

# E13 ELEKTRISCHE ELEMENTARLADUNG

## ZIEL DES VERSUCHES

Im Experiment ist die Quantelung elektrischer Ladungen zu untersuchen und möglichst präzise die elektrische Elementarladung als eine der universellen Naturkonstanten quantitativ zu bestimmen. Genutzt wird der inzwischen „klassische“ Millikan-Versuch mit aufgeladenen Öl-Tröpfchen im elektrostatischen Feld eines Plattenkondensators. Er wird (neben anderen) als ein „Schlüsselexperiment“ für die Entwicklung der modernen Physik im 20. Jahrhundert angesehen. Da der Versuch sehr lehrreich und damit didaktisch wertvoll ist, wird er auch heute noch gern für die Lehre genutzt.

## PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

**Wichtige Grundbegriffe:** Elektron, elektrische Ladung, elektrische Spannung und elektrisches Feld im Plattenkondensator, Coulombkraft, Gewicht, Auftrieb, Dichte, Reibung, Viskosität, Gesetz von Stokes, Brownsche Bewegung, mittlere freie Weglänge

### *Historische Hintergründe*

Der amerikanische Naturwissenschaftler Benjamin Franklin forschte u.a. auch zu Erscheinungen der Elektrizität. Er prägte den Begriff der elektrischen Ladung („charge“), untersuchte in eigenen Experimenten ihre Natur und vermutete, dass sie durch diskrete elektrisch geladene Teilchen hervorgerufen sein könnte. Seine Forschungsergebnisse teilte Franklin an den britischen Botaniker Peter Collinson in London in fünf Briefen mit, die so der Royal Society vorlagen und 1751 als „Experiments and Observations on Electricity, Made at Philadelphia in America“ erschienen.

Im späten 18. Jahrhundert befasste sich der französische Physiker Charles Augustin de Coulomb mit quantitativen Untersuchungen der Elektrostatik und entdeckte 1785 das nach ihm benannte fundamentale Gesetz. Im beginnenden 19. Jahrhundert waren es dann zunächst die experimentellen Arbeiten an elektrochemischen Erscheinungen u.a. von Michael Faraday zur Elektrolyse (1832 Entdeckung der Faraday'schen Gesetze), die die Hypothese der Existenz einer (kleinsten unteilbaren) Elementarladung stützten. Der Begriff des „Elektrons“ geht auf Betrachtungen von 1874 des Iren George Johnstone Stoney zurück; seine erste quantitative Abschätzung der Elementarladung aus elektrolytischen Experimenten war allerdings noch um einen Faktor von 20 zu klein.

Der experimentell wirklich sichere Nachweis der Existenz des Elektrons als Elementarteilchen gelang schließlich im ausgehenden 19. Jahrhundert dem am Cavendish-Laboratorium der englischen Universität Cambridge seit 1884 tätigen Joseph John Thomson, der 1897 in unterschiedlichen Experimenten die konstante spezifische Ladung des Elektrons (als Verhältnis von Masse und Ladung, vgl. Praktikumsversuch „Spezifische Ladung von Elektronen“) bestimmte [1]. Er folgerte aus seinen Ergebnissen, dass Kathodenstrahlen aus bisher unentdeckten Teilchen sehr kleiner Masse bestehen müssten, die er zunächst sehr vorsichtig als negativ geladene „Korpuskel“ und erst später eindeutig als „Elektronen“ bezeichnete. „Als Anerkennung des großen Verdienstes, den er sich durch seine theoretischen und experimentellen Untersuchungen über den Durchgang der Elektrizität durch Gase erworben hat“ erhielt J. J. Thomson 1906 den Nobelpreis für Physik.

Ungeklärt war aber noch die Größe der Elementarladung: John Sealy Townsend, ein Schüler und Mitarbeiter von Thomson, unternahm 1897 erste Versuche, sie mithilfe der von ihm entwickelten Tröpfchenmethode zu bestimmen. Er erhielt dabei sehr schlecht reproduzierbare Ergebnisse in der Größenordnung von  $10^{-19}$  C. Sein Kollege Harold Albert Wilson, der u.a. auch an der Universität Cambridge studiert hatte und seit 1896 als Maxwell-Stipendiat am Cavendish-Laboratorium arbeitete, versuchte sich 1903 mit der Tröpfchenmethode unter Verwendung eines Plattenkondensators an einer Batterie mit einer Spannung von 2 kV. Auch er verwendete kleinste Wasser-Tröpfchen: ihre „Flüchtigkeit“ (Verdunstung!) war ein so schwerwiegender Nachteil, dass die Ergebnisse eine große Streuung  $(0,66 \cdot 1,47) \cdot 10^{-19}$  C zeigten und nicht überzeugend reproduzierbar waren.

---

[1] Joseph John Thomson (1897) „Cathode Rays“, Philosophical Magazine Series 5/44, pp. 293-316

## E13 ELEKTRISCHE ELEMENTARLADUNG



Abb. 1 George J. Stoney, Joseph J. Thomson, John S. Townsend und Harold A. Wilson

Beeindruckt durch die Arbeiten Thomsons in Cambridge, begann 1908 am Ryerson-Physik-Laboratorium der Universität Chicago Robert Andrews Millikan mit Unterstützung seines Doktoranden Harvey Fletcher gezielte Experimente zur präzisen Bestimmung der elektrischen Elementarladung  $e$ . Die Mängel der bisherigen Untersuchungen genau analysierend, verbesserten sie systematisch den ursprünglichen Versuchsaufbau von Wilson. Sie nutzten zur Erzeugung eines stärkeren elektrostatischen Feldes eine elektrische Batterie mit 10 kV Quellspannung (damals ein ganz enormer technischer Aufwand) und zunächst ebenfalls kleinste, mit einem Zerstäuber erzeugte Wasser-Tröpfchen. Ihre ersten Ergebnisse wiesen zwar darauf hin, dass die Ladungen auf den Tröpfchen immer ganzzahlige Vielfache von  $e$  sind, waren aber wegen ihrer unzureichenden Messgenauigkeit und Reproduzierbarkeit noch nicht überzeugend. Der Durchbruch gelang ihnen schließlich, als sie anstelle von Wasser ein bedeutend weniger „flüchtiges“ Öl (Vakuum-Öl mit einem extrem niedrigen Dampfdruck) zerstäubten und ihre Ergebnisse so deutlich reproduzierbarer wurden.



