

**Mathematisch-Naturwissenschaftliche  
Fakultät I**

Institut für Physik  
Physikalisches Grundpraktikum



**Physikalisches Grundpraktikum**

Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik

**2007**



## Vorwort

Das physikalische Praktikum ist Bestandteil vieler natur- und ingenieurwissenschaftlicher Studiengänge. Es ermöglicht Studierenden, Physik als Naturwissenschaft unmittelbar im Experiment zu erleben und grundlegende Zusammenhänge zwischen Ursachen und Wirkungen in Naturerscheinungen zu erkennen. Es werden wertvolle praktische Kenntnisse und Erfahrungen im Umgang mit Messgeräten und -verfahren sowie Methoden der Versuchsauswertung als unverzichtbaren Bestandteilen experimenteller wissenschaftlicher Arbeit gewonnen.

Auf der Webseite des Physikalischen Grundpraktikums am Institut für Physik <http://gpr.physik.hu-berlin.de> sind neben den allgemeinen Informationen, u.a. zum Kursablauf und den geltenden Regelungen, alle angebotenen Praktikumsversuche nach Themengebieten und Kursen geordnet und ausführlich dargestellt – einschließlich der Versuchsanleitung und einer Fotografie des Versuchsplatzes. Für das Praktikum am Institut für Physik stehen den jeweiligen Studiengängen verschiedene Skripte (für Physik als Haupt- oder Nebenfach) zur Verfügung; in den Versuchsanleitungen sind neben den Aufgabenstellungen auch wichtige Hinweise zur Vorbereitung, Durchführung und Auswertung der Experimente enthalten.

Die hier vorliegende „Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik“ ergänzt diese Skripte als wichtiges Hilfsmittel: Es sind grundlegende Betrachtungen zur Verwendung physikalischer Größen und Einheiten, zur Analyse bzw. Ermittlung von Messabweichungen und -unsicherheiten bei der Versuchsauswertung sowie zur sachgerechten Präsentation von Ergebnissen in grafischen Darstellungen darin enthalten. Es werden Empfehlungen gegeben, die den meist mühevollen Prozess der Aneignung einer individuellen wissenschaftlichen Arbeitsweise erleichtern sollten.

Der für die jeweiligen Versuche unbedingt notwendige Arbeitsaufwand ist relativ hoch: Erfahrungsgemäß werden einschließlich der 4 Stunden Präsenzzeit im Grundpraktikum durchschnittlich 10-12 Arbeitsstunden je Versuch aufgewendet. Der größte Teil davon ist für die qualifizierte Versuchsvorbereitung und -auswertung erforderlich. Ganz offensichtlich ist deshalb möglichst schnell eine effiziente Arbeitsweise durch jeden Studierenden zu entwickeln und weiter zu pflegen.

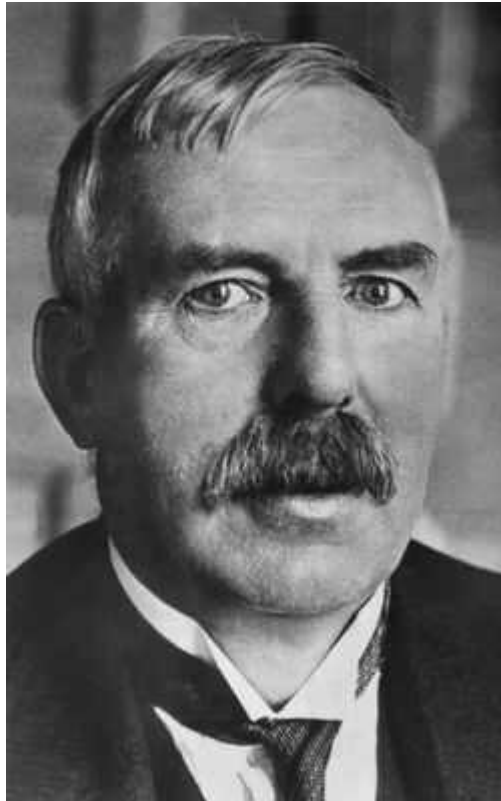
Allen Studierenden mit Physik im Hauptfach wird sehr nachdrücklich empfohlen, dieses Skript schon zu Beginn des Praktikums sehr gründlich und vollständig durchzuarbeiten. Alle Studierenden mit Physik als Nebenfach sollten sich insbesondere auf die Abschnitte 1. bis 3.1 und 3.5 bis 4.1 konzentrieren, wobei Abschnitt 3.6.2 zunächst ausgelassen werden kann. Das Skript sollte als Nachschlagewerk zur Auswertung der laufenden Praktikumsversuche regelmäßig verwendet werden.

Aus der sehr umfangreichen Literatur zur Messdaten- und Fehleranalyse kann als Auswahl zur Vertiefung und zum Nachschlagen u.a. empfohlen werden:

- W.H. Heini Gränicher, *Messung beendet - was nun?*, vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich und B.G. Teubner, Stuttgart, 1996
- John R. Taylor, *Fehleranalyse - eine Einführung in die Untersuchung von Unsicherheiten in physikalischen Messungen*, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, 1988
- P.R. Bevington and D.K. Robinson, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1994
- E. Hultsch, *Ausgleichsrechnung mit Anwendungen in der Physik*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1971

In dieses Skript sind wichtige praktische Erfahrungen und Arbeitsergebnisse früherer Jahre im Praktikum eingeflossen. Daran waren viele Kollegen sehr aktiv beteiligt, ebenso zahlreiche Studierende mit konstruktiven Hinweisen und Kritiken. Ihnen allen sei an dieser Stelle nochmals sehr herzlich für die Mitarbeit gedankt.

Uwe Müller  
Berlin, im März 2007



„Wenn Sie für Ihr Experiment Statistiken brauchen, dann sollten Sie lieber ein besseres Experiment machen.“

Lord Ernest Rutherford of Nelson (1871-1937)

## Inhaltsverzeichnis

|   | Seite |
|---|-------|
| <b>1. Einleitung</b>  | 1-6   |
| 1.1 Zielstellungen  | 1     |
| 1.2 Durchführung des Praktikums   | 1     |
| 1.3 Praktikumsprotokoll   | 2     |
| 1.3.1 Erfassung von Messdaten   | 2     |
| 1.3.2 Bestimmung des Praktikumsprotokolls   | 3     |
| 1.3.3 Hinweise zur äußeren Form und Gestaltung  | 4     |
| 1.3.4 Empfehlungen zur Gliederung   | 5     |
| <b>2. Größen und Einheiten</b>  | 7-10  |
| 2.1 Grundlagen  | 7     |
| 2.2 Internationales Einheitensystem (SI)  | 8     |
| 2.3 SI-fremde Einheiten   | 10    |
| <b>3. Messabweichungen und Messunsicherheiten</b>   | 11-48 |
| 3.1 Problemstellung und Grundbegriffe   | 11    |
| 3.2 Systematische Messabweichungen  | 13    |
| 3.2.1 Korrektur systematischer Messabweichungen   | 14    |
| 3.2.2 Abschätzung systematischer Messabweichungen   | 15    |
| 3.2.3 Messgerätefehler  | 16    |
| 3.3 Grundbegriffe der Statistik   | 21    |
| 3.3.1 Grundgesamtheit und Stichprobe  | 21    |
| 3.3.2 Häufigkeits- und Summenhäufigkeitsverteilung  | 22    |
| 3.3.3 Kontinuierliche Merkmalswerte   | 25    |
| 3.3.4 Parameter von Zufallsverteilungen   | 25    |
| 3.4 Zufällige Messabweichungen  | 27    |
| 3.4.1 Verteilung zufälliger Messabweichungen (Standardabweichung)                                       | 27    |
| 3.4.2 Vertrauensbereich   | 30    |
| 3.4.3 Methode der kleinsten Quadrate  | 30    |
| 3.5 Messergebnisse einer direkt gemessenen Größe  | 31    |
| 3.6 Indirekte Ermittlung einer Messgröße  | 35    |
| 3.6.1 Fortpflanzung von Unsicherheiten unkorrelierter Größen  | 36    |
| 3.6.2 Fortpflanzung von Unsicherheiten korrelierter Größen  | 38    |
| 3.7 Ausgleichsrechnung bei vermittelnder Beobachtung (lineare Regression)                               | 40    |
| 3.8 Ausgleichsrechnung bei Messergebnissen mit verschiedenen Unsicherheiten<br>(gewichteter Mittelwert) | 47    |
| <b>4. Grafische Darstellungen</b>   | 49-61 |
| 4.1 Problemstellung   | 49    |
| 4.2 Grundbegriff der Skale  | 52    |
| 4.3 Lineare Skalen  | 52    |
| 4.4 Nichtlineare Skalen   | 53    |
| 4.5 Darstellungen linearer Abhängigkeiten   | 54    |
| 4.6 Darstellungen exponentieller Abhängigkeiten   | 56    |
| 4.7 Darstellungen von potenziellen Abhängigkeiten   | 57    |
| 4.8 Wahrscheinlichkeitsnetze  | 59    |
| <b>5. Übungsaufgaben</b>  | 62-63 |
| 5.1 Messergebnis einer direkt gemessenen Größe  | 62    |
| 5.2 Lineare Regression  | 62    |
| 5.3 Darstellung und Regression für Exponentialfunktionen  | 62    |
| 5.4 Darstellung und Regression für Potenzfunktionen   | 63    |

# 1. EINLEITUNG

## 1.1 Zielstellungen

Das physikalische Praktikum ist eine obligatorische Lehrveranstaltung für viele naturwissenschaftliche und ingenieurtechnische Studiengänge. Es ermöglicht Studierenden, Physik als Naturwissenschaft unmittelbar selbst im Experiment zu erleben und grundlegende Zusammenhänge zwischen Ursachen und Wirkungen in Naturerscheinungen zu erkennen. Anhand ausgewählter Versuche sollen die Erkenntnisse aus Vorlesungen und Übungen zur Physik ergänzt werden. Neben wertvollen praktischen Kenntnissen und Erfahrungen sollen dabei insbesondere wissenschaftliche Methoden der Versuchsauswertung als unverzichtbarer Bestandteil experimenteller wissenschaftlicher Arbeit angeeignet werden.

Wesentliche Lernziele des physikalischen Praktikums sind:

- Vertiefung und Erweiterung der physikalischen Kenntnisse
- Erlernen der Planung, Durchführung und Auswertung von Messungen, einschließlich der Handhabung von Messgeräten und -verfahren
- Aneignung einer wissenschaftlichen Protokollführung, einschließlich der sachgerechten Auswertung und Darstellung von Messergebnissen unter Nutzung rechnerischer und graphischer Mittel
- Erlernen der kritischen Analyse und Bewertung von erzielten Messergebnissen bezüglich auftretender Fehlerquellen und Messabweichungen
- Aneignung von Elementen kollektiver wissenschaftlicher Arbeitsweise und notwendiger Arbeitsteilung

Im vorliegenden Einführungsskript sind grundlegende Betrachtungen zur Verwendung physikalischer Größen und Einheiten, zu Mess- und Auswerteverfahren und zur Analyse von Messabweichungen sowie zur sachgerechten Präsentation von Ergebnissen in grafischen Darstellungen enthalten. Es werden Empfehlungen zur Erarbeitung und Gestaltung von Versuchsprotokollen gegeben, die den meist mühevollen Prozess der Aneignung einer individuellen wissenschaftlichen Arbeitsweise wesentlich erleichtern können.

## 1.2 Durchführung des Praktikums

Im Praktikum ist je nach den Anforderungen der Studiengänge eine unterschiedliche Zahl von Versuchen zu absolvieren. Jedes Experiment kann an bis zu 4 Versuchsplätzen gleichzeitig ausgeführt werden, wobei an einem Platz zu zweit gearbeitet wird. Die je Versuch bis zu 8 Studierenden bilden eine Praktikumsgruppe und werden gemeinsam betreut.

Das Praktikum beginnt mit einer Vorbesprechung, in der noch offene Fragen zum Versuch gestellt werden können und weitere Hinweise zur praktischen Durchführung gegeben werden.

