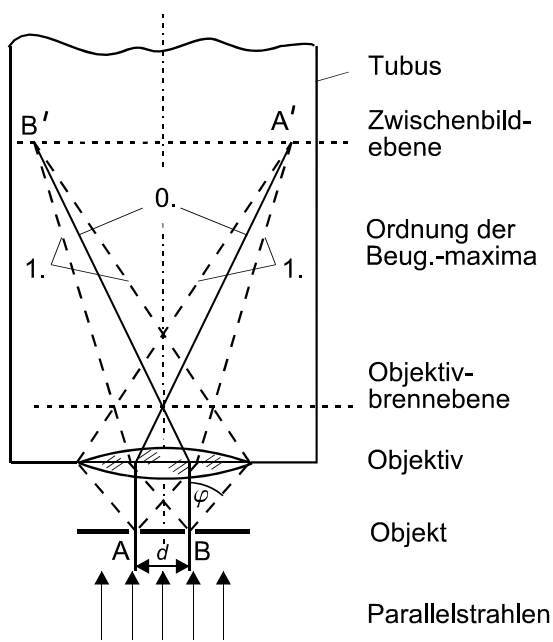


Abb. 2 AUFLÖSUNGSVERMÖGEN

Wählt man als Objekt zwei Spalte (Abstand d), so wird das parallel aus dem Kondensator austretende Licht gebeugt (Abb. 2). Das Beugungsmaximum 0. Ordnung (ausgezogene Linie) durchsetzt das Objektiv in gleicher Weise, unabhängig davon, ob das Objekt vorhanden ist oder nicht; es wird eine gleichmäßige Ausleuchtung des Gesichtsfeldes erreicht, die Objektpunkte A und B sind aber nicht als getrennte Strukturen erkennbar. Ist der Durchmesser des Objektivs ausreichend groß, dann können auch die Strahlen des Beugungsmaximums 1. Ordnung (gestrichelte Linien) noch in das Objektiv gelangen. In der Objektivbrennebene entstehen die Beugungsmaxima und in der Zwischenbildebene überlagern sie sich mit dem

Beugungsmaximum 0. Ordnung. Durch diese Überlagerung wird das Gesichtsfeld strukturiert, und die Objektpunkte werden als getrennte Punkte erkennbar. Für die Abbildung im Mikroskop müssen also mindestens die Beugungsmaxima zweier Ordnungen in das Objektiv eintreten können. Aus diesem Grunde darf der Beugungswinkel φ des Beugungsmaximums 1. Ordnung nicht größer als der halbe Öffnungswinkel φ_{Ob} des Objektivs (Abb. 2) sein. Die genaue Berechnung ergibt für den kleinsten Abstand d zweier Punkte, die im Mikroskop noch als getrennte Punkte aufgelöst werden, die Beziehung

$$d = \frac{\lambda}{n \cdot \sin \varphi_{Ob}} \quad (3)$$

Hierbei ist λ die Wellenlänge des Lichtes (bei Sonnenlicht wird $\lambda = 550 \text{ nm}$ gesetzt) und n die Brechzahl des Mediums zwischen Objekt und Objektiv ($n = 1$ für Luft, bei Immersionsobjektiven $n > 1$). Die Größe $n \cdot \sin \varphi$ heißt numerische Apertur und ist neben dem Abbildungsmaßstab auf jedem Objektiv vermerkt.

AUFGABEN

1. Bestimmung der Vergrößerung des Mikroskops für alle Kombinationen der zwei Objektive und zwei Okulare.
2. Eichung der Okularmikrometerskala für beide Objektive.
3. Messung der Durchmesser zweier Drähte. Abschätzung der Messunsicherheit.
4. Messung des Öffnungswinkels beider Objektive und Berechnung der jeweiligen Auflösungsgrenze (Gl. (3)).

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Das Mikroskop ist ein empfindliches Präzisionsgerät, für die Versuchsdurchführung beachte man die am Versuchsplatz aufgeführten allgemeinen Regeln. Für die Scharfeinstellung des Objektes dient ein Triebknopf, mit dem sowohl die Grob- als auch die Feinverstellung des Objektisches

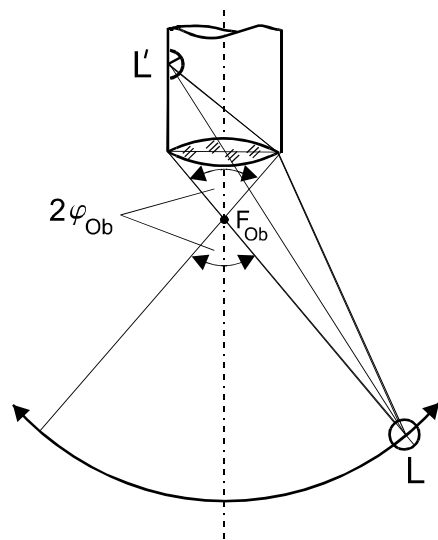


Abb. 3 ÖFFNUNGSWINKEL

vorgenommen wird. Mit dem Triebknopf wird der Objektisch verschoben bis das Objekt in Umrissen sichtbar wird (Grobeinstellung). Ändert man den Drehsinn des Triebknopfes, dann wird an jeder beliebigen Stellung des Objektisches der Feintrieb wirksam und die Scharfeinstellung des Objektes ist möglich.

Für Aufgabe 1 wird als Objekt eine geeichte Skale (Objektmikrometer) benutzt. Sie wird mit einer in 250 mm Abstand aufgestellten mm-Skale verglichen. Durch einen auf das Okular aufgesetzten Winkelspiegel können beide Skalen gleichzeitig betrachtet werden. Die Vergrößerung ergibt sich aus dem Verhältnis der auf den Skalen abgelesenen Längen. Zur gleichzeitigen Beobachtung der beiden Skalen müssen sie etwa gleich hell sein. Über einen Widerstand kann die Helligkeit der Mikroskop-

leuchte so eingestellt werden, dass eine gute Sichtbarkeit beider Skalen erreicht wird.

Für Aufgabe 2 erfolgt die Eichung der Okularskale durch Vergleich mit dem Objektmikrometer. Der Drahtdurchmesser wird mittels der geeichten Okularskale ermittelt (Aufgabe 3).

Für Aufgabe 4 muss der Öffnungswinkel bestimmt werden. Für diese Messung wird die Mikroskopleuchte aus der Stiftführung herausgenommen. Dann kann der Kondensor, nach Lösen der

Klemmschraube, nach unten herausgenommen werden. An die Stelle der Leuchte wird eine Winkelteilung mit der Lichtquelle L eingesetzt (Abb.3). Die Lichtquelle bewegt sich auf einem Kreisbogen, in dessen Mittelpunkt der Brennpunkt des Objektivs liegt. Der Objektisch muss sich für diese Messung so nah wie möglich am Objektiv befinden. Aus der schematischen Darstellung (Abb. 3) sieht man, dass das Bild L' der Lichtquelle verschwindet, wenn L um größere Winkel als $2\varphi_{\text{Ob}}$ geschwenkt wird, das Gesichtsfeld wird dunkler. Der Winkelbereich $2\varphi_{\text{Ob}}$ der Lampe ist aber gleich dem Öffnungswinkel des Objektivs.

FRAGEN

1. Was versteht man unter einer Lupe und wie berechnet man ihre Winkelvergrößerung?
2. Wie hängen Vergrößerung eines Mikroskops und Öffnungswinkel zusammen?
3. Warum setzt man bei Verwendung von Sonnenlicht zur Berechnung der Auflösungsgrenze nach Gl. (3) $\lambda = 550 \text{ nm}$ (grünes Licht) ein?
4. Warum kann man mit dem Mikroskop nur Strukturen in der Größenordnung der Wellenlänge des Lichtes auflösen?
5. Welche Linsenfehler gibt es und wie können sie korrigiert werden?

O3 PRISMENSPEKTROMETER

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Brechungsgesetz, Dispersion, Spektrometer, Auflösungsvermögen eines Spektrometers.

Prismenspektrometer dienen zur Wellenlängenmessung der Strahlung von Lichtquellen im sichtbaren Bereich sowie in den angrenzenden Spektralbereichen (ultraviolette oder infrarote Strahlung). Ein Spektrometer (Abb. 1) besteht aus der zu untersuchenden Lichtquelle Q, dem Kollimator, einem dispersierenden (Prisma) oder beugenden Medium (Gitter, siehe Versuch O4) und einem Beobachtungsfernrohr.