Abb. 2 Robert Andrews Millikan, Harvey Fletcher und ihre experimentelle Anordnung

Um den Versuchsaufbau gegen die Einwirkung äußerer Einflüsse weitgehend zu isolieren (vgl. Abb. 2 rechts), wurde der Plattenkondensator ( $M, N$ ) im Innern eines Ölbad-Thermostaten (Temperaturkonstanz  $\pm 0,02$  K) in einem Messinggefäß ( $D$ ) mit konstantem Gas-Druck eingebaut. Durch Einbau eines 80 cm langen Wasserfilters ( $w$ ) konnte eine Erwärmung des Innenraumes durch die als äußere Lichtquelle zur Beobachtung verwendete Bogenlampe  $a$  ausgeschlossen werden.

Die gemeinsame Forschungsarbeit von Millikan und Fletcher wird kontrovers gesehen: Nach dem Tod von Harvey Fletcher 1981 wurden Dokumente gefunden, die Hinweise darauf enthalten, dass Millikan ihn dazu genötigt hatte, im Gegenzug zur Unterstützung seiner (dann 1911 tatsächlich erfolgten) Dissertation auf eine Ko-Autorschaft bei Veröffentlichungen zu verzichten (was ihrer lebenslangen Freundschaft aber wohl nicht schadete).

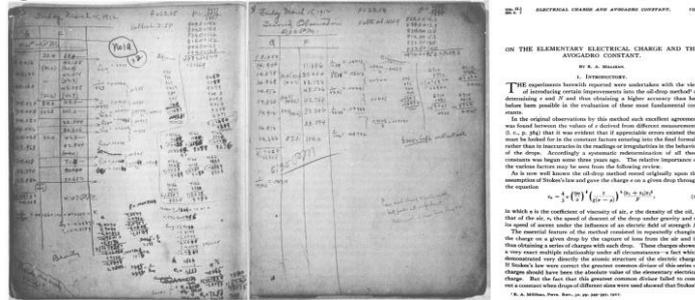
In der ersten Veröffentlichung von 1910 [2] wurde die Elementarladung von Millikan (noch etwas zu groß) mit  $e = 1,63 \cdot 10^{-19}$  C\* angegeben und ließ sich sehr gut mit den früheren Werten von

[2] R.A. Millikan (1910) "XXII. A new modification of the cloud method of determining the elementary electrical charge and the most probable value of that charge", The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 19:110, 209-228

\* Im damals noch üblichen cgs-basierten elektrostatischen Einheitensystem (ESU) wurden Ladungen in „Statcoulomb“ bzw. „statC“ angegeben. Die Zahlenangaben hier entsprechen natürlich dem Internationalen Einheitensystem (SI).

# E13 ELEKTRISCHE ELEMENTARLADUNG

Planck, Rutherford, Geiger u.a. vergleichen. Nach etlichen weiteren Untersuchungen lautete dann im Jahr 1913 das Endergebnis von Millikan  $e = 1,5924(17) \cdot 10^{-19} \text{ C}$  [3].



**Abb. 3** Laborbuch von R. A. Millikan und die erste Seite seines Artikels von 1913

Für die korrekte Auswertung der erhaltenen Versuchsdaten war es wichtig, das Stokes'sche Gesetz für die Reibung der fallenden mikroskopischen Öl-Tröpfchen in Luft mit der zwingend notwendigen Korrektur nach Ebenezer Cunningham [4] zu versehen. Bei genauer Betrachtung des Ergebnisses von Millikan fällt auf, dass es vom heute akzeptierten Wert  $e = 1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  [5] zwar nur um etwa 0,6 % nach unten abweicht – und das signifikant (d.h. außerhalb des Unsicherheitsintervalls). Das liegt einfach daran, dass Millikan damals für seine Auswertungen einen nicht ganz korrekten Wert der Viskosität von Luft verwenden musste.

Umstritten ist das 1913 veröffentlichte Ergebnis heute deswegen, weil Millikan bei der Auswertung seiner Messdaten auch etliche Werte vorsätzlich(!) als „unpassend“ verworfen hatte: Unter Berücksichtigung auch dieser Messwerte hätte sein erzielt Ergebnis eine größere Unsicherheit gehabt (vergleichbar mit Ergebnissen seines wissenschaftlichen Konkurrenten Felix Ehrenhaft in Wien). Millikan trat damals aber mit dem Anspruch an, die genauesten Ergebnisse zu haben. Nach heutigen strengen Maßstäben würde sein Vorgehen als wissenschaftliches Fehlverhalten bewertet werden!

Bei aller berechtigten Kritik: Der stets sehr akribischen, detailreichen und mit ausgeprägtem Spürsinn betriebenen experimentellen Tätigkeit von Robert Andrews Millikan gebührt höchster Respekt; an seiner Entdeckung der Elementarladung ist nicht zu zweifeln. Völlig zu Recht erhielt er 1923 den Physik-Nobelpreis "für seine Arbeiten über die Elementarladung der Elektrizität und über den photoelektrischen Effekt" [6]. Eine interessante Gesamtdarstellung seiner Arbeiten zu Elektronen und daraus abgeleiteten Überlegungen lieferte Millikan mit einem 1917 erstmals erschienenen Buch [7]. Die elektrische Elementarladung  $e = 1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  bestimmt als eine fundamentale Naturkonstante die Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung. Um mögliche Verwirrungen bezüglich des Vorzeichens zu vermeiden: Die von einem Elektron als Elementarteilchen getragene Ladung beträgt  $q_e = -1e$ .