Nach Abschluss der Vorbesprechung in der Gruppe kann nach Freigabe der Plätze durch den/die Versuchsbetreuer/in mit der experimentell-praktischen Arbeit am Versuch begonnen werden. Zu jedem Versuch sind sowohl ein Vor- als auch ein Abtestat zu absolvieren, die beide neben dem Protokoll in die Gesamtbewertung des Versuches eingehen.

Weitere Einzelheiten zur Praktikumsdurchführung sind in der jeweils gültigen Fassung der Praktikumsordnung geregelt, die sowohl während der Einführungsveranstaltung als auch auf der Webseite und im Aushang öffentlich bekannt gegeben wird.

Zur individuellen Vorbereitung stehen den Studierenden verschiedene Skripte zum Physikalischen Praktikum zur Verfügung, aus denen Einzelheiten der Aufgabenstellung und der Versuchsdurchführung zu entnehmen sind. In jeder Versuchsanleitung werden kurz gefasst die physikalischen Grundlagen vorangestellt, da im Studienablauf eher selten ein zeitlicher Vorlauf der Vorlesung gewährleistet werden kann.

Für das deshalb grundsätzlich erforderliche zusätzliche Literaturstudium werden aus der Fülle der vorhandenen Lehrbücher zur Experimentalphysik und zum Praktikum u.a. empfohlen:

## 1. EINLEITUNG

- W. Demtröder, *Experimentalphysik*, Springer Verlag, Berlin u.a., (4 Bände)
- C. Gerthsen, H. Kneser und H. Vogel, *Physik*, Springer Verlag, Berlin u. a.
- L. Bergmann und C. Schaefer, *Lehrbuch der Experimentalphysik*, Walter de Gruyter, Berlin und New York (4 Bände)
- H. Stroppe, *Physik für Studenten der Natur- und Technikwissenschaften*, Fachbuchverlag, Leipzig
- P. Dobrinski, G. Krakau und A. Vogel, *Physik für Ingenieure*, B. G. Teubner, Stuttgart
- W. Ilberg, *Physikalisches Praktikum für Anfänger*, BSG B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig

Diese ganz sicher unvollständige Liste ist ausdrücklich eine unverbindliche Empfehlung, weitere Ergänzungsvorschläge sind erbeten und sehr willkommen.

### 1.3 Praktikumsprotokoll

Die bei der experimentellen Arbeit und der anschließenden Auswertung erzielten Ergebnisse des Praktikumsversuches werden in einem Versuchsprotokoll dokumentiert, das Gegenstand des Abtestates ist und entsprechend dem gültigen Punktschlüssel mit dem höchsten Gewicht in die Gesamtbewertung für jeden Versuch eingeht.

Studierende mit Physik als Hauptfach (Mono-Bachelor-Studiengang und Kombinationsbachelor-Studiengang mit Lehramtsoption am Institut für Physik) haben, ungeachtet der gemeinsamen Versuchsdurchführung, stets *jede/r ein eigenes* Versuchsprotokoll anzufertigen: diese Forderung begründet sich aus der Notwendigkeit besonderer Entwicklung der *individuellen* Fähigkeiten. Mit derselben Begründung führt die bloße Übernahme (durch Kopie bzw. Einfügung) von Teilen aus dem Protokoll des Versuchspartners zur Beanstandung.

Studierende mit Physik als Nebenfach, die gemeinsam am selben Versuchsplatz einen Versuch durchgeführt haben, *können* zu zweit ein gemeinsames Versuchsprotokoll erstellen.

Bei der Ausarbeitung der Versuchsprotokolle ist eine *enge und zugleich kritische Zusammenarbeit* der jeweiligen Versuchspartner immer ratsam und unbedingt förderlich!

Das fertige Versuchsprotokoll kann frühestens am Tag der Versuchsdurchführung, muss aber im Regelfall zum jeweils festgelegten Termin beim Versuchsbetreuer abgegeben werden. Eine verspätete Abgabe ohne triftige und nachvollziehbare Begründung (wie z.B. Erkrankung oder höhere Gewalt) hat die Bewertung „ungenügend“ für den Einzelversuch zur Folge, so dass der Versuch dann in einem Folgesemester wiederholt werden muss.

Ein Vergleich der eigenen erzielten Ergebnisse mit denen anderer ist grundsätzlich legitim und kann eigene Fehler aufdecken. Allerdings ist eine bloße Übernahme bzw. das Kopieren oder Abschreiben fremder Ergebnisse und Versuchsprotokolle (wie z.B. von Internetseiten) unzulässig und gilt als Täuschungsversuch, der entsprechend der geltenden Praktikumsordnung behandelt wird. Werden fremde Ergebnisse bzw. Daten herangezogen, so sind diese stets eindeutig als Zitat mit Quellenangabe zu kennzeichnen!

#### 1.3.1 Erfassung von Messdaten

Alle während der Versuchsdurchführung gewonnenen Daten sind in geeigneter Form vollständig und sachgerecht mit allen erforderlichen Angaben wie Einheiten, Messbereichen, Unsicherheiten u. a. in einem eigenen -zumeist handschriftlichen- Messdatenprotokoll zu erfassen.

Die Eintragungen sind dokumentenecht und zweifelsfrei lesbar auszuführen, d.h. nur mit Tinte bzw. Kugelschreiber und nicht mit Bleistift. Erkannte fehlerhafte Angaben sind eindeutig als solche zu kennzeichnen, also durchzustreichen und erneut zu notieren. Radierungen o.ä. sind grundsätzlich nicht zulässig.

# 1. EINLEITUNG

Alle Messwerte sind sofort als ursprüngliche Daten zu notieren und unmittelbar auf ihre Reproduzierbarkeit zu überprüfen, bevor eventuelle Zwischenrechnungen ausgeführt werden. Um Fehler bei der Ablesung und Protokollierung vermeiden bzw. rechtzeitig erkennen zu können, ist zumindest eine stichprobenartige Wiederholung von Einzelmessungen ratsam.

Sofern möglich, sollte möglichst schon während des Versuches eine vorläufige Zwischenauswertung der Messergebnisse erfolgen, um versteckte Fehler rechtzeitig erkennen und notfalls Messungen wiederholen zu können. Verworfen Messwerte bzw. -reihen sind entsprechend zu kennzeichnen, bleiben aber Bestandteile des Messdatenprotokolls.

Zweckmäßig sind die Messwerte meist in Form einer übersichtlichen Tabelle zu notieren, wobei Spalten bzw. Zeilen für eventuell notwendige spätere Umrechnungen u. ä. berücksichtigt werden können. Zahlenwerte der gleichen physikalischen Größe sind stets in derselben Spalte bzw. Zeile einzutragen. Der jeweilige Kopf der Spalte bzw. Zeile muss den Namen, das verwendete Symbol sowie die zugehörige Einheit der gemessenen physikalischen Größe enthalten.

Neben den Messwerten sind stets auch die verwendeten Geräte und Hilfsmittel in einer Liste zu erfassen und die Kennzeichnung des Versuchsplatzes zu notieren, um eventuell defekte Geräte oder Hilfsmittel identifizieren zu können.

Für die verwendeten Messgeräte und Hilfsmittel sind auch gleich die charakteristischen Fehlergrößen bzw. Messunsicherheiten zu notieren (gegebenenfalls Abschätzung), um die spätere vollständige Auswertung ausführen zu können.

Nach Abschluss der experimentellen Arbeiten ist das Messdatenprotokoll stets durch den Versuchsbetreuer gegenzeichnen zu lassen und zweckmäßigerweise später in Kopie den jeweiligen Versuchspartnern für ihre eigene Auswertung zur Verfügung zu stellen.

## 1.3.2 Bestimmung des Praktikumsprotokolls

Obwohl das Protokoll, wie oben bereits dargestellt, grundlegend in die Leistungsbewertung eingeht, ist das selbstverständlich nicht seine vorrangige und einzige Funktion.

Als wichtiger Bestandteil jeder experimentellen Tätigkeit soll es Studierende mit wichtigen Grundformen wissenschaftlicher Arbeit vertraut machen: Jedes Experiment muss dem Kriterium der Reproduzierbarkeit genügen, d.h. jeder Versuch muss nachvollziehbar sein und -innerhalb der erreichbaren Messunsicherheiten- bei Wiederholung dieselben Ergebnisse liefern. Dieser Anspruch gilt auch für das anzufertigende Versuchsprotokoll. Deshalb sollte es möglichst übersichtlich angelegt sein, alle im Verlauf der Auswertung verwendeten Daten enthalten, den Gang der erforderlichen Berechnungen und die Schlussfolgerungen klar erkennen lassen. Es sollte -wie jede wissenschaftliche Arbeit- so *umfangreich wie unbedingt nötig*, aber so *kurz wie irgend möglich* geschrieben sein.

Alle diese vorgenannten Ansprüche gelten für jede Form wissenschaftlicher Publikationen, zu denen das Versuchsprotokoll eine notwendige Vorstufe darstellt!

Ein potentieller Leser Ihres Versuchsprotokolls (u.a. auch der Versuchsbetreuer) könnte vielleicht am Besten durch folgende Eigenschaften charakterisiert werden:

- Er hat das Experiment nicht selbst durchgeführt, versteht aber selbstverständlich als Physiker alle wichtigen physikalischen Grundbegriffe.
- Er hat längere Zeit auf einem ganz anderen physikalischen Gebiet gearbeitet.
- Er ist grundsätzlich sehr kritisch - aber durchaus wohlwollend - Ihrer Arbeit gegenüber eingestellt und kann über Ihren weiteren Werdegang entscheiden.
- Er leidet unter chronischem Zeitmangel und lehnt es deshalb grundsätzlich ab, sehr viele Seiten zu lesen.
- Er ist ein wenig pedantisch und legt Wert auf wissenschaftliche Exaktheit und Beachtung von entsprechenden Formen.



# 1. EINLEITUNG

## 1.3.3 Hinweise zur äußeren Form und Gestaltung

Wegen der erfahrungsgemäß immer wieder auftretenden Missverständnisse auf studentischer Seite seien hier zunächst die folgenden Bemerkungen vorangestellt:

Grundsätzlich werden selbstverständlich auch Versuchsprotokolle in handschriftlicher Form akzeptiert, die dann aber unbedingt sauber und leserlich sein und den nachfolgend dargestellten allgemeinen Normen ebenso folgen müssen. Ausgedruckte Computer-Manuskripte sind also *keinesfalls zwingend vorgeschrieben*! Die letzte Entscheidung für die konkrete Form der Realisierung von Versuchsprotokollen wollen wir ganz bewusst jedem Studierenden selbst überlassen: Wir empfehlen sehr nachdrücklich, dabei immer strikt das jeweilige Verhältnis zwischen Aufwand und Nutzen bzw. letztendlich die *Arbeitseffizienz* zu beachten. Das kann, wie bisherige Erfahrungen zeigen, auch zu „Mischformen“ zwischen handschriftlichen Anfertigungen und Computer-Ausdrucken führen. Allerdings zeigt sich, dass doch tendenziell zunehmend (auch im Praktikumsverlauf selbst) durch die Studierenden mit Computern gearbeitet wird. Oft ergibt sich das als Folge wachsender eigener Erfahrung; z.B. durch die unmittelbar erlebte Effizienz von eingesetzten Programmen für die Tabellenkalkulation bei größeren Datenmengen oder auch für numerische Anpassung bzw. Auswertung sowie grafische Darstellung von Versuchsdaten.

Sofern die Arbeit auf Computern tatsächlich erwogen und bevorzugt wird, wird den Studierenden die Verwendung eines Textverarbeitungsprogramms *eigener* Wahl (es muss nicht unbedingt ein TeX-System sein!) ausdrücklich ebenso *empfohlen* wie die Nutzung *jeglicher geeigneter* Software zur Erstellung von Grafiken bzw. zur Datenanpassung/Regression. Für diese Zwecke wird -sofern eigene Mittel nicht zur Verfügung stehen- insbesondere auf die Nutzung der in der Humboldt-Universität zugänglichen PC-Pools des Computer- und Medien-Services und der Institute verwiesen. In sehr eingeschränktem Umfang -wegen nur weniger PC- kann natürlich auch der PC-Raum des Grundpraktikums genutzt werden. Das Versuchsprotokoll muss in jedem Fall in Papierform vorgelegt werden. Ein umfangreicherer Ausdruck im PC-Raum des Grundpraktikums ist wegen der beschränkten Mittel aber leider nur in Ausnahmefällen nach Absprache möglich!