Der Spalt Sp variabler Breite befindet sich im Brennpunkt der Linse L₁, so dass die divergent aus dem Spalt austretende Strahlung zu einem Parallellichtbündel wird. Dieses wird an den beiden brechenden Prismenflächen, die den Winkel γ einschließen, gebrochen und trifft um den

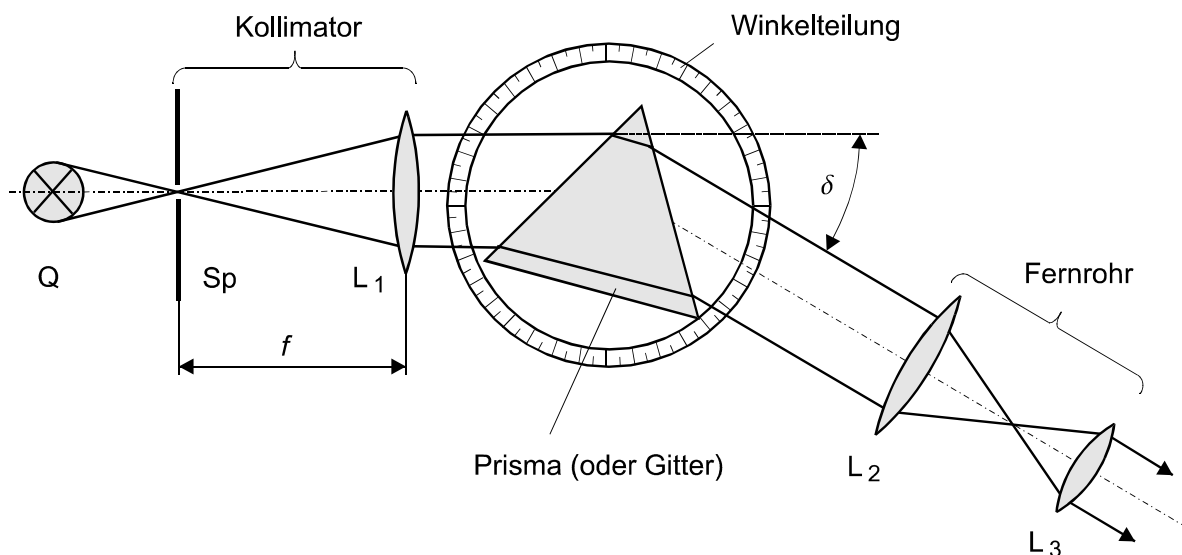


Abb. 1 PRISMENSPEKTROMETER

Winkel δ abgelenkt auf das Fernrohr. Dieses ist auf unendliche Entfernung eingestellt und seine Winkelstellung an der Winkelteilung ablesbar. Da der Ablenkwinkel δ vom Einfallswinkel α (Abb. 2), vom brechenden Winkel γ (Abb. 2) und von der Brechzahl n des Prismas abhängt, kann man die Brechzahl durch Messung des Ablenkwinkels ermitteln.

Aus dem Brechungsgesetz

$$n = \sin \alpha / \sin \beta \quad (1)$$

ergibt sich für den Fall, dass das Parallellichtbündel das Prisma symmetrisch durchsetzt (Abb. 2), ein minimaler Ablenkwinkel δ_{\min} . In diesem Fall ist $\beta = \gamma/2$ und $\alpha = (\delta_{\min} + \gamma)/2$, so dass die Brechzahl aus

$$n = \frac{\sin[(\delta_{\min} + \gamma)/2]}{\sin(\gamma/2)} \quad (2)$$

ermittelt werden kann. Da die Brechzahl von der Lichtwellenlänge abhängt, ist auch der Winkel der minimalen Ablenkung wellenlängenabhängig. Emittiert die Lichtquelle Strahlung unterschiedlicher Wellenlänge, dann beobachtet man in der Brennebene des Fernrohres die spektral zerlegte Strahlung der Lichtquelle. Leuchtende Gase oder Metaldämpfe emittieren nur Strahlung diskreter Wellenlängen, und im Fernrohr beobachtet man einfarbige „Spektrallinien“, dies sind die reellen Bilder des Spaltes Sp . Die Leistungsfähigkeit eines Prismenspektrometers wird durch das Auflösungsvermögen $\lambda/\Delta\lambda$ charakterisiert. Hierbei ist $\Delta\lambda$ der Wellenlängenunterschied, der bei

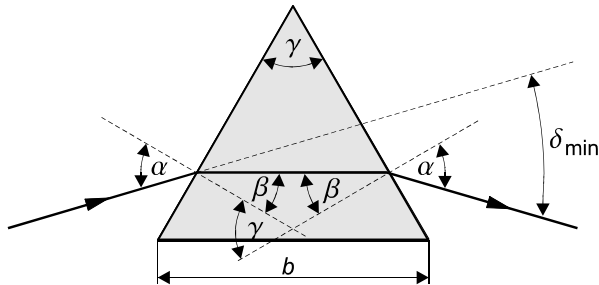


Abb. 2 SYMMETRISCHER STRAHLENVERLAUF

der Wellenlänge λ gerade noch zu zwei getrennt wahrnehmbaren Spektrallinien führt. Leuchtet das Parallellichtbündel den Querschnitt des Prismas aus, dann ergibt die Theorie als Grenzwert für das Auflösungsvermögen

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = -b \frac{dn}{d\lambda}, \quad (3)$$

wobei b die Basislänge des Prismas ist und $dn/d\lambda$ aus der Dispersionskurve $n = n(\lambda)$ ermittelt werden kann. Da das Glasprisma im Wellenlängenbereich des sichtbaren Lichtes normale Dispersion zeigt, ist $dn/d\lambda$ negativ.

AUFGABEN

1. Man bestimme die Brechzahl n eines Glasprisma (Gl. (2)) für fünf Wellenlängen des Hg-Spektrums und stelle die Dispersionskurve $n = n(\lambda)$ grafisch dar.
2. Man bestimme die Brechzahl n des Glasprisma für die Natriumlinie. Aus der Dispersionskurve bestimme man die Wellenlänge dieser Linie.
3. Man schätze das Auflösungsvermögen des Prismas (Gl. (3)) für $\lambda = 590 \text{ nm}$ aus der Dispersionskurve ab.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

(1) Justierung des Spektrometers: Zunächst löst man das Fernrohr aus der Halterung und visiert einen fernen Gegenstand außerhalb des Praktikumsraumes an. Durch Verschieben des Okulars erreicht man die gleichzeitige Scharfeinstellung des Fadenkreuzes im Okular und des fernen Gegenstandes. Die Justierung des Fernrohres muss während der gesamten Versuchsdurchführung erhalten bleiben. Die Justierung des Kollimators erfolgt am Versuchsplatz ohne Prisma. Durch Verschieben des Spaltes erhält man ein scharfes Bild.

(2) Einstellung des Ablenkwinkels δ_{\min} : Man drehe das Prisma auf dem Prisentisch in einem bestimmten Drehsinn und beobachte die Bewegung des gebrochenen Strahlenbündels zunächst auf einem in den Strahlengang gehaltenen Blatt Papier. Es gibt eine Stellung des Prismas, von der ab unter Beibehaltung des Prismendrehsinns sich die Bewegungsrichtung des Lichtbündels umkehrt. Die Umkehrstelle ist der Winkel minimaler Ablenkung. Zur genauen Messung benutzt man das Fernrohr und bringt das Fadenkreuz mit der Umkehrstelle der jeweiligen Hg-Linien zur Deckung und liest die zugehörigen Fernrohrstellungen an der Winkelteilung mit dem Nonius ab. Der zweite Schenkel des zu messenden Winkels δ_{\min} ist durch die Einfallrichtung des unabgelenkten Lichtbündels gegeben.

Eine höhere Messgenauigkeit erzielt man, wenn man das Prisma auf dem Prisentisch um 120° dreht und das gleiche Verfahren zur Auffindung der Umkehrstelle auf der anderen Seite in Bezug auf die Richtung des einfallenden Lichtbündels anwendet. Man erhält also für jede Spektrallinie zwei Fernrohrstellungen φ_1 und φ_2 . Die Hälfte des zugehörigen Winkels ist gleich δ_{\min} . Der brechende Winkel γ des Prismas beträgt 60° . Man beachte, dass die Spektrallampen nur über eine Drossel an die Netzspannung angeschlossen werden dürfen.

Für Aufgabe 1 verwende man die folgenden Hg-Linien: violett: $\lambda_1 = 407,8$ nm, blau $\lambda_2 = 435,8$ nm, blau/grün $\lambda_3 = 491,6$ nm, grün $\lambda_4 = 546,1$ nm, rot: $\lambda_5 = 623,4$ nm.

Für Aufgabe 2 verwendet man die gelbe Linie der Na-Lampe. Den Messwert vergleiche man mit dem Tabellenwert des aus zwei dichtbenachbarten Spektrallinien bestehenden Na-Dubletts: $\lambda_1 = 589,0$ nm bzw. $\lambda_2 = 589,6$ nm.

Für Aufgabe 3 verwende man zur Ermittlung von $dn/d\lambda$ ein Spiegellinial.

FRAGEN

1. Was versteht man unter normaler bzw. anomaler Dispersion?
2. Unter welchen Bedingungen tritt nach dem Brechungsgesetz Totalreflexion ein?