Inzwischen ist der klassische Millikan-Versuch durch elektrische Quanteneffekte abgelöst worden: Sie erzielen eine erheblich höhere Definitionsgenauigkeit für  $e$  relativ in der Größenordnung einiger weniger  $10^{-10}$ . Als eine der insgesamt 7 Definitionskonstanten für das seit dem 20. Mai 2019 gültige (überarbeitete) Internationale Einheitensystem (SI) definiert  $e$  gemeinsam mit (der inzwischen

[3] R.A. Millikan (1913) "On the Elementary Electrical Charge and the Avogadro Constant", Physical Review Series II. 2 (2), pp. 109–143  
[4] E. Cunningham (1910) „On the Velocity of Steady Fall of Spherical Particles through Fluid Medium“, Proc. Roy. Soc. A 83(1910) pp. 357-365  
[5] Durch die seit Mai 2019 gültige Neudefinition des Internationalen Einheitensystems (SI) wird die Elementarladung zur Definition des Ampere verwendet, daher ist der von CODATA empfohlene und hier angegebene Wert exakt.  
[6] Millikan war von Einsteins quantenphysikalischer Erklärung des äußeren Fotoeffektes von 1905 zuerst nicht überzeugt und bezweifelte sie auch noch 1915/16 in einer Veröffentlichung; ungeachtet seiner eigenen umfangreichen experimentellen Arbeiten daran!  
[7] R. A. Millikan (1917) „The Electron: Its Isolation and Measurement and the Determination of Some of its Properties“, University Of Chicago Press (1917)

## E13 ELEKTRISCHE ELEMENTARLADUNG

relativ auf  $10^{-15}$  genau definierten) „Atom-Sekunde“ nun das Ampere als Einheit der Stromstärke [8], das auch weiterhin SI-Basiseinheit bleibt.

### Grundlagen der verwendeten experimentellen Methodik

Die dem Millikan-Experiment zugrunde liegende Physik ist in Schulbüchern (als Teil des Kerncurriculums der Gymnasialstufe) und auch in jedem gängigen Physiklehrbuch enthalten, so dass hier eigentlich nicht mehr alles detailliert begründet werden müsste..

Die für das Experiment verwendeten Öl-Tröpfchen werden mit einem Zerstäuber erzeugt. Sie sind so klein, dass man sie mit einem normalen Licht-Mikroskop nicht mehr direkt beobachten kann. Mithilfe der seit gut 250 Jahren bekannten Dunkelfeldmethode, die ab ca. 1900 bei der sog. Ultramikroskopie eingesetzt wurde, gelingt das dennoch: An Beobachtungsobjekten wird Licht nicht nur absorbiert, sondern auch immer teilweise abgelenkt bzw. gestreut (Tyndall-Effekt). Falls die Beleuchtung so erfolgt, dass direktes Licht das Mikroskop-Objektiv nicht trifft, sieht ein Beobachter nur das „abgelenkte“ Licht. Auf diese Weise sind dann auch Teilchen noch zu erkennen, die kleiner sind als die Auflösungsgrenze des Mikroskops - in Form der entstehenden Beugungsscheibchen.

Die zu untersuchenden Öl-Tröpfchen müssen elektrisch geladen werden: Bei Millikan wurde das durch Röntgenstrahlung erreicht – das ist für uns aus Sicherheitsgründen aber tabu. Es genügt zum Glück bereits die Reibung der Tröpfchen aneinander beim Zerstäuben oder an der Luft, um sie hinreichend aufzuladen. Eine mit dem Zerstäuber in der Experimentierkammer erzeugte (möglichst) kleine Tröpfchen-Wolke gelangt durch eine kleine Öffnung in der oberen Platte in das Innere des Kondensators. Die kugelförmigen Tröpfchen sind so klein, dass für sie die Luft wie eine „zähe Flüssigkeit“ wirkt und sie daher noch längere Zeit als Aerosol-Teilchen „herumschweben“ können. Neben der Gewichtskraft wirkt auf sie die entgegen gerichtete Auftriebskraft; wegen der im Vergleich zu Luft größeren Dichte des Öls überwiegt die erstere. Die Tröpfchen „fallen“ allerdings nur zu Beginn beschleunigt, bevor ihre Geschwindigkeit infolge der Luftreibung (Strömungswiderstand) konstant wird. Wird an die Platten des Kondensators eine elektrische Spannung angelegt, so wirkt auf die geladenen Tröpfchen auch die Coulomb-Kraft.

**Tab. 1 Auf die Öl-Tröpfchen in der Experimentier-Kammer wirkende Kräfte**

Gewichtskraft	$F_G = m_{\text{Tröpfchen}} \cdot g = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho_{\text{Öl}} \cdot g$
Auftriebskraft in Luft	$F_A = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho_{\text{Luft}} \cdot g$
Stokes'sche Reibungskraft	$F_R = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta_{\text{Luft}} \cdot v$
Coulomb-Kraft	$F_C = q \cdot E = q \cdot \frac{U}{d}$
mit $m_{\text{Tröpfchen}}$ als Masse und $r$ als Radius der Öl-Tropfen, $g$ als Fallbeschleunigung, $\rho_{\text{Öl}}$ und $\rho_{\text{Luft}}$ als Massendichten von Öl bzw. Luft, $v$ als Geschwindigkeit der Tropfen, $q$ als elektrischer Ladung auf ihnen, $U$ als äußerer Spannung am Kondensator und $d$ als seinem Plattenabstand Anmerkung: Es wird angenommen, dass alle o.g. Kräfte <i>parallel</i> zueinander sind.	