Jedes Versuchsprotokoll muss alle für die Auswertung verwendeten Formeln mit Kennzeichnung der Symbole enthalten, ebenso alle im schrittweisen Verlauf der Auswertung verwendeten Daten, die aus dem Messdatenprotokoll übernommen wurden. Alle wesentlichen Berechnungen (einschließlich der Bestimmung von Messunsicherheiten und der Unsicherheiten von Endergebnissen) müssen folgerichtig und nachvollziehbar dargestellt werden. Alle verwendeten Hilfsmittel sind immer anzugeben, ebenso - wenn zutreffend - die zur grafischen Darstellung und Anpassung/Regression eingesetzte Software. Sofern Literaturquellen verwendet wurden, sind entsprechende Zitate als solche eindeutig zu kennzeichnen. Alle Seiten sind fortlaufend zu nummerieren.

Grafische Darstellungen sind jeweils korrekt zu kennzeichnen, einschließlich eines Titels und Nummerierung sowie der richtigen und vollständigen Benennung an den Achsen (Größenamen, Symbole, Einheiten). Soweit möglich und sinnvoll, sind Fehlerkreuze für die Messpunkte anzugeben. Ausgleichende Graphen sind sinnvoll zu wählen und separat (in Unterscheidung zu den Messpunkten) zu kennzeichnen (eigenes Symbol bzw. Legende).

Gegebenenfalls handschriftliche Diagramme sind sauber und zweckmäßig mit Bleistift oder Fineliner (unter Beachtung der vorigen Hinweise) auf Millimeter-, Exponential- oder anderem Spezialpapier (auch als pdf-Dateien auf der Webseite des Grundpraktikums zum Ausdrucken verfügbar) anzufertigen. In diesem Fall sind u.U. neben üblichen Linealen auch Kurvenlineale (für ausgleichende Graphen) einzusetzen: „Freihandzeichnungen“ sind nicht sachgerecht.

Das gesamte Protokoll ist abschließend zu klammern bzw. zu heften; Sammlungen loser Blätter sind unerwünscht bzw. unzulässig.

# 1. EINLEITUNG

## 1.3.4 Empfehlungen zur Gliederung

Obwohl häufig durch Studierende angesprochen, wird aus methodisch-didaktischen Erwägungen heraus ganz bewusst auf die Bereitstellung eines „Musterprotokolls“ verzichtet. Zur eigenen Orientierung kann aber die nachfolgend dargestellte Gliederung verwendet werden:

### 1. Titelblatt

Das Versuchsprotokoll soll stets mit einem Titelblatt beginnen, das die Bezeichnung des Versuches, des Versuchsplatzes, das Versuchsdatum und den/die Bearbeiter sowie Versuchspartner (mit Namen, Vornamen und Immatrikulationsnummer) enthält.

### 2. Inhaltsverzeichnis

Für eine übersichtliche Darstellung und zur schnellen Orientierung ist ein Inhaltsverzeichnis mit Seitenangaben sinnvoll.

### 3. Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung

Dies ist i.a. ein wesentlicher Teil eines jeden Protokolls, kann aber hier im Grundpraktikum weitgehend entfallen, weil diese Angaben in der jeweiligen Versuchsanleitung sehr ausführlich enthalten sind.

Eine grundsätzliche Anmerkung dazu: Es sind weder umfangreiche eigene Ausarbeitungen noch ausführliche Abschriften aus der Versuchsanleitung erforderlich; das gilt ebenso für die in den Anleitungen aus methodischen Gründen enthaltenen Fragen zur Vorbereitung!

In sehr knapper Form (quasi als „Abstract“ im Telegrammstil) sollten das Versuchsziel und die Aufgabenstellungen zum Versuch beschrieben werden. Verwendete Versuchsaufbauten bzw. Schaltungen sind entweder mit entsprechendem Verweis auf die Versuchsanleitung zu kennzeichnen oder (nur falls dort nicht bereits vorhanden) mit einer eigenen Skizze bzw. Abbildung anzugeben.

Unverzichtbar ist die Angabe der für die Auswertung auch *tatsächlich benötigten* Formeln, mit Erklärung der Buchstabensymbole für physikalische Größen.

### 4. Messwerte und Auswertung

Soweit wirklich erforderlich und sinnvoll, sind die während des Experiments gewonnenen und bei der Auswertung verwendeten Messdaten nochmals in Tabellenform mit allen erforderlichen Angaben und Rechenergebnissen übersichtlich darzustellen. Notwendige Berechnungen sind folgerichtig und nachvollziehbar in chronologischer Reihenfolge auszuführen.

Die Auswertung der Messergebnisse mit Anwendung der in Punkt 3 aufgeführten Formeln muss bei anzustrebender Konzentration auf das Wesentliche für einen sachkundigen Leser stets nachvollziehbar sein.

Es empfiehlt sich, Zwischen- und Endergebnisse in geeigneter übersichtlicher Form und unter Angabe der Unsicherheiten hervorgehoben darzustellen. Alle angegebenen Zahlenwerte sind auf wirklich signifikante Stellen sachgerecht zu runden. Physikalische Größen sind mit den entsprechenden Einheiten und deren Vorsätzen anzugeben; „führende Nullen“ sind möglichst zu vermeiden!

### 5. Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung

Abschließend sollte stets eine kritische Einschätzung und Diskussion der erzielten Versuchsergebnisse und des Versuchsaufbaus vorgenommen werden, die eine gründliche Analyse von aufgetretenen Messabweichungen und ihren Ursachen einschließt. Sofern möglich, sollten die erzielten Ergebnisse mit Referenzwerten unter Angabe der Quelle verglichen werden.

## 1. EINLEITUNG

Die Angabe der Messunsicherheit ist ein unverzichtbarer Bestandteil jeder physikalischen Messung. Ihre Berechnung bzw. Abschätzung muss nachvollziehbar dargestellt werden. Es gibt aber kein einfaches Schema oder Verfahren zur Bestimmung der Messunsicherheiten: vielmehr bedarf es kritischer Beobachtung der Messgeräte und vielfältiger Abschätzungen, um die Auswirkung der zufälligen und der systematischen Abweichungen auf das Endergebnis angeben zu können. Für weitere Einzelheiten wird auf die nachfolgenden Darlegungen des Einführungsskripts verwiesen.

Auch die im Versuch verwendeten experimentellen Methoden und Messverfahren sollten einer kritischen Betrachtung und Diskussion unterzogen und entsprechende Schlussfolgerungen gezogen werden. Ein Resumé bzw. eine kurze Zusammenfassung ist Bestandteil jeder wissenschaftlichen Arbeit!

### *6. Anlage*

Als Anlage ist das vom Versuchsbetreuer unterzeichnete Messdatenprotokoll stets beizufügen. Bei gemeinsamer Verwendung der Messdaten durch mehrere Versuchspartner, die jeder ein Versuchsprotokoll anzufertigen haben, sind entsprechende Kopien selbstverständlich zulässig.

## 2. GRÖSSEN UND EINHEITEN

### 2.1 Grundlagen

Eine *physikalische Größe* ist sowohl eine qualitative als auch eine quantitative Aussage über ein messbares Merkmal eines physikalischen Objektes, z. B. eines Körpers (wie Länge), Zustandes (wie Temperatur) oder Vorganges (wie Beschleunigung). Die Messung einer physikalischen Größe besteht in einem Vergleich der zu messenden Größe mit einer zuvor willkürlich festgelegten *Einheit* und Ermittlung des *Zahlenwertes*, der angibt, wie oft die Einheit in der zu messenden Größe enthalten ist. Jede physikalische Größe kann deshalb dargestellt werden als Produkt aus Zahlenwert und Einheit:

$$\begin{aligned} \text{Physikalische Größe} &= \text{Zahlenwert} \cdot \text{Einheit} \\ a &= \{a\} \cdot [a] \end{aligned} \quad (1)$$

Der Zahlenwert ist abhängig von der Wahl der Einheit, die physikalische Größe ist davon unabhängig (*invariant*). Bei der Messung können nur gleichartige Eigenschaften miteinander verglichen werden, d.h. die Länge eines Tisches kann nur mit einer Einheit der gleichen Eigenschaft, also einer "Längeneinheit", verglichen werden.

Im Prinzip gibt es in der Physik eine unbegrenzte Zahl von physikalischen Größen: z.B. in der Mechanik Weg  $s$ , Zeit  $t$ , Geschwindigkeit  $v$ , Beschleunigung  $a$ , Kraft  $F$ , Impuls  $p$ , Energie  $W$  etc. Zwischen diesen Größen bestehen aber bestimmte mathematische Beziehungen, wie z.B.  $s = v \cdot t$  und  $W = F \cdot s$ . Durch diese mathematischen Beziehungen sind die verschiedenen Größen nicht mehr unabhängig voneinander. Wenn Weg  $s$  und Zeit  $t$  festgelegt sind, dann ist die Geschwindigkeit  $v$  unmittelbar durch die Beziehung

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

definierbar. Man unterscheidet deshalb bei den physikalischen Größen zwischen *Basisgrößen* (in kleiner begrenzter Anzahl) und *abgeleiteten Größen* (in beliebiger Anzahl), wobei letztere sich als Potenzprodukte der Basisgrößen darstellen lassen. Man wählt nur so viele Basisgrößen, wie zur eindeutigen Beschreibung physikalischer Zusammenhänge notwendig sind; die Auswahl kann nach Zweckmäßigkeit und Anschaulichkeit erfolgen. Historisch gab es Systeme mit einer unterschiedlichen Zahl von Basisgrößen, aber von Bedeutung ist in Naturwissenschaft und Technik gegenwärtig nur noch das System folgender Basisgrößen:

| Basisgrößen |      |       |                            |            |             |            |
|-------------|------|-------|----------------------------|------------|-------------|------------|
| Länge       | Zeit | Masse | Elektrische<br>Stromstärke | Temperatur | Lichtstärke | Stoffmenge |

Grundsätzlich kann für jede Größe eine Einheit völlig willkürlich festgelegt werden. Da jedoch die verschiedenen Größen in mathematischen Beziehungen miteinander verknüpft sind, wie z.B. mit

$$\text{Geschwindigkeit } v = \frac{\text{Weg } s}{\text{Zeit } t},$$

werden dann in diesen Beziehungen Zahlenfaktoren auftreten, die von der Wahl der Einheiten abhängen. Sind die entsprechenden Einheiten durch Gleichungen verknüpft, in denen nur der Zahlenfaktor „1“ auftritt (wie z.B.  $1 \text{ Nm} = 1 \text{ Ws}$ ), so nennt man diese Einheiten *kohärent*; ist der Zahlenfaktor ungleich „1“ (z. B.  $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$ ), spricht man von *inkohärenten* Einheiten.

Um für alle physikalischen Größen Einheiten angeben zu können, müssen genau so viele Einheiten definiert werden, wie Basisgrößen notwendig sind: diese nennt man folgerichtig die *Basiseinheiten*. Aus ihnen ergeben sich für die abgeleiteten physikalischen Größen die *abgeleiteten Einheiten* als Potenzprodukte der Basiseinheiten.

## 2. GRÖSSEN UND EINHEITEN

Da die Wahl der Basisgrößen grundsätzlich willkürlich ist, gilt dies auch für die Wahl der Basiseinheiten. Folgende praktische Kriterien bestimmen die getroffene Auswahl:

- Forderung nach Unveränderlichkeit, d. h. die Verkörperung der Basiseinheit sollte sich möglichst nicht selbst verändern oder durch äußere Einwirkung zerstörbar sein, wie beispielsweise der internationale Kilogrammprototyp.
- Forderung nach Reproduzierbarkeit, d. h. unabhängig von Ort und Zeit soll die Basiseinheit darstellbar sein und dies unter möglichst einfachen Bedingungen, wofür sich insbesondere Naturkonstanten eignen.
- Forderung nach möglichst hoher Definitionsgenauigkeit der Messanordnung, d. h. das Maximum der technisch erreichten Messgenauigkeit bestimmt die Definition der Basiseinheit. Da die Messgenauigkeit ständig verbessert wird, leitet sich daraus oft das Erfordernis einer veränderten Definition einer Basiseinheit ab.