O4 GITTERSPEKTROMETER

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: *Interferenz, Huygens-Fresnelsches Prinzip, Beugung an Spalt und Gitter, Auflösungsvermögen eines Spektrometers.*

Gitterspektrometer dienen zur spektralen Zerlegung der Strahlung von Lichtquellen und insbesondere zur Messung der Wellenlänge von Spektrallinien. Ein Gitterspektrometer besteht aus

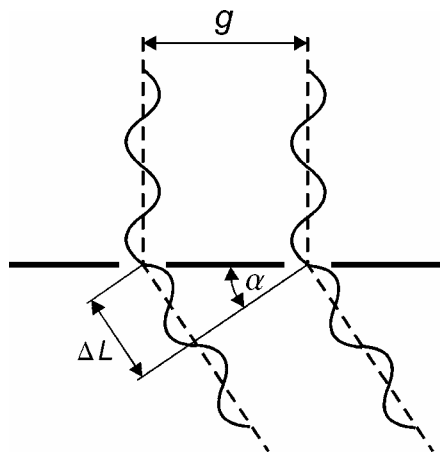


Abb. 1 DOPPELSPALT

der zu untersuchenden Lichtquelle, dem Kollimator, einem Beugungsgitter und einem Beobachtungsfernrohr (vgl. Abb. 1 beim Versuch O3). Das optische Beugungsgitter besteht aus einer Anordnung nebeneinander liegender paralleler Spalte bzw. reflektierender Streifen, deren Periode als Gitterkonstante g bezeichnet wird. Eine auf einen Doppelspalt (Abb. 1) auftreffende ebene monochromatische Wellenfront führt zur phasengleichen Erregung in jedem Punkt der Spalte. Betrachtet man die unter dem Beobachtungswinkel α ausgehenden Wellen, die in der Brennebene des Fernrohres miteinander interferieren, dann ergibt sich ein Intensitätsmaximum, wenn der

Gangunterschied

$$\Delta L = g \sin \alpha_k = k \lambda \quad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (1)$$

ist. Hierbei bezeichnet k die Beugungsordnung; in Abb. 1 ist der Fall $k = 1$ gezeichnet. Geht man vom Doppelspalt zum Gitter über, dann gibt es Richtungen, unter denen sich die von allen Spalten ausgehenden Wellen verstärken; sie sind durch Gl. (1) gegeben. Zwischen diesen Hauptmaxima liegen so genannte Nebenmaxima, die dadurch entstehen, dass in diesen Richtungen nur die von einigen Spalten ausgehenden Wellen sich verstärken.

Die Intensitätsverteilung an einem Gitter der Spaltzahl $N = 5$ (Abb. 2, ausgezogene Linie für eine bestimmte Wellenlänge λ) zeigt die geringere Intensität der Neben-

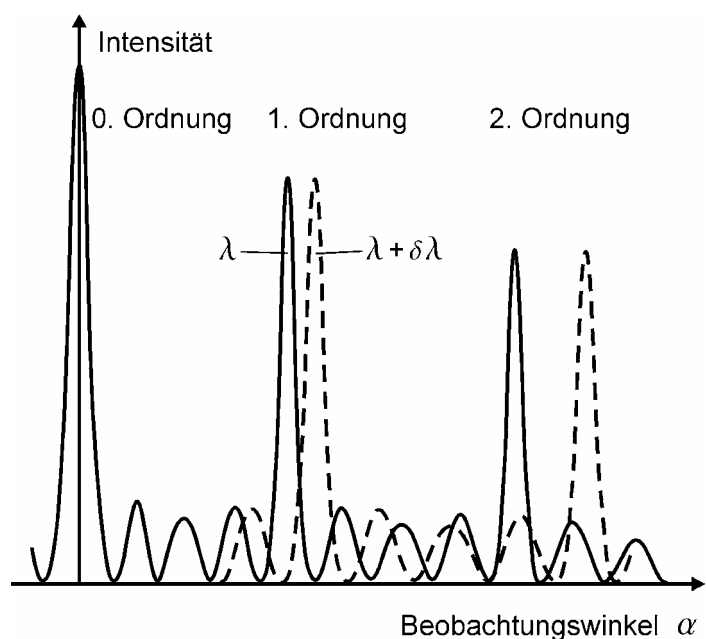


Abb. 2 AUFLÖSUNGSVERMÖGEN

maxima im Vergleich zu den Hauptmaxima verschiedener Ordnung. Mit wachsender Spaltzahl wird die gesamte Intensität in den Hauptmaxima konzentriert, die man Spektrallinien nennt.

Für eine größere Wellenlänge $\lambda + \delta\lambda$ ist die Bedingung für die Intensitätsmaxima für rel. größere Beugungswinkel α_z erfüllt, es entsteht also die Spektrallinie für $\lambda + \delta\lambda$ an einer anderen Stelle in der Brennebene des Fernrohres (gestrichelte Linie in Abb. 2). Die Spektrallinien für λ und $\lambda + \delta\lambda$ sind nur dann in der k -ten Ordnung (Abb.2 zeigt Beispiel für $k=1$) voneinander unterscheidbar, man sagt „aufgelöst“, wenn das Intensitätsmaximum mindestens mit dem 1. Nebenminimum der benachbarten Spektrallinie zusammenfällt. Ist der Abstand kleiner, löst das Gitter diese beiden Spektrallinien nicht mehr auf. Das Auflösungsvermögen kennzeichnet also die spektrale Trennfähigkeit des Gitters und ist definiert als $\lambda/\delta\lambda$, wobei $\delta\lambda$ die kleinste noch auflösbare Wellenlängendifferenz bei der Wellenlänge λ ist. Aus theoretischen Überlegungen ergibt sich für das Auflösungsvermögen in der k -ten Ordnung

$$\lambda/\delta\lambda = N k, \quad (2)$$

wobei N die Zahl der an der Beugung beteiligten Gitterspalte ist.

AUFGABEN

1. Mit Hilfe einer bekannten Hg-Linie ermittle man die Gitterkonstante g .
2. Die Wellenlängen zweier weiterer Hg-Linien und die mittlere Wellenlänge des Na-Dubletts sind zu bestimmen.
3. Man berechne das Auflösungsvermögen (Gl. (2)) des Gitters für verschiedene Ordnungen k und vergleiche die Werte mit den Beobachtungen bei der Auflösung des Na-Dubletts.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Die Justierung des Spektrometers erfolgt wie beim Prismenspektrometer (vgl. Versuch O3). Man beachte, dass die Spektrallampen nur über eine Drossel an die Netzspannung angeschlossen werden dürfen.

Für Aufgabe 1 wähle man die grüne Hg-Linie ($\lambda = 546,1$ nm) und für Aufgabe 2 die blaue und die gelbe Hg-Linie sowie die gelbe Natriumlinie.

Für Aufgabe 3 ermittle man experimentell, in welcher Ordnung das Na-Dublett als zwei getrennte Linien beobachtet werden kann und vergleiche mit dem theoretischen Wert (Gl. (2)). Dazu bestimme man N aus der Größe der ausgeleuchteten Gitterfläche und der Gitterkonstanten (Aufgabe 1).

FRAGEN

1. Was versteht man unter kohärentem Licht?
2. Wie kann das Reflexions- und das Brechungsgesetz mit dem Huygens-Fresnel-Prinzip erklärt werden?
3. Skizzieren Sie den Strahlengang in einem Gitterspektrometer!

O5 POLARIMETRIE

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: *Transversalwelle, Doppelbrechung, lineare und zirkulare Polarisation, Polarisationsapparat, optische Aktivität.*

Elektromagnetische Wellen sind Transversalwellen; es schwingen das elektrische Feld mit der Feldstärke \vec{E} und das magnetische Feld mit der Feldstärke \vec{H} senkrecht zueinander und beide wiederum schwingen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Die durch die Schwingungsrichtung

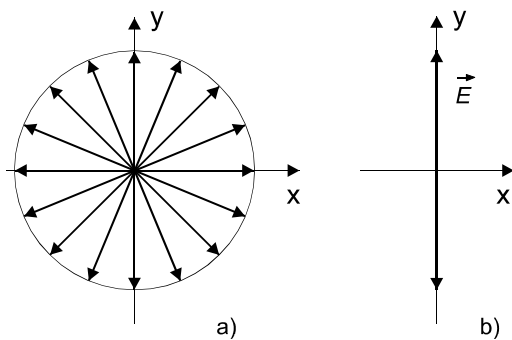


Abb. 1 POLARISATION

der elektrischen Feldstärke \vec{E} und die Ausbreitungsrichtung der Welle aufgespannte Ebene heißt Schwingungsebene. Auch Licht ist eine elektromagnetische Welle. Aufgrund der Emissionsakte vieler einzelner Atome treten im statistischen Mittel im natürlichen Licht (Abb. 1a) alle Schwingungsebenen auf. Licht, das nur eine einzige Schwingungsebene aufweist, bezeichnet man als linear polarisiertes Licht (Abb. 1b). Durch Reflexion (Brewstersches Gesetz), Doppelbrechung (Nicol-

sches Prisma) oder Absorption (dichroitische Kristalle) kann linear polarisiertes Licht erzeugt werden. Optisch aktive Stoffe (z. B. Quarz, Zuckerlösung) besitzen die Eigenschaft, beim Durchgang von linear polarisiertem Licht die Schwingungsebene zu drehen, wobei je nach Stoff bzw. Kristallaufbau die Drehrichtung unterschiedlich sein kann. Bei festen Stoffen ist der Drehwinkel α proportional zur durchstrahlten Schichtdicke d

$$\alpha = \alpha' d, \quad (1)$$

wobei α' spezifisches Drehvermögen heißt, das von der Wellenlänge, der Temperatur und der Schnittlage im Kristall abhängt. Bei Lösungen ist der Drehwinkel α proportional zur Schichtdicke d und zur Konzentration c

$$\alpha = \alpha_0 d c / 100, \quad (2)$$

wobei α_0 spezifische Drehung heißt. Für diese spezifischen Größen sind meist noch vom SI abweichende Einheiten gebräuchlich:

Einheit für α' : Grad/mm

Einheit für α_0 : Grad $\text{cm}^3/\text{g dm}$, weil als Einheit für d „dm“ und für c „ $\frac{\text{g}}{100\text{cm}^3}$ “ gewählt wird.