Grundsätzlich kann die Kondensatorspannung  $U$  exakt so eingestellt werden, dass ein Öl-Tröpfchen im Innern des Kondensators gerade schwebt: Dann hat sich ein Kräfte-Gleichgewicht gemäß

$$F_C = F_G - F_A \quad (1)$$

eingestellt (Reibung verschwindet!) und somit wäre die elektrische Ladung  $q$  auf dem Tröpfchen mithilfe der Coulomb-Kraft  $F_C$  bestimmbar. Vom Öl-Tröpfchen sind aber weder seine Masse  $m_{\text{Tröpfchen}}$  noch sein Volumen  $V_{\text{Tröpfchen}} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$  bekannt, so dass die rechte Seite in (1) völlig un-

[8] B. Jeckelmann, F. Piquemal (2019) "The Elementary Charge for the Definition and Realization of the Ampere", Annalen der Physik 2019, 531, 1800389

## E13 ELEKTRISCHE ELEMENTARLADUNG

bestimmt bleibt [9]. Das Volumen bzw. der Radius  $r$  kugelförmiger Öl-Tröpfchen wird zugänglich über die auf sie wirkende Reibungskraft  $F_R$  nach George Gabriel Stokes [10] mit

$$F_R = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta_{Luft} \cdot v. \quad (2)$$

Hier haben wir neben der (sich einstellenden konstanten) Geschwindigkeit  $v$  der sich in der Luft bewegenden Öl-Tröpfchen mit  $\eta_{Luft}$  die sog. dynamische Viskosität der Luft, die linear ansteigt mit der Temperatur  $\vartheta_{Luft}$  (Temperaturkoeffizient von  $\frac{\partial \eta_{Luft}}{\partial T} \cong 49 \text{ nPa} \cdot \text{s} \cdot \text{K}^{-1}$ ) und fast unabhängig ist vom Druck  $p_{Luft}$  (gültig für nicht zu große Drücke und wenn die mittlere freie Weglänge  $\lambda_{Luft}$  der Luftmoleküle gegenüber Gefäßabmessungen klein und gegenüber Molekülabmessungen groß ist).

Für unser Experiment brauchen wir eine (zugeschnittene) Größengleichung für  $\eta_{Luft}$  nicht explizit, weil Temperatur und Druck der umgebenden Luft automatisch durch Sensoren gemessen werden, daraus gleich  $\eta_{Luft}$  berechnet und angezeigt wird. Für trockene Luft unter Normalbedingungen, d.h. bei  $\vartheta_{Luft} = 0 \text{ }^\circ\text{C}$  und  $p_{Luft} = 101,325 \text{ kPa}$ , sind die Zahlenwerte für die dynamische Viskosität  $\eta_{Luft} = 17,218 \text{ } \mu\text{Pa} \cdot \text{s}$ , die mittlere freie Weglänge  $\lambda = 59,8 \text{ nm}$  und die Volumenmassendichte  $\rho_{Luft} = 1,2928 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  [11].

Die Abmessungen der kleinsten Öl-Tröpfchen liegen aber bereits in der Größenordnung der soeben erwähnten mittleren freien Weglänge von Luftmolekülen bei Normaldruck; damit ist die sog. Haftbedingung der Strömungsmechanik verletzt: Die adhäsiven Kräfte zwischen den Tröpfchen und Luftmolekülen sind dann nicht mehr größer als die Kohäsionskräfte zwischen den Luftmolekülen. Deshalb muss zwingend die schon erwähnte Cunningham-Korrektur angewendet werden. Statt  $\eta_{Luft}$  ist in (2) eine korrigierte dynamische Viskosität in der Form

$$\eta_{Luft}^{korr} = \frac{\eta_{Luft}}{1 + A \cdot \frac{\lambda}{r}} \quad (3)$$

zu verwenden, wobei  $A = \alpha + \beta \cdot e^{-\gamma \cdot \frac{r}{\lambda}}$  eigentlich selbst eine Funktion von Radius  $r$  und mittlerer freier Weglänge  $\lambda$  darstellt [12]. Unter unseren Bedingungen können wir aber die von Millikan in [4] angeführte und (zum Glück) etwas einfachere Näherung mit

$$\eta_{Luft}^{korr} = \frac{\eta_{Luft}}{1 + \frac{A^*}{r \cdot p_{Luft}}} \quad (4)$$

dem äußeren Luftdruck  $p_{Luft}$  und der Konstanten  $A^* = 8,22 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{m}$  verwenden. Auch dafür muss allerdings der Tröpfchen-Radius bekannt sein!

Aus der jeweiligen wirkenden Bilanz der in Tab. 1 aufgeführten Kräfte und durch die Messung der sich einstellenden konstanten Sink- bzw. Steiggeschwindigkeit  $v$  der Öl-Tröpfchen lässt sich ihr Radius  $r$  mithilfe von (2-4) bestimmen - ebenso wie die elektrische Ladung auf ihnen. Grundsätzlich sind dafür in der experimentellen Praxis drei verschiedene Verfahren denkbar, die hier nachfolgend beschrieben werden.

### Schwebemethode

Man ermittelt zuerst die elektrische Feldstärke  $E$  bzw. Spannung  $U_{schweb}$ , die ein Tröpfchen mit der Ladung  $q$  möglichst exakt in der Schwebelage hält. Dabei kompensiert die Coulombkraft  $F_C$  zusammen mit der Auftriebskraft  $F_A$  die Gewichtskraft  $F_G$ , woraus nun

$$q \cdot \frac{U_{schweb}}{d} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot (\rho_{\text{öl}} - \rho_{Luft}) \cdot g \quad (5)$$

[9] Selbst wenn uns die Massendichte des Öls bekannt ist, so lässt sich der Radius der Öltröpfchen mit dem Lichtmikroskop nicht bestimmen: Dafür sind sie mit einem Durchmesser unterhalb der Auflösungsgrenze einfach viel zu klein!