### 2.2 Internationales Einheitensystem (SI)

Auf der Grundlage der schon genannten sieben Basisgrößen wurde 1960 das Internationale Einheitensystem mit der Abkürzung SI (*Système International d'Unités*) eingeführt; das ein kohärentes Einheitensystem ist. Durch die Entwicklung der Messtechnik bedingt, gab es in der Zwischenzeit einige Veränderungen, so wurde z.B. 1983 die Basiseinheit 1 Meter neu definiert. Der grundsätzliche Aufbau hat sich aber bewährt und wird allen Ansprüchen in Technik und Wissenschaft gerecht.

Die Basiseinheiten dieses Internationalen Einheitensystems sind derzeit wie folgt definiert:

| <b>Definition der SI-Basiseinheiten</b>  |
|--|
| <b>1 Meter</b> ist gleich der Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von $1/299\,792\,458$ Sekunden durchläuft.  |
| <b>1 Kilogramm</b> ist die Masse des internationalen Kilogrammprototyps in Paris, einem Zylinder aus Platiniridium von ca. 39 mm Höhe und gleichem Durchmesser.  |
| <b>1 Sekunde</b> ist die Zeitdauer von $9\,192\,631\,770$ Schwingungsperioden der Strahlung des ungestörten Nuklids $^{133}\text{Cs}$ beim Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstruktur-niveaus $F = 4, m_F = 0$ und $F = 3, m_F = 0$ des 2 s-Grundzustandes.  |
| <b>1 Ampere</b> ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen elektrischen Stromes, der, durch zwei im Vakuum parallel in Abständen von 1 m voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern elektrodynamisch eine längenbezogene Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ Newton je 1 m Leiterlänge hervorrufen würde. |
| <b>1 Kelvin</b> ist der $273,16$ te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes von reinem Wasser natürlicher Isotopenzusammensetzung.   |
| <b>1 Candela</b> ist die Lichtstärke einer monochromatischen Strahlungsquelle der Frequenz $f_n = 540 \cdot 10^{12}$ Hz, deren Strahlungsintensität in der herausgegriffenen Richtung $1/683 \text{ W} \cdot \text{sr}^{-1}$ beträgt.  |
| <b>1 Mol</b> ist die Stoffmenge eines Systems, das so viel Teilchen enthält, wie Atome in $0,012 \text{ kg}$ des Kohlenstoffnuklids $^{12}\text{C}$ enthalten sind.<br>Die Zahl $N_A = 6,0221367 \cdot 10^{23}$ Atome/Mol heißt Avogadro-Zahl.   |

*Ergänzende SI-Einheiten* sind zwei dimensionslose Größen, definiert als das Verhältnis zweier dimensionsgleicher Größen. Sie sind aber keine reinen Zahlen, sondern echte physikalische Größen und erfordern deshalb einen besonderen Namen:

## 2. GRÖSSEN UND EINHEITEN

**1 Radiant** (rad) ist der Winkel zwischen zwei Kreisradien, die aus dem Kreis einen Bogen von der Länge des Radius ausschneiden.

**1 Steradian** (sr) ist der Raumwinkel, den eine vom Mittelpunkt einer Kugel vom Radius  $r$  ausgehende Strahlenschar bildet, die auf der Kugeloberfläche die Fläche  $A = r^2$  ausschneidet.

**Tabelle 1: Übersicht der SI-Basiseinheiten**

| Basisgröße              | Basiseinheit | Kurzzeichen | Definitionsgenauigkeit |
|-------------------------|--------------|-------------|------------------------|
| Länge                   | Meter        | m           | $10^{-12}$             |
| Masse                   | Kilogramm    | kg          | $10^{-8} - 10^{-9}$    |
| Zeit                    | Sekunde      | s           | $10^{-13}$             |
| Elektrische Stromstärke | Ampere       | A           | $4 \cdot 10^{-6}$      |
| Temperatur              | Kelvin       | K           | Tripelpunkt 0,0002 K   |
| Lichtstärke             | Candela      | cd          | $2 \cdot 10^{-3}$      |
| Stoffmenge              | Mol          | mol         | $5 \cdot 10^{-5}$      |

Für einige abgeleitete Einheiten werden im SI separate Namen eingeführt (s. Tab. 2), die neben den ihnen entsprechenden Potenzprodukten verwendet werden.

**Tabelle 2: Abgeleitete SI-Einheiten (Auswahl)**

| Größe                   | Name    | Kurzzeichen | Beziehung zu SI-Einheiten                              |
|-------------------------|---------|-------------|--|
| Frequenz                | Hertz   | Hz          | $1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$                            |
| Kraft                   | Newton  | N           | $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$ |
| Druck                   | Pascal  | Pa          | $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}/\text{m}^2$                |
| Energie                 | Joule   | J           | $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$             |
| Leistung                | Watt    | W           | $1 \text{ W} = 1 \text{ J}/\text{s}$                   |
| Elektrische Ladung      | Coulomb | C           | $1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$             |
| Elektrische Spannung    | Volt    | V           | $1 \text{ V} = 1 \text{ W}/\text{A}$                   |
| Elektrische Kapazität   | Farad   | F           | $1 \text{ F} = 1 \text{ C}/\text{V}$                   |
| Elektrischer Widerstand | Ohm     | $\Omega$    | $1 \Omega = 1 \text{ V}/\text{A}$                      |
| Elektrischer Leitwert   | Siemens | S           | $1 \text{ S} = 1/\Omega$                               |
| Magnetischer Fluss      | Weber   | Wb          | $1 \text{ Wb} = 1 \text{ V} \cdot \text{s}$            |
| Magnetische Flussdichte | Tesla   | T           | $1 \text{ T} = 1 \text{ Wb}/\text{m}^2$                |
| Induktivität            | Henry   | H           | $1 \text{ H} = 1 \text{ Wb}/\text{A}$                  |
| Lichtstrom              | Lumen   | lm          | $1 \text{ lm} = 1 \text{ cd} \cdot \text{sr}$          |
| Beleuchtungsstärke      | Lux     | lx          | $1 \text{ lx} = 1 \text{ lm}/\text{m}^2$               |

Zur Kennzeichnung von dezimalen Vielfachen und Teilen der Einheiten aus den Tab. 1 und 2 sind die Vorsätze gemäß Tab. 3 zu verwenden. Die Vorsätze *Hekto*, *Deka*, *Dezi* und *Zenti* sollen aber nur noch benutzt werden, wo sie bereits üblich sind. Für die Masseneinheit werden die Vorsätze nur in Verbindung mit dem Gramm (g) bzw. der Tonne (t) gebraucht.

## 2. GRÖSSEN UND EINHEITEN

**Tabelle 3: Vorsätze für dezimale Vielfache und Teile**

| Vorsatz | Zeichen | Wert      | Vorsatz | Zeichen | Wert       |
|---------|---------|-----------|---------|---------|------------|
| Exa     | E       | $10^{18}$ | Dezi    | d       | $10^{-1}$  |
| Peta    | P       | $10^{15}$ | Zenti   | c       | $10^{-2}$  |
| Tera    | T       | $10^{12}$ | Milli   | m       | $10^{-3}$  |
| Giga    | G       | $10^9$    | Mikro   | $\mu$   | $10^{-6}$  |
| Mega    | M       | $10^6$    | Nano    | n       | $10^{-9}$  |
| Kilo    | k       | $10^3$    | Pico    | p       | $10^{-12}$ |
| Hekto   | h       | $10^2$    | Femto   | f       | $10^{-15}$ |
| Deka    | da      | 10        | Atto    | a       | $10^{-18}$ |

### 2.3 SI-fremde Einheiten

Einige inkohärente Einheiten dürfen aus praktischen Gründen auch weiterhin benutzt werden: teilweise uneingeschränkt, teilweise mit ausschließlicher Anwendung in Spezialgebieten. Im naturwissenschaftlich-technischen Bereich sehr häufig benötigte SI-fremde Einheiten sind:

**Tabelle 4: SI-fremde Einheiten (Auswahl)**

| Größe   | Name der Einheit      | Kurzzeichen | Beziehung zu SI-Einheiten                           |
|---------|-----------------------|-------------|---|
| Volumen | Liter                 | l           | $1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3$                 |
| Winkel  | Grad                  | $^\circ$    | $1^\circ = \pi/180 \text{ rad}$                     |
|         | Minute                | '           | $1' = \pi/60 \cdot 180 \text{ rad}$                 |
|         | Sekunde               | "           | $1'' = \pi/60 \cdot 60 \cdot 180 \text{ rad}$       |
| Zeit    | Minute                | min         | $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$                      |
|         | Stunde                | h           | $1 \text{ h} = 3,6 \cdot 10^3 \text{ s}$            |
|         | Tag                   | d           | $1 \text{ d} = 8,64 \cdot 10^4 \text{ s}$           |
| Masse   | Tonne                 | t           | $1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg}$                     |
|         | atomare Masseneinheit | u           | $1 \text{ u} = 1,660\,54 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ |
| Energie | Elektronenvolt        | eV          | $1 \text{ eV} = 1,60219 \cdot 10^{-19} \text{ J}$   |

Aktualisierte und umfassende Darstellungen zum Gebrauch physikalischer Einheiten entsprechend internationaler Konventionen sind im Internet frei verfügbar

- in deutscher Sprache auf der Webseite der *Physikalisch-Technischen Bundesanstalt* (PTB) als dem nationalen Metrologie-Institut der Bundesrepublik Deutschland unter der Adresse <http://www.ptb.de/de/publikationen/download/index.html>
- in englischer Sprache auf der Webseite des *National Institute of Standards and Technology* (NIST) als US-Bundesbehörde für Aufgaben der Messwissenschaften, Standards und Technologie unter der Adresse <http://physics.nist.gov/cuu/Units/index.html>
- in englischer Sprache auf der Webseite des *Bureau International des Poids et Mesures* (BIPM) als internationaler metrologischer Organisation mit Sitz in Frankreich unter der Adresse <http://www.bipm.org/en/si/>

Diese Webseiten können für ein weitergehendes Studium uneingeschränkt empfohlen werden!

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

#### 3.1 Problemstellung und Grundbegriffe

Unabhängig davon, wie sorgfältig und wissenschaftlich Messungen geplant und durchgeführt werden, können sie keine fehlerfreien Messergebnisse liefern. Durch eine Vielzahl von unterschiedlichen Ursachen werden die zu messenden Größen nicht korrekt erfasst. Im Unterschied zum sonst üblichen alltäglichen Sprachgebrauch ist mit dem Begriff „Fehler“ im Zusammenhang mit Messergebnissen meist *nicht* etwa ein falsches oder fehlerhaftes, sondern ein *fehlerbehaftetes* (damit unsicheres) Ergebnis gemeint, also die Abweichung der Messwerte vom unbekanntem wahren Wert der Messgröße.

Anstelle des noch oft gebräuchlichen Wortes „Messfehler“ sind -gemäß DIN 1319 (Deutsches Institut für Normung), GUM (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, ISO International Organisation for Standardisation) bzw. letzteres übernommen als Europäische Vornorm ENV 13005- die Begriffe der Messunsicherheit bzw. der Messabweichung zu bevorzugen:

- Als *Messabweichung* wird die Differenz (Abweichung) zwischen einem der Messgröße zuzuordnenden Wert (Messwert) und dem unbekanntem wahren Wert verstanden. Die Messabweichung kann also durchaus Null sein, ohne dass es bekannt ist!
- Die *Messunsicherheit* ist von der Messabweichung begrifflich klar zu unterscheiden: Sie ist ein Maß für die Genauigkeit der Messung und kennzeichnet die Streuung oder den Bereich derjenigen Werte, die der Messgröße vernünftigerweise als Schätzwerte für den wahren Wert zugewiesen werden können. Man kann sie also auch als ein Maß für die Unkenntnis (Unsicherheit) der Messgröße auffassen. Die nach einem einheitlichen Verfahren berechnete und in einer bestimmten Weise mitgeteilte Messunsicherheit drückt die Stärke des Vertrauens aus, mit der angenommen werden darf, dass der Wert einer gemessenen Größe unter den Bedingungen der Messung innerhalb eines bestimmten Wertintervalls liegt.