Das Polarimeter (Abb. 2) ist ein Gerät zur Bestimmung des Drehwinkels optisch aktiver Stoffe. Es besteht aus einer Beleuchtungseinrichtung B (Na-Spektrallampe und Kollimatorlinse), deren paralleles Licht auf den Polarisator trifft, in dem es polarisiert wird.

Es passiert den drehbaren Analysator A, dessen Stellung an einer Winkelskala abgelesen wird. Mit einem Fernrohr F wird das austretende Licht beobachtet. Man beobachtet, wenn die

Schwingungsebenen von Polarisator und Analysator parallel stehen, maximale Helligkeit, wenn sie senkrecht aufeinander stehen (gekreuzt), minimale Helligkeit. Bringt man zwischen Polari-

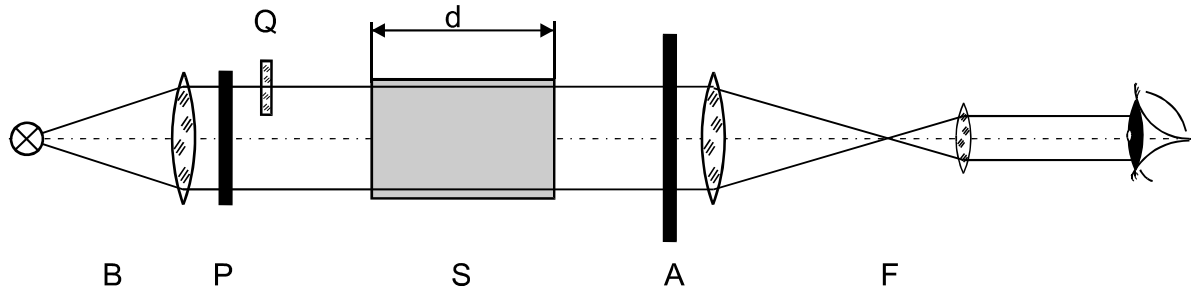


Abb. 2 AUFBAU EINES POLARIMETERS

sator und Analysator einen optisch aktiven Stoff, dann wird die Schwingungsebene gedreht, d. h. auch bei gekreuzter Stellung von Polarisator und Analysator ist die Helligkeit kein Minimum. Erst wenn der Analysator um den Drehwinkel α des optisch aktiven Stoffes gedreht wird, ergibt sich wieder ein Helligkeitsminimum.

AUFGABEN

1. Messung des Drehwinkels an 4 Quarzplatten bekannter Dicke d und Ermittlung des spezifischen Drehvermögens (Gl. (1)) von Quarz aus der grafischen Darstellung α über d .
2. Messung des Drehwinkels für verschiedene Rohrzuckerlösungen bekannter Konzentration und Ermittlung der spezifischen Drehung (Gl. (2)) aus der grafischen Darstellung $\frac{\alpha}{d \cdot c} \cdot 100$ über $d \cdot c$.
3. Abschätzung der Messunsicherheit für den größten und den kleinsten $d \cdot c$ - Wert und Eintragung in die grafische Darstellung aus Aufgabe 2.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Alle Messungen werden bei Zimmertemperatur mit einer Na-Spektrallampe durchgeführt ($\lambda = 589 \text{ nm}$). Vor Beginn des Versuches wird mit Hilfe der gerändelten Okularhülse auf die Trennlinien im Gesichtsfeld scharf eingestellt. Vor und nach jeder Messung erfolgt die Nullpunktbestimmung (ohne Messprobe). Die Einstellung des Gesichtsfeldes auf minimale Helligkeit ist schwierig, weil das Auge ein schlechtes Erinnerungsvermögen für Leuchtdichten hat. Empfindlicher reagiert das Auge, wenn die Leuchtdichte nebeneinander liegender Flächen verglichen wird. Durch eine Quarzplatte Q wird das Gesichtsfeld in drei Bereiche geteilt, die beiden äußeren Bereiche sind in gleicher Weise polarisiert, während die Schwingungsebene des mittleren Bereiches um einen kleinen Winkel dagegen gedreht ist. Beim Drehen des Analysators zeigen die zwei äußeren Bereiche immer die gleiche Veränderung der Helligkeit, während der mittlere Bereich sich in entgegengesetzter Richtung ändert. Die Einstellung des Analysators

erfolgt stets so, dass alle drei Bereiche gleiche Helligkeit haben, also die Trennlinien zwischen den Bereichen nicht mehr sichtbar sind. Die Einstellung auf gleiche Helligkeit der Bereiche ist in zwei um 90° gegeneinander verschobenen Einstellungen möglich. In der helleren Einstellung ist die Empfindlichkeit sehr gering, in der dunkleren Einstellung ändert sich die Helligkeit der Bereiche rasch in entgegengesetztem Sinne; diese wird für die Messung benutzt.

FRAGEN

1. Man mache sich die Wirkungsweise einer Polarisationsfolie oder eines Nicolschen Prismas klar.
2. Was für polarisiertes Licht entsteht, wenn man zwei senkrecht zueinander linear polarisierte Wellen überlagert? Die Phasendifferenz sei Null.
3. Wie erzeugt man zirkular polarisiertes Licht? Wie unterscheidet man dieses von natürlichem Licht?

O6 NEWTONSCHE RINGE

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Reflexion, Beugung, Interferenz, Kohärenz, Gangunterschied, Phasensprung (Stroppe, S. 319-323).

Newton'sche Ringe: Als Newton'sche Ringe bezeichnet man Interferenzbilder, die bei folgender Anordnung entstehen: Eine Plankonvexlinse mit großem Krümmungsradius R liegt mit der

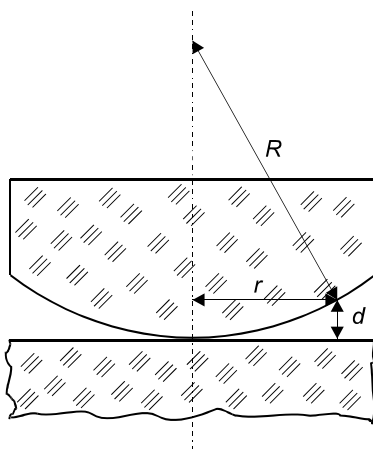


Abb. 1 VERSUCHSAUFBAU

(Abb. 2). Die erste für die Betrachtungen wichtige Reflexion, die zur Bildung des Teilstrahls 1 führt, erfolgt an der Unterseite der Linse, d. h. beim Übergang des Lichts in das optisch dünnere Medium des Luftkeils. Ein Teil des Lichts durchquert den Luftkeil, wobei am optisch dichteren Medium (Glasplatte) dann eine erneute Reflexion erfolgt, die zur Bildung des Teilstrahls 2 führt. Die beiden Teilstrahlen 1 und 2 sind kohärent und überlagern sich im Punkt A. Betrachtet man alle reflektierten Teilstrahlen, dann ergibt sich oberhalb des Luftkeils eine Fläche, in der sich die entsprechenden Teilstrahlen überlagern. Diese Fläche rückt bei sehr kleinem Keilwinkel und senkrechtem Lichteinfall auf die obere Seite des Luftkeils.

Man kann diese Fläche und damit das Interferenzbild entweder mit dem Auge direkt beobachten, indem das Auge auf die Fläche akkommodiert wird, oder mit einem Mikroskop z.B. zum Ausmessen der Ringdurchmesser.

Die Reflexion des Lichtes an der Linsenoberseite kann unberücksichtigt bleiben, da der Gangunterschied des dort reflektierten Teilstrahls gegenüber den anderen reflektierten Teilstrahlen zu

gekrümmten Fläche auf einer ebenen Glasplatte (Abb. 1). Zwischen diesen beiden Flächen besteht ein Luftkeil mit veränderlicher Dicke d . Beleuchtet man die Anordnung senkrecht von oben mit parallelem monochromatischem Licht, dann beobachtet man sowohl in Reflexion als auch in Durchsicht konzentrische helle und dunkle Ringe um den Berührungspunkt von Linse und Glasplatte. Die Ringe entstehen durch Interferenz der an der oberen und unteren Grenzfläche des Luftkeils reflektierten Lichtwellen und heißen Newton'sche Ringe.