[10] G. G. Stokes (1845) „On the Theories of the Internal friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids“, Transactions of the Cambridge Philosophical Society 1845, Vol. VIII, Part III, pp. 287-319

[11] Gas Encyclopedia Air Liquide, online unter <https://encyclopedia.airliquide.com>

[12] C. N. Davies (1945) “Definitive equations for the fluid resistance of spheres”, Proc. Phys. Soc. 1945, Vol. 57, pp. 259-270

## E13 ELEKTRISCHE ELEMENTARLADUNG

folgt. Anschließend wird die Kondensatorspannung  $U_{schweb}$  abgeschaltet und die sich ohne elektrisches Feld einstellende konstante Sinkgeschwindigkeit  $v = v_0$  desselben Tröpfchens bestimmt, in dem bei Beobachtung durch das Mikroskop die Zeit für das Sinken auf einer bekannten Strecke gestoppt wird. Auf das Tröpfchen wirken dabei nur Gewichtskraft  $F_G$ , Auftriebskraft  $F_A$  und Stokes'sche Reibungskraft  $F_R$ , so dass aus der Kräftebilanz  $F_G - F_A = F_R$

$$\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot (\rho_{\text{öl}} - \rho_{\text{Luft}}) \cdot g = \frac{6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta_{\text{Luft}} \cdot v_0}{1 + \frac{A^*}{r \cdot p}} \quad (6)$$

der noch unbestimmte Tröpfchenradius  $r$  berechnet werden kann – alle anderen Größen sind bekannt. In (6) ist die schon früher erwähnte Cunningham-Korrektur bereits enthalten. Von den sich formal ergebenden Lösungen für  $r$  ist aber nur eine physikalisch sinnvoll, nämlich

$$r = \sqrt{\left(\frac{A^*}{2 \cdot p}\right)^2 + \frac{9 \cdot v_0 \cdot \eta_{\text{Luft}}}{2 \cdot g \cdot (\rho_{\text{öl}} - \rho_{\text{Luft}})}} - \frac{A^*}{2 \cdot p} \quad (7)$$

Diese Lösung setzen wir in die Kräfte-Bilanz (5) ein und erhalten mit

$$q = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot (\rho_{\text{öl}} - \rho_{\text{Luft}}) \cdot g \cdot \frac{d}{U_{schweb}} \quad (8)$$

das gesuchte Ergebnis für die elektrische Ladung auf dem im Kondensator schwebenden Öl-Tröpfchen.

### Dynamische Einfeldmethode

Zunächst wird wieder ohne äußeres elektrisches Feld die Geschwindigkeit  $v_0$  eines ausgewählten langsam sinkenden Öl-Tröpfchens gemessen, um später gemäß (7) den Tröpfchenradius  $r$  zu bestimmen. Mit demselben Tröpfchen im Gesichtsfeld wird nun eine Kondensatorspannung  $U_{steig}$  eingeschaltet, die das Tröpfchen (langsam genug für die Beobachtung) wieder aufsteigen lässt. Die zugehörige Steiggeschwindigkeit  $v_{steig}$  wird bestimmt. Die Kräfte-Bilanz  $F_C + F_A - F_G = F_R$  für das langsam aufsteigende Öl-Tröpfchen in der Form

$$q \cdot \frac{U_{steig}}{d} + \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \rho_{\text{Luft}} \cdot g - \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \rho_{\text{öl}} \cdot g = \frac{6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta_{\text{Luft}} \cdot v_{steig}}{1 + \frac{A^*}{r \cdot p}} \quad (9)$$

liefert für die Ladung die Beziehung

$$q = \frac{d}{U_{steig}} \cdot \left\{ \frac{6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta_{\text{Luft}} \cdot v_{steig}}{1 + \frac{A^*}{r \cdot p}} + \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot g \cdot (\rho_{\text{öl}} - \rho_{\text{Luft}}) \right\} \quad (10)$$

Der letzte Term in der geschweiften Klammer für  $F_G - F_A$  kann mit (6) ersetzt werden; so dass

$$q = \frac{6 \cdot \pi \cdot d \cdot r \cdot \eta_{\text{Luft}} \cdot (v_{steig} + v_0)}{U_{steig} \cdot \left(1 + \frac{A^*}{r \cdot p}\right)} \quad (11)$$

mit dem Radius  $r$  nach (7) das gesuchte Ergebnis ist.

### Dynamische Zweifeldmethode

Ist es möglich, die Kondensatorspannung  $U_{\pm}$  mit einem Umschalter („Polwender“) einfach umzupolen, so lässt sich die Richtung des elektrischen Feldes umkehren, ohne seinen Betrag zu verändern. Bei diesem Verfahren sind dann experimentell unter Wirkung des gegenpoligen (aber betragskonstanten!) elektrischen Feldes jeweils Steiggeschwindigkeit  $v_{steig}$  und Sinkgeschwindigkeit  $v_{sink}$  für ein ausgewähltes Öl-Tröpfchen zu bestimmen.

Für das steigende Tröpfchen ist das elektrische Feld dem Schwerfeld entgegen gerichtet und es gilt erneut (9). Zweckmäßig schreiben wir das jetzt aber in der Form

## E13 ELEKTRISCHE ELEMENTARLADUNG

$$\frac{6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta_{Luft} \cdot v_{steig}}{1 + \frac{A^*}{r \cdot p}} = q \cdot \frac{U_{\pm}}{d} - \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot (\rho_{\ddot{o}l} - \rho_{Luft}) \cdot g \quad (12)$$

Bei umgekehrter Richtung wirkt das elektrische Feld gemeinsam mit dem Schwerfeld dem Auftrieb und der Reibung entgegen, die Sinkgeschwindigkeit  $v_{sink}$  ist höher als ohne elektrisches Feld. Aus der zugehörigen Kräfte-Bilanz  $F_C + F_G - F_A = F_R$  folgt dann

$$\frac{6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta_{Luft} \cdot v_{sink}}{1 + \frac{A^*}{r \cdot p}} = q \cdot \frac{U_{\pm}}{d} + \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot (\rho_{\ddot{o}l} - \rho_{Luft}) \cdot g \quad (13)$$