Das Ziel jeder Messung einer (physikalischen) Messgröße ist es (vgl. 2.), ihren wahren Wert -innerhalb der durch die jeweilige Messunsicherheit gegebenen Grenzen- zu ermitteln. Dazu wird eine Messeinrichtung bzw. ein Messverfahren auf ein Messobjekt als Träger der Messgröße angewendet. Bei einer direkten Messung ergeben sich die zu einer Messgröße gehörenden Messwerte direkt aus der Ausgabe der Messeinrichtung. Im Allgemeinen werden Messgrößen jedoch indirekt ermittelt, d.h. zunächst werden bestimmte andere Messgrößen direkt gemessen und dann aus ihnen (und gegebenenfalls weiteren bekannten Größen) über einen bekannten mathematischen Zusammenhang das vollständige Messergebnis für die Ergebnisgröße berechnet.

Unter Verwendung von genügend empfindlichen Messgeräten wird die mehrmalige Wiederholung einer Messung derselben Messgröße  $x$  unterschiedliche Messwerte  $x_i$  ( $i = 1 \dots n$ ; Zahl  $n$  der Messungen) liefern, die mehr oder weniger vom (grundsätzlich unbekanntem) wahren Wert  $x_w$  abweichen bzw. um ihn „streuen“. Bei der Auswertung ist aus den einzelnen Messwerten  $x_i$  ein wahrscheinlichster Wert  $x_c$  als Schätzung (beste Näherung) für den wahren Wert  $x_w$  zu bestimmen und die von den Messbedingungen abhängige Messunsicherheit  $u$  anzugeben.

Das vollständige Messergebnis lautet somit

$$x = x_c \pm u . \quad (2)$$

Der durch die Messunsicherheit  $u$  gekennzeichnete Wertebereich, der der Messgröße  $x$  zugewiesen werden kann, ist dann  $x_c - u \leq x \leq x_c + u$ . Dieses Messergebnis kennzeichnet ein Intervall, innerhalb dessen der wahre Wert mit einer kalkulierbaren (im Praktikum aber oft nur grob abschätzbaren) Wahrscheinlichkeit erwartet werden darf. Das bedeutet natürlich *nicht*, dass darin der wahre Wert *tatsächlich* enthalten sein muss: Falls die Messabweichung größer als die (dann offensichtlich zu klein bestimmte) Messunsicherheit ist, wird der wahre Wert außerhalb des Intervalls liegen!



### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSIKERHEITEN

Aus allen diesen Vorüberlegungen ergibt sich eine ganz prinzipielle Konsequenz:

**Die Messung einer physikalischen Größe ist ohne die Angabe der Messunsicherheit wissenschaftlich wert- und sinnlos. Eine Messunsicherheit ist kein Negativkriterium oder Mangel, sondern beschreibt die tatsächliche Qualität bzw. Sicherheit eines erzielten Messergebnisses.**

Jede Messung mit wissenschaftlichem Anspruch schließt ausdrücklich die Auswertung der so gewonnenen Messwerte und anderer zu berücksichtigender Daten ein, wobei ein einheitliches Verfahren (s. DIN 1319 bzw. GUM) überhaupt erst den kritischen Vergleich und die Kombination von Messergebnissen ermöglicht. Im allgemeinen Fall sind dafür folgende Schritte erforderlich:

- a) Aufstellung eines Modells, das die Beziehung der interessierenden Messgröße (Ergebnisgröße) zu allen anderen beteiligten Größen (Eingangsgroßen) mathematisch beschreibt
- b) Vorbereitung der gegebenen Messwerte und anderer verfügbarer Daten
- c) Berechnung des Messergebnisses und der Messunsicherheit der Ergebnisgröße aus den vorbereiteten Daten mittels des Modells
- d) Angabe des vollständigen Messergebnisses der Ergebnisgröße (einschließlich Unsicherheit)

Es ist eine Tatsache, dass Messungen keinen exakten Wert liefern können, weil sie Unzulänglichkeiten und Unvollkommenheiten unterworfen sind, die nicht beliebig genau quantifizierbar sind. Einige von ihnen haben ihre Ursache in zufälligen, andere dagegen in systematischen Effekten, die oft nicht exakt korrigiert werden können oder nur näherungsweise bekannt sind. Auftretende mögliche Messabweichungen lassen sich wie folgt klassifizieren:

- *Grobe Messabweichungen* entstehen durch Irrtümer beim Messen oder Notieren der Werte, Nichtbeachten von größeren äußeren Störeinflüssen, Versagen des Messgerätes o.ä. Hier lässt sich z.B. auch mangelnde Objektivität des Experimentators einordnen. Erkennt man starke Abweichungen in einer Messreihe eindeutig als grobe Fehler, lassen sich diese Messwerte bei der Auswertung vernachlässigen – aber nur dann! Grobe Abweichungen sind bei sorgfältiger Arbeit grundsätzlich vermeidbar und werden deshalb nicht weiter diskutiert.
- *Systematische Messabweichungen* können ihre Ursache im Messgerät, im Messverfahren oder im Beobachter haben. Sie sind reproduzierbar in Vorzeichen und Betrag. Beispiele sind Eichfehler der Messgeräte (Skalen, Massestücke), Veränderungen durch äußere Einflüsse (Temperatur, Luftdruck) oder Beobachtungsfehler (Parallaxe beim Ablesen von Skalen). In einigen Fällen können systematische Fehlerquellen quantitativ erfasst werden. Dann kann eine Korrektur des Messergebnisses erfolgen. Grundsätzlich verbleibt aber ein nicht korrigierbarer Anteil (systematischer Restfehler bzw. Messgeräteabweichung), der im Wesentlichen durch die technische Ausführung der Messgeräte bestimmt ist.
- *Zufällige Messabweichungen* entstehen durch messtechnisch nicht erfassbare und nicht beeinflussbare Änderungen von Messgeräten, Messobjekten und Umwelteinflüssen sowie z.T. durch subjektive Einflüsse des Beobachters. Mit gleicher Häufigkeit treten positive und negative Abweichungen auf, größere Abweichungen treten seltener auf als kleinere. Da die zufälligen Messabweichungen statistischen Gesetzen genügen, kann man mit Hilfe der statistischen Gesetze ihren Einfluss auf das Messergebnis bestimmen.

Als Regel lässt sich festhalten:

**Durch systematische Messabweichungen wird ein Messergebnis immer unrichtig, während durch zufällige Messabweichungen ein Messergebnis immer unsicher wird.**

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSIKERHEITEN

Weiterführende und ausführlichere Darstellungen zu den hier behandelten Zusammenhängen sind im Internet zu finden

- in deutscher Sprache auf der Webseite der *Physikalisch-Technischen Bundesanstalt* (PTB) unter <http://www.ptb.de/de/publikationen/download/index.html> und
- in englischer Sprache auf der Webseite des *National Institute of Standards and Technology* (NIST) unter <http://www.physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/index.html>.

Es soll hier nicht verschwiegen werden, dass die Ansätze des oben dargestellten GUM (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, ISO International Organisation for Standardisation) schon länger kritisiert werden. Kernaussagen der Kritik sind:

GUM legt nicht fest, wie eine Messunsicherheit definiert ist und was von ihr verlangt wird. Die Messunsicherheit soll nicht den wahren Wert der Messgröße lokalisieren - welche anderen Werte bevorzugt lokalisiert werden sollen, ist offen. Messunsicherheiten sollen mittels Wahrscheinlichkeitsaussagen abgesichert werden. Da GUM nicht festlegt, welche Effekte denn abzusichern seien, gilt die Forderung, mit Wahrscheinlichkeitsaussagen zu arbeiten, einem nicht definierten und offensichtlich nicht existierenden Kriterium. (Bei tieferem Interesse wird auf den alternativen Ansatz zu GUM unter <http://www.uncertainty.de/> verwiesen.)

**Oft stellt sich die folgende prinzipielle Frage bei der Auswertung von Messungen: Darf man einzelne Messwerte, die innerhalb einer Messreihe signifikant abweichen, einfach verwerfen? Zumindest könnte ein vorliegender grober Fehler oder eine einmalig aufgetretene (z.B. durch Umwelteinflüsse) systematische Abweichung vermutet werden. Einerseits kann natürlich ein vorhandener „Ausreißer“ in einer Messung ein „erwartetes“ Ergebnis merklich beeinflussen. Andererseits könnte durch Verwerfen von Messdaten ein neuer physikalischer Effekt u. U. sehr leicht übersehen werden (zugegebenermaßen im Praktikum eher sehr unwahrscheinlich). Jede Daten-Manipulation ist damit als grundsätzlich fragwürdig anzusehen: Eine starke Abweichung kann nur sachlich begründet als Fehlmessung interpretiert werden. Es ist besser, die betreffende Messung zu wiederholen (Reproduzierbarkeitstest). Zur Vermeidung von „Ausreißern“ ist es ratsam, während jeder Messreihe eine mindestens stichprobenartige Überprüfung und kurze Zwischenauswertung vorzunehmen!**

In den folgenden Abschnitten werden zunächst für eine direkt gemessene Größe die systematische Messabweichung und ihre mögliche Korrektur (3.2), statistische Methoden (3.3) für die zufällige Messabweichung (3.4) und die Ermittlung des vollständigen Messergebnisses mit seiner Messunsicherheit (3.5) diskutiert. Weiterhin werden die Auswirkung der Messunsicherheiten mehrerer Größen auf ein indirekt zu ermittelndes Endergebnis (3.6), die Ausgleichsrechnung bzw. Regression (3.7) und die Berechnung des gewogenen bzw. gewichteten Mittelwertes (3.8) behandelt.

#### 3.2 Systematische Messabweichungen

Systematische Messabweichungen können sehr unterschiedliche Ursachen haben und sind immer in einer bestimmten Richtung und Größe wirksam. Bekannte systematische Abweichungen sind i.a. auch quantifizierbar und das Messergebnis damit korrigierbar. Unbekannte systematische Messabweichungen können allenfalls anhand ausreichender Erfahrung in einer Komponente der Messunsicherheit zusammengefasst werden.

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNGSICHERHEITEN

#### 3.2.1 Korrektur systematischer Messabweichungen

Wenn eine Messgröße von erfassbaren äußeren Einflüssen abhängig ist, die die Messgröße bezüglich Richtung und Größe definiert verändern, kann der Messwert korrigiert werden. Das setzt aber voraus, dass entweder durch ein Hilfsexperiment die Korrekturgröße gemessen wird oder theoretisch berechenbar ist. Dabei muss immer gelten, dass die Korrektur *klein* in Bezug auf die Messgröße ist - ansonsten ist das verwendete Messverfahren ungeeignet! An zwei Beispielen wird nachfolgend das prinzipielle Vorgehen erläutert.

##### Beispiel 1: Fadenpendel

Die gemessene Periodendauer  $T$  eines Fadenpendels ist abhängig von der Amplitude  $\varphi$  des Winkels der Auslenkung, bei der die Messung durchgeführt wird. Die Abhängigkeit (vgl. Versuch F3) ist durch die Beziehung

$$T = T_0 \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{4} \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{9}{64} \cdot \sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \dots \right\} \quad (3)$$

gegeben. Aus den bekannten Messgrößen  $T$  und  $\varphi$  kann die Periodendauer  $T_0$  des idealisierten mathematischen Pendels für eine Amplitude  $\varphi = 0$  mit  $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$  (Pendellänge  $l$  und Fallbeschleunigung  $g$ ) berechnet werden.