Zur Berechnung der Newton'schen Ringe betrachten wir einen vergrößerten Ausschnitt aus der Anordnung Linse/Glasplatte

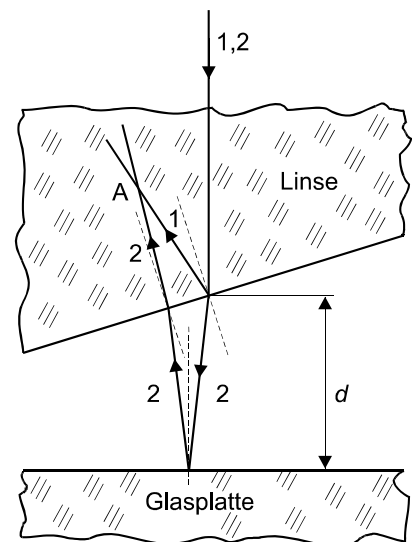


Abb. 2 STRAHLENVERLAUF

groß ist, um deutliche Interferenzerscheinungen hervorzurufen. Der geometrische Gangunterschied zwischen den Teilstrahlen 1 und 2 beträgt näherungsweise $2d$. Außerdem erfährt der Teilstrahl 2 bei der Reflexion am optisch dichteren Medium (Glasplatte) einen Phasensprung von π , das entspricht einem Gangunterschied von $\lambda/2$. Somit ist der gesamte optische Gangunterschied ΔL zwischen den im Punkt A interferierenden Teilstrahlen 1 und 2

$$\Delta L = 2d_k + \lambda/2. \quad (1)$$

Zwei interferierende Wellen löschen sich aus, wenn sich ihre optischen Weglängen um ein ungeradzahliges Vielfaches einer halben Wellenlänge unterscheiden

$$\Delta L = (2k + 1) \lambda/2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Durch Gleichsetzen von Gl. (1) und (2) erhält man

$$d_k = k\lambda/2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3)$$

d_k ist somit die Dicke des Luftkeiles, die zum k -ten dunklen Ring gehört. Ein Interferenzminimum tritt auch im Berührungspunkt von Linse und Glasplatte auf ($k = 0$, $d_k = 0$), hier ist der optische Wegunterschied allein durch den Phasensprung von π bedingt.

Aus Abb. 1 entnimmt man die geometrische Beziehung

$$R = (R - d) + r^2$$

bzw.

$$r^2 = 2Rd - d^2.$$

Da d sehr klein gegen R ist, kann man d^2 gegenüber $2Rd$ vernachlässigen und erhält

$$r^2 = 2Rd. \quad (4)$$

Für die Radien r_k der dunklen Newtonschen Ringe erhält man mit Gl. (3)

$$r_k^2 = R\lambda k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Je größer k ist, desto kleiner ist der Unterschied zwischen den Radien benachbarter Ringe, d. h. desto dichter liegen sie.

AUFGABEN

1. Bestimmung des Krümmungsradius R einer Plankonvexlinse mit dem grünen Licht einer Hg-Spektrallampe ($\lambda = 546,1$ nm) aus der grafischen Darstellung $r_k^2 = f(k)$.
2. Bestimmung der Wellenlänge einer weiteren Spektrallinie des Hg-Spektrums und der Na-D-Linie aus den grafischen Darstellungen $r_k^2 = f(k)$.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Zur Beobachtung der Newtonschen Ringe dient ein verschiebbares Mikroskop mit Fadenkreuz. Die Ablesung der Mikroskopstellung erfolgt an einer Messschraube (0,01 mm Ablesegenauigkeit). Um Fehler infolge des toten Ganges auszuschalten, ist es notwendig, das Mikroskop nur in einer Richtung über das Ringsystem zu bewegen und die Durchmesser $2r_k$ zu messen. Die Beleuchtung der Messanordnung mit monochromatischem Licht erfolgt von der Seite durch eine Spektrallampe mit Spektralfiltern. Durch eine unter 45° zur Beobachtungsrichtung geneigte

Glasplatte wird das Licht eingespiegelt. Die Spektrallampen dürfen nicht direkt an das Wechselstromnetz angeschlossen werden, sondern müssen in Reihe mit einer Drossel geschaltet werden. Aus der Steigung der Geraden $r_k^2 = f(k)$ werden R bzw. λ nach Gl. (5) bestimmt und die Messunsicherheiten abgeschätzt.

FRAGEN

1. Wie lautet die Bedingung für das Auftreten von Interferenzmaxima?
2. Welche Bedingung gilt für die Radien der hellen Newtonschen Ringe?
3. Wie sehen Newtonsche Ringe bei Beleuchtung der Anordnung mit Sonnenlicht aus?
4. Wie ändern sich die grafischen Darstellungen $r_k^2 = f(k)$, wenn die Linse die Glasplatte nicht einwandfrei berührt?

O7 ABBE - REFRAKTOMETER

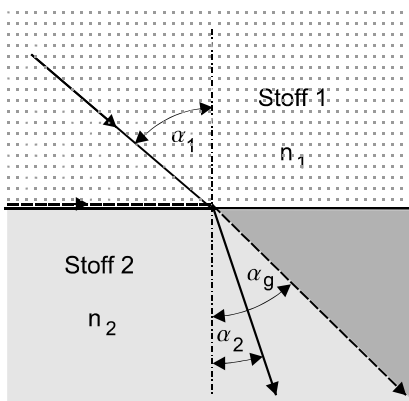
PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Brechungsgesetz, Totalreflexion, absolute und relative Brechzahl, Dispersion, Refraktometer.

Das Abbe-Refraktometer dient zur Messung der Brechzahl flüssiger oder fester Stoffe durch Anwendung des Brechungsgesetzes (Abb. 1)

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \quad (1)$$

mit dem Einfallswinkel α_1 , dem Brechungswinkel α_2 und den Brechzahlen n_1 bzw. n_2 der Stoffe.



Beim Übergang vom optisch dünneren zum optisch dichteren Stoff ($n_1 < n_2$) ist der Brechungswinkel $\alpha_2 < \alpha_1$. Für den maximalen Einfallswinkel $\alpha_1 = 90^\circ$ folgt aus dem Brechungsgesetz

$$\sin \alpha_g = n_1 / n_2 . \quad (2)$$

Auch wenn im Stoff 1 im gesamten punktierten Winkelbereich Licht einfällt, wird im Stoff 2 nur bis zum Grenzwinkel α_g der Totalreflexion der schraffierte Winkelbereich ausgeleuchtet (Abb. 1). Dieser Grenzwinkel wird beim Abbe-Refraktometer zur Bestimmung der Brechzahl verwendet. Im Prismenkörper (Abb. 2) sind das Messprisma und das Beleuchtungsprisma so angeordnet, dass zwischen ihren Grundflächen ein Hohlraum zur Aufnahme der flüssigen Probe entsteht. Er ist in der Abbildung stark vergrößert gezeichnet. Das in das Beleuchtungsprisma einfallende Licht wird an der matten Grundfläche

Abb. 1 BRECHUNGSGESETZ

und das Beleuchtungsprisma so angeordnet, dass zwischen ihren Grundflächen ein Hohlraum zur Aufnahme der flüssigen Probe entsteht. Er ist in der Abbildung stark vergrößert gezeichnet. Das in das Beleuchtungsprisma einfallende Licht wird an der matten Grundfläche

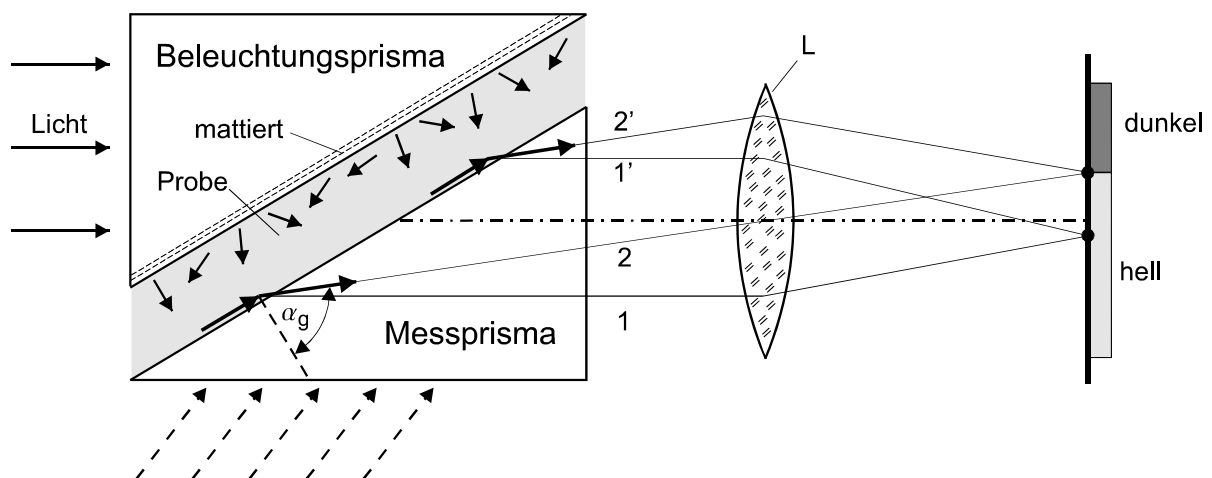


Abb. 2 PRISMENKÖRPER

gestreut und durchsetzt die Probe in allen Richtungen; insbesondere trifft es auch streifend auf die Grundfläche des Messprismas, die für die Messung entscheidende Grenzfläche. Das streifend

einfallende Licht (Abb. 2, dicke Pfeile) führt im Messprisma zum Grenzwinkel α_g , wenn die Brechzahl der Probe n_{Probe} kleiner als die Brechzahl des Messprismas n_{Prisma} ist.