Die beiden Beziehungen (12) und (13) als Gleichungssystem erlauben es, die uns interessierenden Größen  $r$  und  $q$  aus ihnen zu berechnen. Ihre Addition liefert

$$q = \frac{3 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta_{Luft} \cdot d}{U_{\pm} \cdot \left(1 + \frac{A^*}{r \cdot p}\right)} \cdot (v_{sink} + v_{steig}) \quad (14)$$

als Ergebnis für die Tröpfchen-Ladung und ihre Subtraktion (nach einigen Kürzungen) die quadratische Gleichung

$$\frac{9 \cdot \eta_{Luft} \cdot (v_{sink} - v_{steig})}{1 + \frac{A^*}{r \cdot p}} = 4 \cdot r^2 \cdot (\rho_{\ddot{o}l} - \rho_{Luft}) \cdot g \quad (15)$$

mit der einzigen physikalisch sinnvollen Lösung

$$r = \sqrt{\left(\frac{A^*}{2 \cdot p}\right)^2 + \frac{9 \cdot \eta_{Luft} \cdot (v_{sink} - v_{steig})}{4 \cdot g \cdot (\rho_{\ddot{o}l} - \rho_{Luft})}} - \frac{A^*}{2 \cdot p} \quad (16)$$

für den Tröpfchen-Radius.

### Betrachtungen zur Brownschen Bewegung

Im Experiment wird jegliche Vertikalbewegung der Tröpfchen ebenso wie das „Schweben“ durch ihre unregelmäßige und ruckartige Wärmebewegung (Brownsche Bewegung) überlagert, die zufälliger Natur ist und entsprechend zufällige Messabweichungen verursacht: Wie von Einstein in seiner Arbeit [13] gezeigt, nimmt dabei entlang einer Koordinate  $z$  der mittlere Abstand  $\sigma_z$  eines Tröpfchens vom Anfangsort entsprechend  $\sigma_z = \sqrt{2 \cdot D \cdot t}$  mit der Zeit zu. Hier ist  $D = \frac{k \cdot T}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r}$  der Diffusionskoeffizient der Tröpfchen,  $k = 1,380649 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  die Boltzmann-Konstante und  $T$  die Temperatur in Kelvin. Durch die Brownsche Bewegung (aber nicht nur) bedingt, ist bei der Bestimmung von Tröpfchen-Geschwindigkeiten  $v = \frac{z}{t}$  beim Sinken oder Steigen eine deutliche statistische Unsicherheit  $u_v$  zu erwarten - für den entsprechenden Beitrag zur relativen Unsicherheiten gilt dann  $\frac{u_v}{v} \geq \frac{\sigma_z}{z}$ , die Unsicherheitsbeiträge für die Strecke  $z$  und das durch „Stoppen“ bestimmte Zeitintervall  $t$  kommen noch zusätzlich hinzu.

Für alle eben beschriebenen Verfahren bewirkt das eine relativ große statistische Streuung berechneter Ladungen, so dass eine zuverlässige Bestimmung der Elementarladung nur durch die statistische Auswertung der Messdaten von vielen geladenen Tröpfchen gelingen wird!

Es müssen dabei möglichst solche Tröpfchen ausgewählt werden, die nur wenige Elementarladungen tragen: Bei zu großen Ladungen wird die statistische Unsicherheit der Ladung größer als die Elementarladung  $u_q > e$  und es kann so keine bestimmte Ladungszahl  $n = \frac{|q|}{e}$  sicher zugeordnet werden. Die durch Brownsche Bewegung verursachte Streuung der Messwerte müsste mit größerer Messstrecke  $z$  (wegen  $\sigma_z \sim \sqrt{t}$  und  $z \sim t$ ) und mit größerem Tröpfchenradius  $r$  (wegen  $\sigma_z \sim r^{-\frac{1}{2}}$  und  $v_{sink} \sim r^2$ ) abnehmen – das sollte dann im experimentellen Vorgehen berücksichtigt werden.

---

[13] A. Einstein (1905) „Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen“, Annalen der Physik Band 322 Nr. 8, S. 549–560

## E13 ELEKTRISCHE ELEMENTARLADUNG

### Versuchsaufbau (Millikan-Apparat)

Der im Experiment genutzte kommerzielle Millikan-Apparat basiert auf dem ursprünglichen Aufbau von Millikan, kommt aber ohne radioaktive Strahlungsquelle aus und ist dazu sehr kompakt und portabel (s. Abb. 4).

Das Gerät enthält alle notwendigen Teile wie die Messkammer mit Plattenkondensator, den Öl-Zerstäuber, die schalt- und regelbare Spannungsquelle, das Messmikroskop mit Okularskale und regelbarer Beleuchtungseinrichtung und eine elektronische Stoppuhr. Darüber hinaus werden Raumtemperatur und Luftdruck ebenso wie die Kondensatorspannung elektronisch gemessen und die (noch unkorrigierte!) dynamische Viskosität der Luft berechnet. Die gemessene Steig- und Sinkzeit, die eingestellte elektrische Spannung sowie alle weiteren für die Auswertung relevanten Parameter werden auf einem Bildschirm gemeinsam angezeigt.

Die Spannung am Kondensator mit Platten von 50 mm Durchmesser und 3 mm Abstand ist im Intervall 0..600 V sowie in ihrer Polarität einstellbar. Das vorhandene Messmikroskop besitzt Vergrößerungen von  $2 \times$  für das Objektiv und  $15 \times$  für das Okular mit einer Skale (10 mm Länge bei 0,1 mm Teilung).