##### Beispiel 2: Wärmeaustauschkorrektur

Bei kalorimetrischen Messungen (vgl. Versuch T1) ist ein Wärmeaustausch mit der Umgebung unvermeidlich (offenes thermodynamisches System) und meist störend. Aus dem gemessenen zeitlichen Temperaturverlauf ist er aber abzulesen (s. Abb. 1).

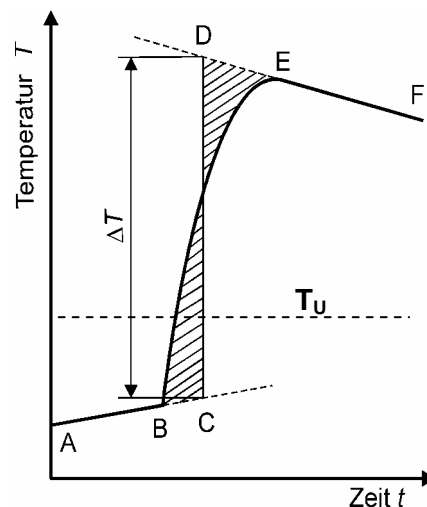


Abbildung 1: Zeitlicher Verlauf der Temperatur im Kalorimeter

In der Vorperiode erhält man den ansteigenden Kurvenabschnitt A→B, in der Nachperiode den abfallenden Kurvenabschnitt E→F. Das liegt daran, dass das Kalorimeter eben nicht adiabatisch bzw. isentrop ist: Die Temperatur der Kalorimeterflüssigkeit im Innern gleicht sich in beiden Abschnitten jeweils an die Umgebungstemperatur  $T_u$  an, wobei der Wärmefluss proportional zur Temperaturdifferenz ist. Es lässt sich zeigen (vgl. Versuch T6), dass der Gleichgewichtszustand zeitlich exponentiell angenommen wird. Im vorliegenden Fall ist aber die entsprechende Zeitkonstante sehr groß im Vergleich zur Messzeit, so dass die beiden Abschnitte A→B und E→F näherungsweise jeweils durch eine Gerade beschrieben werden dürfen. Dieser Sachverhalt gestattet es außerdem, in diesen Abschnitten die Messwerte in größerer zeitlicher Schrittweite aufzunehmen.

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

Aufgrund des real zeitlich ausgedehnten Wärmeaustausches mit der Umgebung beobachtet man einen stetigen und differenzierbaren Verlauf der Kurve im Abschnitt B→E. Nur wenn die im Experiment zugeführte Wärme sofort verteilt würde, wäre die Temperaturkurve eine Sprungfunktion. Das System braucht eine gewisse Zeit, bis sich ein neues Gleichgewicht einstellen kann. Es verhält sich so, als ob es über ein ganzes Zeitintervall „verschmiert“ wäre. Es gilt also die Endzeit der Wärmezufuhr zu finden: Sie liegt im Wendepunkt der Temperaturkurve, weil sich dort die Richtung der Krümmung ändert, also Wärmezufuhr in Wärmeverlust übergeht. Nun lässt sich aber im Abschnitt B→E die Kurve  $T(t)$  nicht beliebig schnell messen, so dass der Wendepunkt praktisch nicht identifiziert werden kann.

Den komplizierten Verlauf der Hauptperiode B→E kann man näherungsweise durch einfache lineare Extrapolation der Vor- bzw. Nachperiode bis zu den Punkten C bzw. D beschreiben, wobei dann im Übergang C→D ein „sprunghafter“ Temperaturanstieg (d.h. instantaner Wärmeaustausch) angenommen wird. Die beiden in der Abb. 1 gezeigten schraffierten Flächen sind ein Maß für die durch diese Näherung zuviel bzw. zuwenig angenommenen Wärmemengen. Wählt man die „Sprungstelle“ so, dass beide Flächen genau gleich groß sind, werden die Fehler der Näherung für die Wärmemengen gerade kompensiert. Für weitere Berechnungen kann dann die Temperaturdifferenz  $\Delta T = T_D - T_C$  im „sprunghaften“ Übergang C→D verwendet werden.

**Ein allgemeingültiges Verfahren für solche Korrekturrechnungen lässt sich leider nicht angeben, sondern muss jeweils aus den konkreten physikalischen Sachverhalten und wirkenden Gesetzmäßigkeiten eines Experiments abgeleitet werden. Entsprechende Hinweise dazu sind in den Versuchsanleitungen gegebenenfalls enthalten.**

Hat man aber für ein Messverfahren die Korrekturgröße  $e_c$  (mit entsprechendem Vorzeichen!) ermittelt, erhält man den korrigierten Messwert durch

$$x_c = \bar{x} + e_c \quad (4)$$

mit  $\bar{x}$  als arithmetischem Mittelwert der Wiederholungsmessungen.

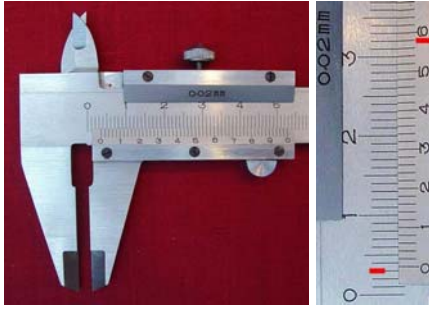
#### 3.2.2 Abschätzung systematischer Messabweichungen (Einflussgrößen)

Bestimmte äußere Einflussgrößen (Temperatur, Störfelder u.a.) können das Messergebnis beeinflussen, ohne dass eine strenge Korrekturrechnung möglich ist. Einige einfache Beispiele sind nachfolgend aufgeführt:

- *Widerstandsbestimmungen* aus Strom- und Spannungs-Messungen sind meist mit der Entstehung von Wärme im Leiter verbunden (Joulesche Wärme), oft verändert sich dadurch der spezifische Widerstand. Zumindest die Richtung der Veränderung kann abgeschätzt werden, wenn wenigstens das Vorzeichen des Temperaturkoeffizienten bekannt ist.
- Bei *Messung von kleinen elektrischen Signalen* mit einem Oszillographen lässt sich feststellen, dass die tatsächlich nutzbare Messempfindlichkeit stets begrenzt ist - verursacht durch äußere Störfelder und das Eigenrauschen von elektronischen Bauelementen.
- Die *Durchmesserbestimmung* eines Gummischlauches wird mit Hilfe eines Messschiebers (s. Abb. 2) ausgeführt. Eine zu große Druckkraft kann dabei eine Deformation des Gummischlauches verursachen, was eine systematische Abweichung des Durchmessers in Richtung zu kleiner Messwerte erwarten lässt.

Wenn auch die Wirkung äußerer Einflussgrößen auf die Messung oft rechnerisch nicht wirklich exakt erfasst werden kann, so ist es dennoch häufig möglich, wenigstens ihren maximalen Einfluss auf die Messgröße abzuschätzen und die Richtung der systematischen Messabweichung anzugeben.

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN



Ablesung: 3,58 mm



Ablesung: 5,78 mm

**Abbildung 2: Messschieber (links) und Mikrometermessschraube (rechts)**

#### Prinzip der Maximalisierung:

Mit einer Präzisionsmesseinrichtung wird ein Kupferstab der Länge  $l_0 = (355,62 \pm 0,03)$  cm gemessen, also mit einer relativen Messunsicherheit von  $3/35562 \approx 8 \cdot 10^{-5}$ . Während der Messung variierte die Raumtemperatur zwischen 18 und 23 °C. Ist die systematische Messabweichung durch eine Längenausdehnung infolge der beobachteten Temperaturänderung bestimmend für die Unsicherheit dieser Messung?

Mit dem linearen Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha_{Cu} = 1,68 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$  für Kupfer und einer Temperaturdifferenz  $\Delta T = 5 \text{ K}$  kann mit  $\Delta l/l_0 = \alpha_{Cu} \cdot \Delta T = 1,68 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \cdot 5 \text{ K} \approx 8 \cdot 10^{-5}$  die relative Längenänderung abgeschätzt werden. Sie ist hier von gleicher Größenordnung wie die angegebene Messunsicherheit: Eine eindeutige Aussage ist offensichtlich nicht möglich.

#### Umkehrung der Maximalisierung:

Im Praktikum ist es oft so, dass bei der Ergebnisanalyse nicht klar ist, inwieweit äußere Einflussgrößen zu berücksichtigen sind. Dann kann es hilfreich sein, das Verfahren der Maximalisierung umzukehren, wie das folgende Beispiel zeigt: Das Ergebnis der Längenmessung eines Werkstückes aus Kupfer mit einer Mikrometermessschraube (s. Abb. 2) sei  $(52,24 \pm 0,01)$  mm. Wie groß müsste die Temperaturschwankung sein, wenn die ermittelte Messunsicherheit durch die thermische Längenänderung verursacht wäre?

Für die Temperaturdifferenz  $\Delta T$  folgt

$$\Delta T = \frac{1}{\alpha_{Cu}} \cdot \frac{l - l_0}{l_0} \approx 11 \text{ K} .$$

Eine solche Temperaturänderung während des Versuchs ist doch eher unwahrscheinlich.

#### 3.2.3 Messgerätefehler

Häufig stehen nicht die empfindlichsten Messmittel und Messgeräte zur Verfügung: für das Praktikum ist das auch nicht wirklich nötig und sinnvoll. Zur Beurteilung der Messunsicherheiten experimenteller Ergebnisse muss aber generell die Genauigkeit der benutzten Geräte und Mittel bekannt sein. Im Zusammenhang mit dem Verhalten von Messeinrichtungen ist der sonst möglichst zu vermeidende Terminus „Fehler“ (vgl. 3.1) auch weiterhin üblich.

Sehr problematisch sind mögliche *Eichfehler*, die mit den vorhandenen Möglichkeiten des Praktikums meist nicht quantitativ zu ermitteln sind. Überprüfen kann man aber wenigstens die "innere Konsistenz" von Messgeräten und -mitteln; hier einige Beispiele dafür:

- Die ungleichmäßige Teilung einer Skale lässt sich nachweisen, indem man unterschiedliche Teilstücke der Skale verwendet und dann verschiedene Messergebnisse erhält. Man muss nicht immer mit der Messung am Nullpunkt der Skale beginnen!
- Ein Satz von Massennormalen kann getestet werden durch unterschiedliche Kombinationen der Massennormale, wie z.B.  $50 \text{ g} = (20+10+10+5+5) \text{ g}$ .
- Durch unterschiedliche Kombinationen sind ebenso Dekadenwiderstände überprüfbar.

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

Bei kommerziellen Messmitteln und -geräten werden durch seriöse Hersteller praktisch immer Angaben zur Genauigkeit ihrer Produkte gemacht, über die man sich Klarheit verschaffen sollte. In Vorschriften, Normen bzw. Regelungen (DIN, ISO, EN) sind für Waagen, Längenmessgeräte, Thermometer, elektrische Messgeräte usw. entsprechende Angaben direkt vorgeschrieben. Besonders wichtig sind die folgenden Begriffe:

- Allgemein kennzeichnen *Fehlergrenzen* stets Höchstwerte für positive oder negative Abweichungen des Messwertes (Anzeige bzw. Ausgabe einer Messeinrichtung) vom wahren Wert. Sie sind abhängig vom technischen Aufwand sowie prinzipiellen technisch-physikalischen Einschränkungen und meist bestimmend für den Preis von Messtechnik.
- Unter *Garantiefehlergrenzen* versteht man vereinbarte bzw. garantierte Fehlergrenzen beim Gebrauch der Geräte unter festgelegten Bedingungen.
- Als *Genauigkeitsklasse* bezeichnet man eine Klasse von Messgeräten, die vorgegebene messtechnische Forderungen so erfüllen, dass die auftretenden Messabweichungen innerhalb festgelegter Grenzen bleiben.
- Die *Eichfehlergrenze* ist die maximal zulässige Fehlergrenze von eichpflichtigen Messgeräten. Als Eichung bezeichnet man eine gesetzlich vorgeschriebene und auf nationale Standards rückführbare Kalibrierung. Oft wird der Begriff Eichung fälschlich für Kalibrierung verwandt.
- Die *Verkehrsfehlergrenze* ist die maximal zulässige Fehlergrenze von eichpflichtigen Messgeräten während des Einsatzes innerhalb der Eichgültigkeitsdauer. Sie beträgt nach gesetzlicher Regelung das Doppelte der Eichfehlergrenze.