An jedem Punkt dieser Grenzfläche wird das Licht gebrochen; gezeichnet sind für zwei beliebige Punkte jeweils zwei gebrochene Strahlen. Die beiden Strahlen 1 und 1', wie auch alle anderen an der Grenzfläche unter diesem Winkel gebrochenen Strahlen ergeben in der Brennebene der Linse L das Bild B_1 . Die beiden Strahlen 2 und 2' ergeben das Bild B_2 . Es können keine größeren Brechungswinkel auftreten als die der Strahlen 2 und 2', weil sie dem Grenzwinkel α_g der Totalreflexion entsprechen. Beim Abbe-Refraktometer wird das aus dem Messprisma austretende Licht mit einem Fernrohr beobachtet und es entsteht im Gesichtsfeld des Fernrohres eine scharfe Grenzlinie zwischen einem hellen und einem dunklen Bereich. Gemessen wird aber nicht der Grenzwinkel der Totalreflexion, sondern auf einer mit dem Messprisma konstruktiv verbundenen Skale kann direkt die Brechzahl für die Wellenlänge der gelben Na-D-Linie ($\lambda = 589 \text{ nm}$) abgelesen werden.

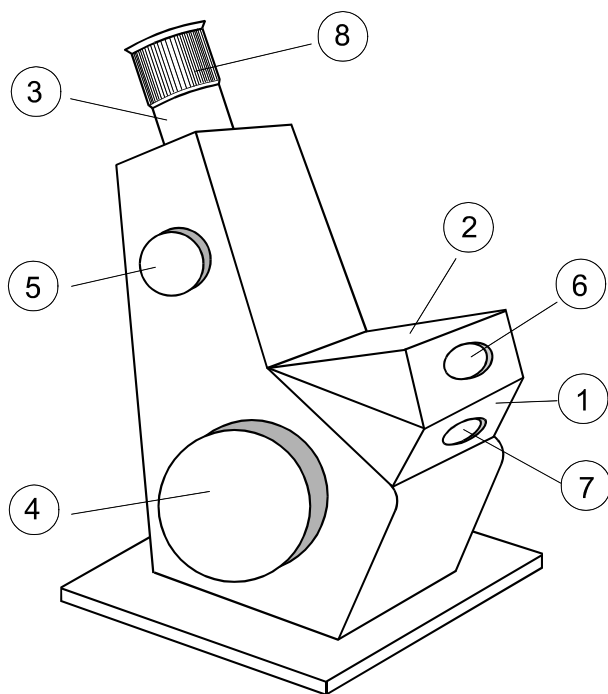


Abb. 3 REFRAKTOMETER

Das Abbe-Refraktometer (Abb. 3) besteht im wesentlichen aus dem Messprisma (1), dem Beleuchtungsprisma (2), dem Beobachtungsfernrohr (3) mit integriertem Ablesemikroskop für die Brechzahlsskale und den Stellrädern (4) und (5). Das Stellrad (4) dient nach der Beschickung des Prismenkörpers mit der Probe zur Einstellung der Hell-Dunkel-Grenzlinie auf das Strichkreuz im Okular. Mit dem Stellrad (5) kann der dispersionsbedingte Farbsaum der Grenzlinie zum Verschwinden gebracht werden. An beiden Prismen befinden sich verschließbare Beleuchtungsfenster (6) und (7) und auf der in Abb. 3 verdeckten Seite des Gerätes eine drehbare Beleuchtungsvorrichtung für die Brechzahlsskale.

Das Abbe-Refraktometer gestattet mehrere Messverfahren:

Das Abbe-Refraktometer gestattet mehrere Messverfahren:

- Im durchfallenden Licht - wie oben beschrieben - ist der Hell-Dunkel-Kontrast besonders groß, aber diese Methode ist nur für durchsichtige Flüssigkeiten geeignet (Aufgabe 1).
- Im streifenden Licht, anwendbar für durchsichtige feste Stoffe, wird das Beleuchtungsprisma weggeklappt und das Licht fällt durch eine mattierte Seitenfläche des Messobjektes parallel zum Messprisma ein (Aufgabe 2).
- Im reflektierten Licht, anwendbar für alle festen und flüssigen Substanzen, wird das Beleuchtungsfenster (7) geöffnet, so dass das Licht dann schräg von unten (Abb. 2, gestrichelte dicke

Pfeile) in das Messprisma eintritt (Aufgabe 2). Dieses Messverfahren ist auch für stark gefärbte Flüssigkeiten und undurchsichtige feste Stoffe anwendbar, im Gegensatz zu den beiden vorstehenden.

AUFGABEN

1. Die Brechzahl von destilliertem Wasser wird zehnmal gemessen und der Mittelwert sowie die Standardabweichung bestimmt.
2. Messung der Brechzahl von Plexiglas mit streifendem und reflektiertem Licht (jeweils sechsmal) und Bestimmung des Mittelwertes.
3. Messung der Brechzahl von Äthylenglykol-Wasser-Gemischen für 10 verschiedene Volumenkonzentrationen und grafische Darstellung der Brechzahlen als Funktion der Volumenkonzentration.
4. Abschätzung des Fehlers für die Konzentrationsangabe und Eintragung der Fehler in die grafische Darstellung.
5. Rechnerische Ermittlung der Eichkurve durch lineare Regression.
6. Bestimmung der Konzentration eines unbekanntes Gemisches unter Verwendung der Eichkurve.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Das Abbe-Refraktometer bedarf als empfindliches Präzisionsinstrument einer besonders pfleglichen Behandlung. Zur Probenbeschickung wird das Beleuchtungsprisma nach vorn geklappt. Flüssige Proben werden nach Reinigung beider Prismenflächen mit einem weichen Lappen und destilliertem Wasser mit einem Kunststoffstab (Gefahr des Zerkratzens!) auf das Messprisma gegeben. Ein Tropfen Messflüssigkeit genügt. Anschließend wird das Beleuchtungsprisma wieder angeklappt und das Fenster (6) geöffnet. Feste durchsichtige Proben werden mit einer polierten ebenen Fläche unter Verwendung einer Immersionsflüssigkeit auf das Messprisma gedrückt. Nach Öffnung des Beleuchtungsfensters (7) kann im reflektierten Licht gemessen werden. Für die Messung im streifenden Licht muss die Seitenkante der Probe, durch die das Licht einfällt, mattiert sein.

Zur Beobachtung mit dem Fernrohr wird der Rändelring (8) so verstellt, dass Strichkreuz und Grenzlinie gleichzeitig scharf gesehen werden. Die Einstellung der Hell-Dunkel-Grenzlinie auf das Strichkreuz mit dem Stellrad (4) muss evtl. nach der Korrektur des Farbsaumes wiederholt werden. Danach kann die Brechzahl abgelesen werden.

Für Aufgabe 1 übe man mit destilliertem Wasser die Handgriffe zur Messung der Brechzahl. Man führe 10 Messungen durch und bestimme Mittelwert und Standardabweichung. Für Aufgabe 2 verwende man den Plexiglaskörper und benutze als Immersionsflüssigkeit Monobromnaptalin ($n = 1,65 \dots$). Das Beleuchtungsfenster (7) wird nur bei Beobachtung im reflektierten

Licht geöffnet. Für Aufgabe 3 stehen 10 Glasröhrchen und 2 Messpipetten zur Herstellung von 10 Gemischen mit unterschiedlicher Konzentration zur Verfügung. Die eine Pipette soll nur für Wasser, die andere nur für Äthylenglykol verwendet werden, um die Konzentrationsfehler gering zu halten. Die Messergebnisse werden graphisch dargestellt. Für Aufgabe 4 berechne man den Fehler der Konzentrationsangaben, indem die Toleranzangaben der Pipetten und ihre Ablesegenauigkeit berücksichtigt werden. In die grafische Darstellung zeichne man den Fehler bezüglich der Brechzahl (Aufgabe 1, Standardabweichung) und bezüglich der Konzentrationsangabe (Aufgabe 4) ein und lege eine Gerade als Eichkurve durch die Messpunkte. Für Aufgabe 5 berechne man die Eichkurve durch lineare Regression, wozu das Rechnerprogramm Geradenausgleich -"GERA"- benutzt werden kann; das Programm berechnet auch die zufälligen Fehler. Man zeichne die rechnerisch ermittelte Gerade in das Diagramm der Aufgabe 3 ein, einschließlich der Fehlerangabe. Für Aufgabe 6 benutze man das am Versuchsplatz vorhandene Äthylenglykol-Wasser-Gemisch.