**Abb. 4** Verwendeter Millikan-Apparat von 3B SCIENTIFIC® und seine Bestandteile

- |                              |                              |                      |
|------------------------------|------------------------------|----------------------|
| 1 - verstellbare FüÙe        | 6 - Experimentierkammer      | 11 - Spannungsregler |
| 2 - Messmikroskop            | 7 - Anzeige- und Bedienfeld  | 12 - GeblÙeseball    |
| 3 - Regler LichtintensitÙt   | 8 - ZerstÙuber               | 13 - Fokussiertrieb  |
| 4 - Schalter fÙr Spannung    | 9 - PolaritÙtsumschalter     |                      |
| 5 - Schalter fÙr Zeitmessung | 10 - Anschluss fÙr NetzgerÙt |                      |

Das verwendete Òl hat laut Herstellerangaben eine Dichte von  $\rho_{\text{Òl}} = 877 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  bei  $15^\circ\text{C}$  bzw.  $\rho_{\text{Òl}} = 871 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  bei  $25^\circ\text{C}$ . Daraus lÙsst sich mit

$$\rho_{\text{Òl}}(\vartheta_{\text{Luft}}) = \frac{\rho_{\text{Òl}}(15^\circ\text{C})}{1 + \gamma \cdot (\vartheta_{\text{Luft}} - 15^\circ\text{C})} \quad (17)$$

und dem Volumenausdehnungskoeffizienten  $\gamma = \frac{\rho_{\text{Òl}}(15^\circ\text{C})}{\rho_{\text{Òl}}(25^\circ\text{C})} - 1$   $\cong 6,889 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$  die von der Umgebungstemperatur  $\vartheta_{\text{Luft}}$  abhÙngige Òldichte berechnen.

FÙr die Dichte trockener Luft gilt  $\rho_{\text{Luft}} = 1,2928 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  bei einer Temperatur von  $\vartheta_{\text{Luft}} = 0^\circ\text{C}$  und einem Druck von  $p_{\text{Luft}} = 1013,25 \text{ hPa}$  (Normbedingungen). Aus einer nÙherungsweisen Betrachtung fÙr ideale Gase kann diese temperatur- und druckabhÙngige GrÙÙe durch

$$\rho_{\text{Luft}} = \frac{p_{\text{Luft}}}{R_S \cdot T} \quad (18a)$$

## E13 ELEKTRISCHE ELEMENTARLADUNG

mit der absoluten Temperatur  $T$  und der spezifischen Gaskonstante  $R_S = 287,058 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  für trockene Luft gewonnen werden. Zur Berücksichtigung der Luftfeuchtigkeit müsste in (18a)  $R_S$  ersetzt werden durch

$$R_F = \frac{R_S}{1 - \varphi \cdot \frac{p_D}{p_{Luft}} \cdot \left(1 - \frac{R_S}{R_D}\right)} \quad (18b)$$

mit der relativen Luftfeuchte  $\varphi$ , der spezifischen Gaskonstante  $R_D = 461,523 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  von Wasserdampf und dem Sättigungsdampfdruck  $p_D$  von Wasser in Luft, der wiederum z.B. mit der sog. Magnus-Formel näherungsweise berechnet oder aus einer Tabelle entnommen wird.

Genauere Betrachtungen bei realistischen Werten für die relative Feuchte von normaler Raumluft zeigen aber, dass die sich ergebende Korrektur für die Volumendichte der Luft noch deutlich unter +1 % liegt. Für die vorzunehmenden Berechnungen bei der Auswertung wird die Differenz der Dichten  $\rho_{\text{öl}} - \rho_{\text{Luft}}$  benötigt, wobei die Öldichte um ca. drei Größenordnungen höher ist. Die Luftdichte gemäß (18a) näherungsweise zu berechnen, erzeugt also nur eine geringe Abweichung in der Dichtedifferenz!

### HINWEISE ZUR VORBEREITUNG UND DURCHFÜHRUNG DES EXPERIMENTS

1. Der Millikan-Apparat muss am Platz eben und waagrecht aufgestellt werden: Dazu ist die transparente Abdeckhaube der Experimentierkammer zeitweise abzuheben und beiseite zu stellen. Danach wird die kleine Dosen-Libelle auf die obere Platte des Plattenkondensators gesetzt und die horizontale Ausrichtung mit Hilfe der Stellfüße so lange optimiert, bis die kleine Luftblase in der Libelle exakt zentrisch im Kreis steht.
2. Für die Beobachtungen wird das Messmikroskop (nach)justiert: Zunächst ist die Beleuchtungsintensität mit dem Regler (3 in Abb. 4) geeignet einzustellen und das Mikroskop bei abgenommener Objektiv-Abdeckung („milchige“ Kappe) mit dem Fokussiertrieb (13 in Abb. 4) ganz nach vorn zu fahren und mit Hilfe des Vertikalstellers (mit roter Kappe rechts vorn neben dem Mikroskop) auf das Beobachtungsfenster in der Experimentierkammer auszurichten. Als „Einstellhilfe“ dient eine Pinnadel, die durch die kleine Bohrung in der oberen Platte des Plattenkondensators gesteckt wird. Die Mikroskop-Abbildung ist auf die Nadel(spitze) scharf einzustellen. Mithilfe der nur leicht gelösten (Vorsicht!) Arretierungsschraube unter dem Mikroskop ist eine zu den Kondensatorplatten möglichst waagerechte Ausrichtung vorzunehmen. Die Beobachtungshöhe wird mit dem o.g. Vertikalsteller so eingestellt, dass der gesamte Bereich zwischen beiden Kondensatorplatten gut zu sehen ist. Abschließend wird die Pinnadel entfernt und die Experimentierkammer wieder mit der Abdeckhaube von oben verschlossen. Vorsicht beim Einsetzen der Stifte in die Führungen!
3. Durch vorsichtiges Drehen des Okulareinsatzes am Mikroskop ist nun die Okularskale auf Orthogonalität zu den beiden Kondensatorplatten auszurichten, wofür die langen Teilstriche der Skale gut nutzbar sind. Sollten ggf. nicht beide Plattenkanten sichtbar sein, muss die Beobachtungshöhe mit dem Vertikalsteller nochmals korrigiert werden. Bei Scharfstellung auf die Plattenkanten lässt sich auch der Abstand zwischen den Kondensatorplatten mithilfe der Okularskale sehr gut bestimmen.
4. Für das Experiment ist es generell besser, eine kleine Anzahl einzelner Tröpfchen anstelle einer großen „Wolke“ zu erzeugen: Ein mehrmaliges Zusammendrücken des Gebläseballs führt zu einer nicht mehr beobachtbaren Überzahl von Öl-Tröpfchen und zur frühzeitigen Verschmutzung der Messzelle bzw. Verstopfung der Öffnung in der oberen Kondensatorplatte.
5. Durch einmaliges kurzes und kräftiges Zusammendrücken des Gebläseballs sind einige geladene Öltröpfchen zu erzeugen, die durch die Öffnung in die Messzelle sinken. Wenn nach einigen Sekunden dann die ersten Tröpfchen im Gesichtsfeld des Messmikroskops zwischen den Kondensatorplatten erscheinen, wird eine geeignete Lichtintensität eingestellt, die wie die Scharfstellung ggf. während der Messung auch noch angepasst werden kann. Dabei ist zu beachten, dass eine unnötig große Lichtintensität zu einer Konvektion erwärmter Luft in der Messkammer führt, die die Öltröpfchen unerwünscht beeinflusst.