FRAGEN

1. Wodurch wird der messbare Wertebereich des Refraktometers begrenzt?
2. Warum heißt der Winkel α_g (Abb. 1) der Grenzwinkel der Totalreflexion?
3. Warum lässt sich auch der an der Grenzfläche zur Probe reflektierte Strahl zur Messung ausnutzen (Untersuchung stark absorbierender bzw. undurchsichtiger Substanzen)?

O8 FRAUNHOFERSCHE BEUGUNG

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Huygens-Fresnelsches Prinzip, Interferenz, Beugungsordnungen, Auflösungsvermögen, Laser.

Zum Verständnis des Entstehens optischer Abbildungen ist die geometrische Optik (Versuche O1 und O10) allein nicht ausreichend. Erst unter Hinzunahme von Beugung und Interferenz auf der Grundlage des Wellenbildes für die Lichtausbreitung können die Bildentstehung und für die Praxis so wichtige Fragen wie das Auflösungsvermögen optischer Geräte richtig erklärt werden. Wesentlich für die Deutung der Beugungserscheinungen ist das Huygens-Fresnelsche Prinzip. Zum näheren Studium der Beugung eignen sich speziell geformte Hindernisse, welche zu besonders eindrucksvollen Beugungsbildern führen.

Einfachspalt: Trifft paralleles Licht senkrecht auf einen Schirm, in dem sich ein Spalt der Breite b befindet, so findet man hinter dem Schirm in einer zu Schirm und Spalt parallelen Ebene eine Intensitätsverteilung des gebeugten Lichtes $I_S(\alpha)$ gemäß

$$I_S(\alpha) \sim \left[\frac{\sin(\varphi_s / 2)}{(\varphi_s / 2)} \right]^2 \quad \text{mit} \quad \varphi_s = \frac{2\pi b \sin \alpha}{\lambda}. \quad (1)$$

Hierbei ist α der Beobachtungswinkel gegen die Geradeausrichtung und λ die Lichtwellenlänge. Abb. 1a zeigt diese Verteilung.

Symmetrisch zum Hauptmaximum in Geradeausrichtung liegen in der Intensität stark abnehmende Nebenmaxima. Die dazwischenliegenden Minima sind deutlich schmaler und deshalb

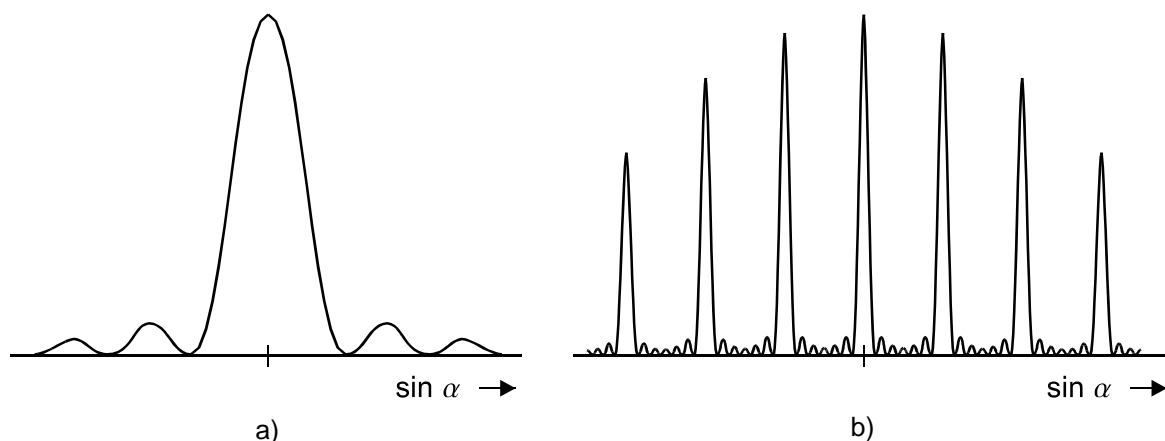


Abb. 1 BEUGUNGSFIGUREN AN a) SPALT UND b) GITTER

leichter zu lokalisieren als die benachbarten Maxima. Zählt man diese Minima von der Mitte beginnend fortlaufend ($k = 1, 2 \dots$), so erhält man aus den Nullstellen von Gl. (1) für die Winkel α_k , unter denen die Minima in Bezug auf die Geradeausrichtung auftreten,

$$\sin \alpha_k = k \cdot \frac{\lambda}{b} \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (2)$$

Gitter: Lässt man paralleles Licht senkrecht auf ein optisches Gitter auffallen, so beobachtet man Beugungserscheinungen, welche durch Überlagerung der Beugungserscheinungen an den Einzelspalten entstehen. Die Vielstrahlinterferenz der Strahlen aus allen N beleuchteten Spalten, welche voneinander den gleichen Abstand g (Gitterkonstante) haben, führt zur Intensitätsverteilung

$$I \sim I_S(\alpha) \cdot \left[\frac{\sin(N\varphi_G/2)}{\sin(\varphi_G/2)} \right]^2 \quad \text{mit} \quad \varphi_G = \frac{2\pi g \sin \alpha}{\lambda} \quad (3)$$

Abb. 1b zeigt diese Verteilung für ein Gitter mit 7 Spalten.

Die Lage der Hauptmaxima folgt aus den Maximalwerten N^2 des zweiten Faktors in Gl. (3) für die Beugungswinkel

$$\sin \alpha_k = k \frac{\lambda}{g} \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (4)$$

Zwischen den Hauptmaxima befinden sich $N-2$ Nebenmaxima, welche mit wachsendem N immer flacher werden und bei den in der Optik benutzten Gittern praktisch unsichtbar sind. Die Hauptmaxima hingegen werden wegen $I \sim N^2$ (nach Gl. (3)) mit wachsendem N immer höher und schmaler.

Lochblende: Fällt paralleles Licht senkrecht auf eine Lochblende, so entsteht als Beugungsfigur eine Anordnung konzentrischer Ringe mit einem ausgeprägten zentralen Maximum. Bezeichnet man mit I_0 die Maximalintensität und mit α wieder den Beobachtungswinkel gegen die Geradeausrichtung, so ergibt sich die Intensitätsverteilung nach der Formel

$$I = I_0 \left[\frac{J_1(\phi/2)}{\phi/4} \right]^2 \quad \text{mit} \quad \phi = \frac{2\pi B \sin \alpha}{\lambda} \quad (5)$$

Hierbei ist J_1 die Besselfunktion 1. Ordnung und B der Blendendurchmesser. Aus den Nullstellen der Besselfunktion 3,832, 7,016, 10,173, 13,324, 16,471 ... erhält man die Lage der Minima. Für den Winkelabstand α zwischen der Geradeausrichtung und dem 1. Minimum, welcher wesentlich für das Auflösungsvermögen optischer Geräte ist, folgt daraus

$$\sin \alpha = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{B} \quad (6)$$

Auflösungsvermögen optischer Geräte: Das Auflösungsvermögen vergrößernder optischer Geräte wie z. B. Fernrohr und Mikroskop wird grundsätzlich durch die Beugung des einfallenden Lichtes an den kreisförmigen Objektivrändern begrenzt. Die Abbildung eines selbstleuchtenden Punktes erfolgt nicht als Punkt, sondern als ein helles Beugungsscheibchen, welches von Beugungsringen umgeben ist, deren Intensität in radialer Richtung stark abnimmt. Zwei Objektpunkte können getrennt wahrgenommen werden, wenn ihre Beugungsscheibchen mit dem Durchmesser D in der Bildebene einen Mindestabstand vom halben Scheibchendurchmesser haben (Abb. 2).

Nimmt man für den Scheibchenradius den Abstand zwischen dem Intensitätsmaximum der zu einem Objektpunkt gehörenden Beugungsfigur und dem ersten Intensitätsminimum an, so folgt für den kleinsten auflösbaren Winkelabstand der Objektpunkte nach Gl. (6) näherungsweise $\alpha_{\min} \approx 1,22\lambda / B$ (B = Objektivdurchmesser). Für das Mikroskop, bei welchem das Objekt näherungsweise in der vorderen Brennebene des Objektivs liegt, folgt aus diesen Überlegungen ein Mindestabstand der Punkte in der Objektebene von

$$d_{\min} \approx f \cdot \alpha_{\min} \approx 1,22 f \frac{\lambda}{B}. \quad (7)$$

Hieraus lässt sich abschätzen, dass man Objektstrukturen nicht mehr auflösen kann, wenn die Abstände kleiner als die Wellenlänge des benutzten Lichtes werden. Eine Berechnung des Auf-

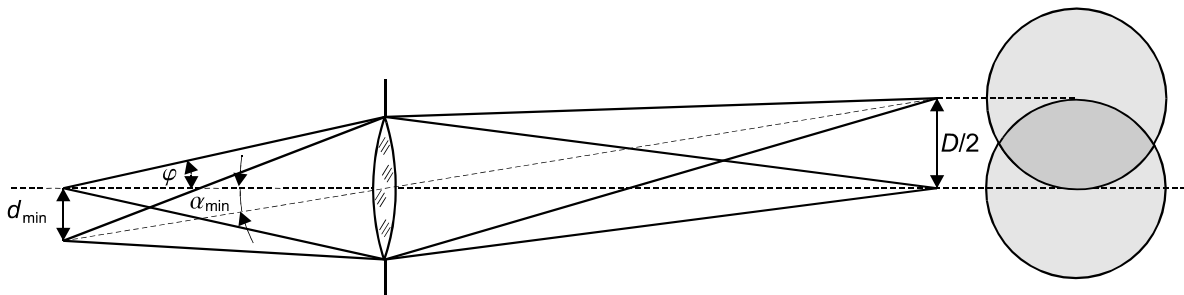


Abb. 2 ZUM AUFLÖSUNGSVERMÖGEN OPTISCHER GERÄTE

lösungsvermögens des Mikroskops auf dieser Grundlage wurde zuerst von H. v. Helmholtz angegeben.

Zu einem quantitativ sehr ähnlichen Ergebnis für das Mikroskop, bei welchem das Objekt normalerweise nicht selbst leuchtet, gelangte E. Abbe im Rahmen seiner Theorie der Bildentstehung für periodische Objekte. Danach ist die notwendige Voraussetzung für die Ähnlichkeit von Bild und Objekt, dass bei der Annahme senkrechter Beleuchtung des Objektes mit parallelem Licht außer der 0. mindestens die 1. Ordnung des am Objekt gebeugten Lichtes in das Objektiv gelangt. Die Abbildung wird umso getreuer, je mehr Ordnungen zu ihr beitragen. Benutzt man nach Abbe als Objekt ein Gitter (Versuch O4) mit der Gitterkonstanten g , so folgt bei Nutzung der 0. und 1. Ordnung aus Gl. (4) als kleinster auflösbarer Spaltabstand

$$g_{\min} = \frac{\lambda}{n \cdot \sin \varphi}. \quad (8)$$

Hierbei ist $n \cdot \sin \varphi$ die numerische Apertur mit n = Brechungsindex des Mediums zwischen Objekt und Objektiv und φ = halber Öffnungswinkel des Objektivs in Bezug auf einen Objektpunkt (Abb. 2).

AUFGABEN

1. Justierung des Laserstrahls
2. Bestimmung der Wellenlänge des Laserlichtes mit einem Strichgitter aus der Lage der Beugungsmaxima nach Gl. (4).

3. Ausmessen der Breite eines Spaltes aus dem Abstand der Beugungsminima nach Gl. (2).
4. Überprüfung der Abbeschen Formel für das Auflösungsvermögen des Mikroskops nach Gl. (8).
5. Messung der relativen Intensitätsverteilung des Beugungsbildes hinter einer Lochblende und Vergleich mit der Theorie nach Gl. (5).

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

ACHTUNG !

Da der Laser auf Grund seiner hohen Leistungsdichte eine intensive Strahlungsquelle darstellt, sollten Sie es unbedingt vermeiden, in den ungeschwächten Laserstrahl bzw. in gerichtete Reflexionen direkt hineinzuschauen.

Am Versuchsplatz stehen ein Helium-Neon-Laser, ein Strichgitter (Gitterkonstante $g = 10^{-5} \text{ m}$), ein Spalt, eine Lochblende, eine Sammellinse (Brennweite $f = 7.8 \text{ cm}$) mit Abblendschiebern, eine verstellbare Spaltblende, ein Fotodetektor, eine Zylinderlinse und ein Beobachtungsschirm zur Verfügung. Für alle Aufgaben soll die Länge von 2 m der optischen Bank sinnvoll ausgenutzt werden. Da der Laser für eine ausreichend stabile Leistungsabgabe eine Einlaufzeit von mindestens 2 Stunden benötigt, muss Aufgabe 5 zuletzt ausgeführt werden.

Die optische Achse der jeweiligen Aufbauten verläuft parallel zur optischen Bank. Bei guter Justierung (Aufgabe 1) lässt sich die Lochblende über eine Strecke von mindestens 1 m verschieben, ohne dass der Lichtpunkt des Lasers merklich aus der Lochmitte auswandert. Für Aufgabe 2 wird der Abstand zwischen dem 0. und dem 2. Beugungsmaximum auf dem Schirm ausgemessen. Für Aufgabe 3 muss die Justierung des fest eingestellten Spaltes sehr sorgfältig erfolgen. Wenn er gut ausgeleuchtet ist, sehen Sie auf dem Schirm symmetrisch zum Zentralbild gleiche Intensitäten und deutliche Minima bis zu hohen Ordnungen (größer 10).

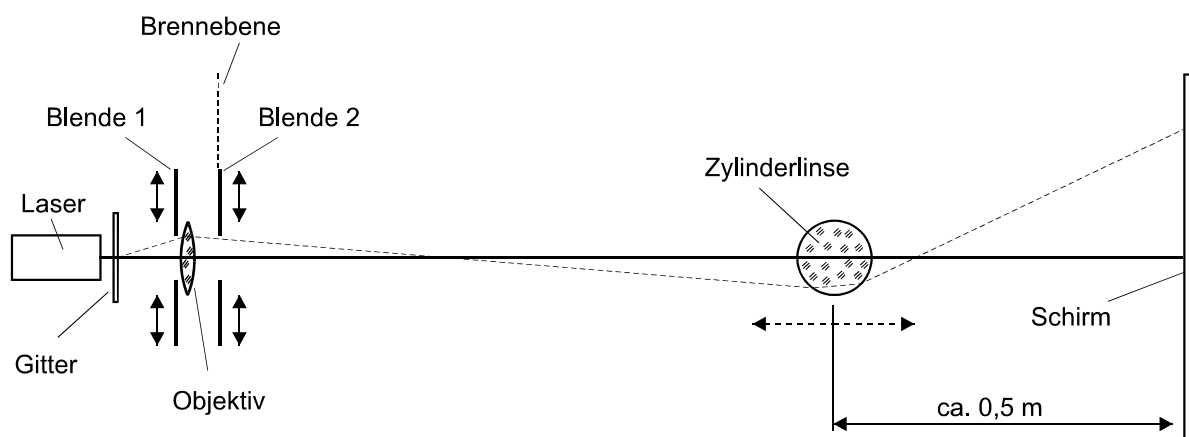


Abb. 3 AUFBAU FÜR AUFGABE 4

Den prinzipiellen Aufbau für Aufgabe 4 zeigt Abb. 3 in der Draufsicht. Die Gegenstandsweite wird wenig größer als die Objektivbrennweite eingestellt und die Blenden werden vollständig

geöffnet. Durch die Zylinderlinse erreicht man eine ausreichende Vergrößerung auf der relativ kurzen Bank. Zur Illustration dieser Wirkung ist in Abb. 3 ein Strahl als gestrichelte Linie eingezeichnet. Bei alternativ geschlossenen Blenden sind die Beugungsordnungen auf diesen als helle Leuchtflecke deutlich zu sehen. Die in Gl. (8) enthaltene Grundaussage gilt als bestätigt, wenn durch schrittweise Ausblendung der an der Abbildung beteiligten Ordnungen entweder an Blende 1 oder an Blende 2 die Bildstruktur verschwindet, wenn weniger als mindestens zwei Ordnungen zur Abbildung beitragen. Überzeugen Sie sich, dass dies für beliebige Ordnungen gilt, insbesondere, dass auch ohne die nullte Ordnung eine Abbildung erreichbar ist.

Für Aufgabe 5 wird zunächst der Blendendurchmesser mit einem Mikroskop ausgemessen. Zur Ausmessung des Beugungsbildes steht als Detektor eine Fotodiode mit einem 0,3 mm breiten Eintrittsspalt zur Verfügung. Die Fotospannung hat am Eingangswiderstand eines Gleichstromverstärkers einen Stromfluss zur Folge, der der auffallenden Lichtintensität proportional ist. Die transversale Detektorposition ist über einen Stelltrieb auf ein hundertstel Millimeter genau einstellbar. Der Abstand zwischen Lochblende und Eintrittsspalt soll 1500 mm betragen. Beginnen Sie die Messungen nahe dem Zentrum und bewegen Sie den Detektor dann mit der von Ihnen gewählten Schrittweite über das Zentrum soweit nach außen, dass außer dem Zentrum wenigstens 4 weitere Ordnungen erfasst werden. Als Schrittweite wird empfohlen: 0,5 mm an den Arbeitsplätzen 1 und 2 und 0,25 mm an den Plätzen 3 und 4. Überprüfen Sie, ob die Messwerte wegen der vorhandenen Grundhelligkeit korrigiert werden müssen.

Die theoretische Intensitätsverteilung kann mit dem PC-Programm „Beugung“ berechnet und ausgedruckt werden, wobei die speziellen Versuchsparameter Blendendurchmesser, Abstand Blende-Detektor und die x-Koordinate des gemessenen nullten Maximums einzugeben sind. Für die grafische Darstellung steht das halblogarithmische Koordinatenpapier Nr. 495 zur Verfügung.

FRAGEN

1. Was besagt das Huygens-Fresnelsche Prinzip?
2. Was besagt das Babinetsche Theorem?
3. Welche Zusammenhänge gibt es zwischen der Leistungsfähigkeit optischer Instrumente und der Lichtbeugung?