## E13 ELEKTRISCHE ELEMENTARLADUNG

6. Aus den sichtbaren sollten für die Beobachtung solche Öltröpfchen ausgewählt werden, die ohne elektrisches Feld langsam genug mit ca.  $0,025 \dots 0,1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$  sinken.
7. Auf der Webseite LEIFIphysik sind unter den drei Links  
<https://www.leifiphysik.de/elektrizitaetslehre/ladungen-elektrisches-feld/versuche/millikan-versuch-schwebemethode-simulation>  
<https://www.leifiphysik.de/elektrizitaetslehre/ladungen-elektrisches-feld/versuche/millikan-versuch-schwebe-fall-methode-simulation>  
<https://www.leifiphysik.de/elektrizitaetslehre/ladungen-elektrisches-feld/versuche/millikan-versuch-steige-sink-methode-simulation>  
alle möglichen experimentellen Methoden für den Milikan-Versuch eingehend beschrieben und durch animierte online-Simulationen veranschaulicht.

### AUFGABENSTELLUNGEN

1. Verschaffen Sie sich einen genauen Überblick über alle im Experiment zu erfassenden physikalischen Messgrößen und die jeweils dafür zu verwendenden Messmittel, einschließlich der unvermeidlich auftretenden Messabweichungen bzw. -unsicherheiten. Notieren Sie sich alle für die spätere Auswertung und qualifizierte Diskussion der Endergebnisse erforderlichen Angaben unbedingt in Ihrem Messprotokoll!
2. Notieren Sie sich in Ihrem Messprotokoll alle versuchsrelevanten Daten der verwendeten Messmittel bzw. -geräte!
3. Im Experiment sind sowohl die Schwebemethode als auch eine beiden dynamischen Methoden zu verwenden, um die Ladungen von erzeugten Öltröpfchen zu bestimmen.
4. Beide zur Bestimmung der Elementarladung eingesetzte Methoden sind miteinander kritisch zu vergleichen und dabei auftretende Messabweichungen bzw. Unsicherheiten mit ihrer Wirkung auf das Endergebnis zu betrachten und zu bewerten. Welche Bedingungen und Größen erweisen sich jeweils als kritisch für das Experiment? Welche Vor- und Nachteile lassen sich für die beiden Verfahren feststellen? Was könnte wie verbessert werden?

### FRAGEN ZUR VOR- UND NACHBEREITUNG

1. Welche Rolle spielte der experimentelle Nachweis der Elementarladung für die Entwicklung der Physik zu Beginn des 20. Jahrhunderts?
2. Was sind die entscheidenden Verbesserungen an der Tröpfchen-Methode, die Millikan und Fletcher schließlich den Erfolg einbrachten?
3. Was besagt das Stokesche Gesetz und unter welchen Bedingungen gilt es? Wieso ist die Korrektur nach Cunningham notwendig?
4. Warum ist die Annahme einer kugelförmigen Gestalt der Öl-Tröpfchen gerechtfertigt?
5. Woher erhalten die hier im Experiment untersuchten Öltröpfchen ihre elektrische Ladung?
6. Wie kann die sich nach einiger Zeit einstellende Konstanz der Geschwindigkeit eines in der Luft steigenden oder fallenden Tröpfchens erklärt werden? Wie sieht das zugehörige Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm im Vergleich zur beschleunigten Bewegung (z.B. im freien Fall) aus?
7. Wodurch kann im Experiment eine Umladung von Öltröpfchen erfolgen und wie lässt sich das erkennen? Welche Folgen hat (bzw. hätte) das für die Ergebnisse?
8. Für welche der beschriebenen experimentellen Methoden zur Bestimmung der Elementarladung erwarten Sie die größte Unsicherheit und warum?
9. Welchen Einfluss haben Tröpfchengröße und Messstrecke auf die erzielbare Messunsicherheit?
10. Welche zum Millikan-Versuch alternativen experimentellen Methoden bzw. Verfahren zur Bestimmung der elektrischen Elementarladung gibt es?
11. Beginnend im Jahr 1977 wurden an der Stanford University von Prof. William Martin Fairbank sen. und seinen Mitarbeitern mit einem modifizierten Millikan-Experiment Anstrengungen unternommen, die Existenz positiver und negativer Ladungen von  $\frac{1}{3}e$  und  $\frac{2}{3}e$  nachzuweisen. Was war das Motiv dafür und wie gingen diese Versuche aus?