Für die wichtigsten im Praktikum verwendeten Messgeräte und -mittel werden im folgenden Abschnitt Angaben zu Gerätefehlern bzw. nicht korrigierbaren systematischen Restfehlern in möglichst übersichtlicher Form gemacht - eine zweckmäßige Verwendung bei den jeweiligen Versuchsauswertungen wird nachdrücklich empfohlen. Im Zweifelsfall und insbesondere bei komplizierterer Messtechnik ist jeweils die Dokumentation (Gebrauchsanweisung, Handbuch, Gerätepass, Datenblatt usw.) heranzuziehen.

Anhand einiger Beispiele wird erläutert, wie die daraus resultierenden Grenzen für mögliche Messabweichungen realistisch abgeschätzt werden können.

**Tabelle 5: Längenmessmittel (Auswahl)**

| Messmittel        | Betrag des Teilungsfehlers $\Delta L$ für gemessene Länge $L$ |
|-------------------|---|
| Büromaßstab       | $200 \mu\text{m} + 10^{-3} \cdot L$                           |
| Stahlmaßstab      | $50 \mu\text{m} + 5 \cdot 10^{-5} \cdot L$                    |
| Messschieber      | $50 \mu\text{m} + 10^{-4} \cdot L$                            |
| Bügelmessschraube | $5 \mu\text{m} + 10^{-5} \cdot L$                             |



**Abbildung 3: Messschraube**

**Anwendungsbeispiel:** Mit einer Bügelmessschraube wird die Höhe  $h$  eines Körpers gemessen. Mit Hilfe der Skalen der zugehörigen Mikrometerschraube (s. Abb. 3) erfolgt die Ablesung des Messwertes. Auf der Skalenhülse ist eine zweifache Teilung vorhanden, die zunächst das Ergebnis von 5,5 mm liefert. Auf der Skalentrommel ist eine Teilung von 0 bis 50 vorhanden, wobei eine volle Umdrehung der Trommel 0,5 mm entspricht. Ein Teilstrich entspricht also  $0,5 \text{ mm} / 50 = 0,01 \text{ mm}$ , wobei noch halbe Teilstriche geschätzt werden könnten. Die Ablesung der Skalentrommel liefert 0,28 mm. Es folgt als Messwert 5,78 mm und als Abschätzung  $\Delta h = 5 \mu\text{m} + 10^{-5} \cdot 5,78 \text{ mm} \approx 5 \mu\text{m}$ . Das vollständige Messergebnis lautet  $h = (5,780 \pm 0,005) \text{ mm}$ .

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSIKERHEITEN

**Tabelle 6: Volumenmessmittel (Auswahl)**

|   |       |       |       |      |     |      |
|---|-------|-------|-------|------|-----|------|
| <i>Pipetten, nicht eichfähig:</i> Nennvolumen $V_N$ , $V$ gemessenes Volumen $V$ , Fehler $\Delta V$ (ml) |       |       |       |      |     |      |
| $V_N$ (ml)  | 1     | 2     | 5     | 10   |     |      |
| $V \leq 0,5 \cdot V_N$  | 0,008 | 0,012 | 0,025 | 0,05 |     |      |
| $V > 0,5 \cdot V_N$   | 0,012 | 0,025 | 0,05  | 0,08 |     |      |
| <i>Messzylinder, nicht eichfähig:</i> Nenninhalt $V_N$  |       |       |       |      |     |      |
| $V_N$ (ml)  | 10    | 50    | 100   | 250  | 500 | 1000 |
| $\Delta V$ (ml)   | 0,1   | 0,5   | 1     | 2    | 5   | 10   |

**Tabelle 7: Zeitmessmittel (Auswahl)**

|   |  |   |
|---|--|---|
| <i>Analog-Stoppuhr:</i> Messzeit $t$ , Eichfehlergrenze $\Delta t$ (s)  |  |   |
| Zeigerumlauf (s)  | 30   | 60  |
| $\Delta t$ (s)  | $0,2 \text{ s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot t$  | $0,4 \text{ s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot t$ |
| <i>Digital-Stoppuhr:</i> Messzeit $t$ , Eichfehlergrenze $\Delta t$ (s) |  |   |
| $\Delta t$ (s)  | $0,01 \text{ s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot t$ |   |

**Anwendungsbeispiel:**

Mit einer Digital-Stoppuhr (Auflösung 0,01 s) wird die Zeit  $t$  für 100 Schwingungen eines Fadenpendels gemessen mit 3 min 26,34 s (206,34 s). Gemäß Tab. 7 berechnet man nun  $\Delta t = 0,01 \text{ s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot 206,34 \text{ s} \approx 0,01 \text{ s} + 0,103 \text{ s} \approx 0,11 \text{ s}$ . Das vollständige Messergebnis lautet also  $t = (206,34 \pm 0,11) \text{ s}$ .

Hier wird ganz offensichtlich, dass nicht etwa die letzte Stelle (Auflösung) der Digitalanzeige -wie man sehr leicht und vorschnell vermuten könnte- die tatsächlichen Fehlergrenzen bestimmt! Allerdings sieht man auch beim Blick in die obige Tabelle, dass die Fehlergrenzen bei Verwendung einer (mechanischen) Analog-Stoppuhr mit etwa 0,3 s bzw. 0,5 s doch deutlich größer wären.

**Tabelle 8: Temperaturmessmittel (Auswahl)**

|  |   |     |     |      |
|--|---|-----|-----|------|
| <i>Laborthermometer:</i> Bereich - 5 ... 60 °C, Garantiefehlergrenze $\Delta T$        |   |     |     |      |
| Skalenteilung (K)  | 1   | 0,5 | 0,2 | 0,1  |
| $\Delta T$ (K)   | 0,7                                       | 0,5 | 0,5 | 0,15 |
| <i>Kalorimeter-Thermometer (Präzisionsausführung):</i> Garantiefehlergrenze $\Delta T$ |   |     |     |      |
| $\Delta T$ (K)   | 0,02                                      |     |     |      |
| <i>Digital-Präzisionsthermometer GTH 175 / Pt:</i>                                     |   |     |     |      |
| Bereich -70..199,99°C, Messtemperatur $T$ , Garantiefehlergrenze $\Delta T$            |   |     |     |      |
| $\Delta T$ (K)   | $10^{-3} \cdot T + 2 \text{ Digit (LSD)}$ |     |     |      |

**Tabelle 9: Massenmessmittel**

|  |          |     |      |        |      |      |         |      |      |
|--|----------|-----|------|--------|------|------|---------|------|------|
| <i>Feingewichtsstücke:</i> Verkehrsfehlergrenze $\Delta m$ |          |     |      |        |      |      |         |      |      |
| Nennmasse (g)  | 500      | 200 | 100  | 50     | 20   | 10   | 5       | 2    | 1    |
| $\Delta m$ (mg)  | 3        | 1,5 | 0,75 | 0,45   | 0,30 | 0,23 | 0,23    | 0,15 | 0,15 |
| Nennmasse (mg)   | 500..100 |     |      | 50..20 |      |      | 10..0,5 |      |      |
| $\Delta m$ (mg)  | 0,075    |     |      | 0,045  |      |      | 0,030   |      |      |




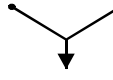








### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

|   |           |                               |                     |
|---|-----------|-------------------------------|---------------------|
| <i>Feinwaagen:</i><br>gleicharmige Balkenwaagen mit Einspielungslage, Empfindlichkeit E, gemessene Masse m. Die größte der drei nachstehend erklärten Größen $\Delta_i m$ ist der Restfehler $\Delta m$ . |           |                               |                     |
| Für alle Belastungen mindestens   |           | $\Delta_1 m = 1$ Skalenteil/E |                     |
| m (kg)  | 0..1      | $\Delta_2 m = 2$ mg           |                     |
| m (g)   | 0..100    | $\Delta_3 m$                  | $2 \cdot 10^{-5} m$ |
|   | 100..200  |                               | 2 mg                |
|   | 200..5000 |                               | $10^{-5} m$         |

**Tabelle 10: Präzisionsdekadenwiderstände**

| eingeschalteter Widerstand R, Restfehler $\Delta R$ |                                |
|---|--------------------------------|
| R ( $\Omega$ )                                      | $\Delta R$                     |
| 0,0..0,1  | $0,02 \Omega + 0,01 \cdot R$   |
| 0,1..10   | $0,02 \Omega + 0,001 \cdot R$  |
| >10   | $0,02 \Omega + 0,0003 \cdot R$ |

**Tabelle 11: Analoge elektrische Messgeräte**

|   |                             |   |                            |
|---|-----------------------------|---|----------------------------|
| <i>Art des Strom- bzw. Spannungssignals:</i>  |                             |   |                            |
| ~ Wechselstrom (AC)   |                             | — Gleichstrom (DC)  |                            |
| <i>Art des Messwerkes:</i>  |                             |   |                            |
|    | Drehspulmesswerk            |                              | Induktionsmesswerk         |
|    | Dreheisenmesswerk           |                              | Hitzdrahtmesswerk          |
|    | elektrodynamisches Messwerk |                              | elektrostatisches Messwerk |
| <i>Messumwandler (Zusatzeinrichtungen):</i>   |                             |   |                            |
|  Gleichrichter   |                             |  Thermoumformer            |                            |
| <i>Gebrauchslage:</i>   |                             |   |                            |
|  waagrecht   |                             |  schräg                      |                            |
|   |                             |  senkrecht                 |                            |
| <i>Prüfspannung:</i><br>kennzeichnet Isolation des Messwerkes gegenüber dem Gehäuse, Zahlenangaben in kV  |                             |   |                            |
|   |                             |  Beispiel: Prüfspannung 5 kV |                            |
| <i>Nennfrequenzen:</i> werden nur angegeben, wenn sie außerhalb von 45 bis 65 Hz liegen   |                             |   |                            |
| <i>Anzeigefehler:</i><br>ableitbar aus der auf dem Skalenträger (oder rückseitig) angegebenen Genauigkeitsklasse des Messgerätes (Anzeigefehler in Prozent vom Endwert des Messbereiches unter Normalbedingungen), wie z.B. 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5 bzw. 5 |                             |   |                            |
| <i>Normalbedingungen:</i><br>Gebrauchslage bei 20 bzw. 23 °C, vernachlässigbare elektromagnetische Störfelder, Einhalten der Nennfrequenz und sinusförmiger (harmonischer) Signalverlauf bei AC   |                             |   |                            |

Analoge Spannungs- (Voltmeter) bzw. Strommessgeräte (Amperemeter) tragen im Skalenfeld (manchmal auch direkt am Gehäuse oder auf der Rückseite) Symbole zur Kennzeichnung von Eigenschaften dieser Messmittel (s. Tab. 11).



### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

Viele Messgrößen können aber auch mit digitalen Messgeräten (s. Abb. 4b) bestimmt werden. Der systematische Restfehler wird bei digitalen Messgeräten durch die Digitalisierung (Auflösung der internen Analog-Digital-Wandler; Quantisierungs-, Offset- und Linearitätsfehler der Wandler) bzw. durch andere interne Baugruppen (Messverstärker zur Signalanpassung an die Wandler) etc. bestimmt. Detaillierte Angaben sind den jeweiligen Gebrauchsanleitungen zu entnehmen. Üblicherweise wird der Fehler in % vom momentanen Messwert, zuzüglich eines Digitfehlers, angegeben: z.B. in der Form  $\pm(2,5\% + 2 \text{ Digit})$ . Sofern überhaupt keine Angabe verfügbar ist, beträgt die anzunehmende *Mindestgröße* des systematischen Restfehlers 1 Digit bzw. (genauer) 1 LSD (**L**east **S**ignificant **D**igit = letzte angezeigte Ziffer).



a) Analog-Voltmeter



b) Digital-Multimeter (DMM)



c) DMM-Anzeigefeld (mit Bar-Graph)

**Abbildung 4: Elektrische Analog- und Digitalmessgeräte**

**Der Anzeigefehler bzw. die Genauigkeitsklasse eines Analog-Messinstrumentes bezieht sich immer auf den Endwert des Messbereiches, deshalb wächst der prozentuale Fehler der Messgröße in Richtung Skalenanfang. Es ist deshalb sinnvoll, den Messbereich auszunutzen.**

**Der Anzeigefehler eines Digital-Messinstrumentes wird als prozentualer Anteil des momentanen Messwertes, zuzüglich Digitfehler, angegeben. Sofern nichts weiter bekannt ist, ist für den Digitfehler mindestens 1 LSD anzusetzen. Im oberen Teil eines Messbereiches ist der Digitfehler meist nicht signifikant, d.h. der prozentuale Fehler dominiert.**

#### Anwendungsbeispiele:

- Ein Analog-Multimeter der Genauigkeitsklasse 2,5 wird im Messbereich „100 mV“ verwendet. Das Gerät hat damit einen Anzeigefehler von  $\Delta U = 2,5\% \cdot 100 \text{ mV} = 2,5 \text{ mV}$ . Bei einer Messgröße (Spannung) von  $U = 10 \text{ mV}$  folgt daraus eine relative Unsicherheit von  $\Delta U/U = 2,5 \text{ mV} / 10 \text{ mV} = 25\%$ ; dagegen für eine Messgröße von 80 mV nur ca. 3% Unsicherheit. Als Schlussfolgerung ergibt sich, dass man Messungen möglichst in einem angepassten Messbereich ausführen sollte, so dass die vorhandene Skale weitestgehend ausgenutzt werden kann.
- Ein Digitalmultimeter wird zur Wechselstrommessung verwendet und zeigt einen Messwert von 19,85 mA im Display. Für das Gerät ist laut Gebrauchsanweisung im eingesetzten Messbereich „20 mA“ eine Genauigkeit von  $2,5\% + 5 \text{ Digit}$  angegeben. 1 Digit bzw. 1 LSD im vorliegenden Messbereich sind 0,01 mA, so dass sich daraus als Messfehlergrenze  $\Delta I = (2,5\% \cdot \text{Messwert} + 5 \text{ Digit}) = (2,5\% \cdot 19,85 \text{ mA} + 5 \cdot 0,01 \text{ mA}) \approx 0,5 \text{ mA} + 0,05 \text{ mA} \approx 0,55 \text{ mA}$  ergibt. Der Digitfehler ist in diesem Beispiel nicht signifikant (s. oben). Das vollständige Messergebnis lautet also  $I = (19,85 \pm 0,55) \text{ mA}$ .

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSIKERHEITEN

#### **Zu den elektrischen Messgeräten sind noch einige generelle Anmerkungen notwendig:**

- Zusätzlich zum Anzeigefehler eines Messgerätes sind oft noch Abweichungen infolge fehlerbehafteter bzw. ungenauer Ablesung zu berücksichtigen. Bei Analoginstrumenten ist wegen der begrenzten Genauigkeit der Skaleneinteilung meist eine Schätzung beim Ablesen notwendig. Dabei sollte man durch senkrechte Ablesung *Parallaxenfehler* möglichst vermeiden; eine *Spiegelskale* ist dafür besonders zweckmäßig. Dagegen kann man bei Digitalinstrumenten wegen der Ziffernanzeige Ablesefehler ziemlich sicher ausschließen.
- Bei den Analogmessgeräten wurde bereits erwähnt (s. Tab.10), dass i.a. ein sinusförmiger (harmonischer) Signalverlauf für die Messbedingungen vorausgesetzt wird: Nur dann können die *Effektivwerte* für Strom bzw. Spannung mit Analoginstrumenten richtig gemessen werden (Erklärung s. Versuch E5 Gleichrichterschaltungen). Die gleiche Voraussetzung gilt sinngemäß aber auch für einfachere Digitalmultimeter.
- Einige Digitalmultimeter tragen die Aufschrift *TRUE RMS* (**R**oot **M**ean **S**quare = Wurzel aus dem Mittelwert des Quadrats = Effektivwert) und sind damit auch ausdrücklich zur Messung der Effektivwerte anharmonischer (nicht sinusförmiger) Signale geeignet.

#### **3.3 Grundbegriffe der Statistik**

Bevor zufällige Messabweichungen genauer behandelt werden können, sind Erläuterungen einiger Grundbegriffe der mathematischen Statistik und zufallsbedingter Eigenschaften (Merkmale) von großen Gruppen (Stichproben oder Grundgesamtheiten) notwendig: Zufällige Messabweichungen sind Zufallsgrößen im Sinne der Statistik, so dass sich daraus wichtige Folgerungen für die Berechnung der Messunsicherheit eines Messergebnisses ziehen lassen (vgl. 3.4).

Die Eigenschaft „zufällig“ ist hier so aufzufassen, dass die Ursachen von Messabweichungen nicht im Einzelnen zu verfolgen sind und Messwerte stochastisches (d.h. dem Zufall unterworfenen) Verhalten zeigen. Messergebnisse sind dann folgerichtig auch statistisch zu interpretieren und mit Aussagen über Wahrscheinlichkeiten zu verknüpfen.

Besonders offensichtlich wird das bei der Untersuchung statistischer Messgrößen (wie z.B. beim radioaktiven Zerfall), bei der Schwankung von Messwerten infolge Unzulänglichkeit des Experiments oder Experimentators (s. Versuch F1) oder bei tatsächlich zufällig auf das Experiment einwirkenden äußeren Einflüssen (z.B. wechselnde Luftströmungen, kurzzeitige Temperaturschwankungen etc.).

##### **3.3.1 Grundgesamtheit und Stichprobe**

Die mathematische Statistik untersucht zufällige Ereignisse bezüglich eines (oder auch mehrerer) quantitativ erfassbaren Merkmals. Dazu ordnet sie dem zufälligen Ereignis eine Zahl zu, die man *Zufallsvariable* nennt. Die Zufallsvariable kann auf *diskrete Merkmalswerte* beschränkt sein, beispielsweise auf die sechs Augenzahlen beim Würfel. Sie kann aber auch *stetige Merkmalswerte* haben, beispielsweise die Höhe der Bäume in einem Waldstück.

In der mathematischen Statistik heißt die Gesamtheit aller möglichen Realisierungen des betrachteten zufallsbedingten Merkmals die *Grundgesamtheit*, die aus endlich, aber auch aus unendlich vielen Elementen bestehen kann.

Bei allen praktischen empirischen statistischen Untersuchungen ist man auf eine Auswahl aus der Grundgesamtheit beschränkt, eine *Stichprobe*. Diese umfasst immer nur eine endliche Anzahl  $n$  von Realisierungen  $x_i$  ( $i = 1..n$ ) eines messbaren, aber zufallsbedingten Merkmals. Die einzelnen Realisierungen  $x_i$  haben unterschiedliche Werte des Merkmals, die nicht voraussagbar sind. Aus den Kenngrößen der Stichprobe lassen sich aber i.a. Schlussfolgerungen für das Verhalten der Grundgesamtheit ziehen.

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSIKERHEITEN

#### Beispiele:

- Für eine Einzelperson ist die Lebenserwartung ungewiss, aber für die gesamte Bevölkerung eines Landes kann man die Lebenserwartung als statistischen Mittelwert angeben.
- Der Holztertrag der einzelnen Bäume in einem Wald ist unterschiedlich, aber nach Ermittlung des Holztrages einer repräsentativen Stichprobe aus einem größeren Waldstück ist der Gesamtertrag vorausberechenbar.

Angewandt auf Messprozesse und ihre Auswertung, ergeben sich folgende Zielsetzungen:

- Aus der empirischen Verteilung der Merkmalswerte einer Stichprobe soll die theoretische *Wahrscheinlichkeitsverteilung* der Grundgesamtheit abgeschätzt werden, d. h. die Parameter dieser theoretischen Verteilung sind durch eine optimale Anpassung an die Stichprobenwerte zu berechnen.
- Weiterhin ist die Veränderung der Verteilung der Merkmalswerte bei Änderung von Nebenbedingungen zu beschreiben (Parameterabhängigkeit der Verteilung) und/oder eine Korrelation zwischen verschiedenen Merkmalen gleicher Dinge oder zwischen dem gleichen Merkmal verschiedener Dinge nachzuweisen.
- Speziell auf die zufälligen Messabweichungen angewandt, muss die Statistik zeigen, ob bzw. dass die Grundgesamtheit einer speziellen (angenommenen) Verteilung tatsächlich genügt. Sie soll außerdem ein Verfahren angeben, mit dessen Hilfe aus der endlichen Anzahl von Messwerten einer Stichprobe empirische Näherungswerte für die Messgröße und ihre Streuung (Unsicherheit) ermittelt werden können.

#### 3.3.2 Häufigkeits- und Summenhäufigkeitsverteilung

Untersucht man eine Stichprobe vom Umfang  $n$  bezüglich des Merkmals  $x$ , dann erhält man eine Tabelle der beobachteten Elemente  $x_i$  („Urliste der Elemente“); die Messwerte streuen in einem bestimmten Bereich (Abb. 5).

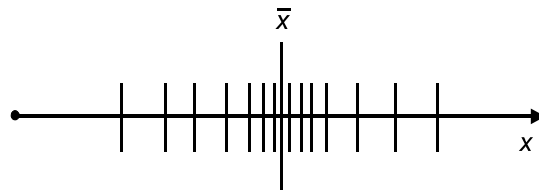


Abbildung 5: Streuung der Stichprobenwerte

Die Streuung der Merkmalswerte  $x_i$  einer Stichprobe kann in einer Häufigkeitsverteilung veranschaulicht werden. Kommt in einer Stichprobe vom Umfang  $n$  der Merkmalswert  $x_j$  gerade  $k$ -mal vor, dann bezeichnet man mit  $k(x_j)$  die *absolute Häufigkeit* und mit

$$h(x_j) = \frac{k(x_j)}{n} \quad (5)$$

die *relative Häufigkeit* dieses Merkmalswertes. Offensichtlich ist hier mit

$$\sum_{j=1}^n h(x_j) = 1 \quad (6)$$

eine Normierungseigenschaft gegeben: Die Wahrscheinlichkeit, überhaupt einen Merkmalswert in der Stichprobe vorzufinden, ist (trivial) 1 bzw. 100 %.

Sind die Merkmalswerte diskret (z.B. die Zahl Studierender als Funktion des Immatrikulationsjahres), ergibt die grafische Darstellung von  $h(x)$  ein Stabdiagramm (s. Abb. 6).

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

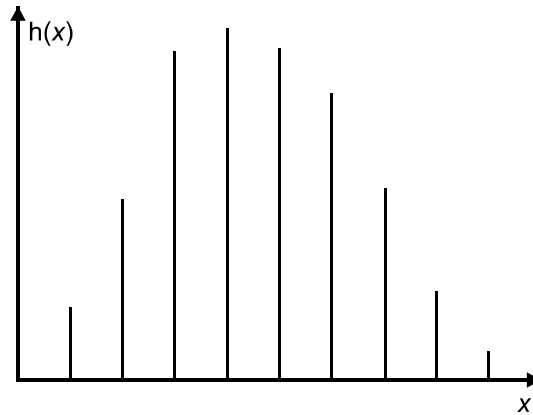


Abbildung 6: Stabdiagramm für diskrete Merkmalswerte

Wenn die Zahl der diskreten Merkmalswerte sehr groß ist, so dass ein Stabdiagramm unübersichtlich wäre, ist eine *Klasseneinteilung der Merkmalswerte* nach folgender Vorschrift zweckmäßig:

- Der Bereich der möglichen Merkmalswerte wird in  $N$  gleichgroße Intervalle der Breite  $\Delta x$  eingeteilt, so genannte Klassen.
- Die Mitte der jeweiligen Klasse  $j$  wird durch eine möglichst einfache (ganze) Zahl charakterisiert, die Klassenmitte  $x_j$  ( $j = 1..N$ ).
- Für jede Klasse  $j$  wird die absolute Häufigkeit  $k(x_j)$  der Merkmalswerte im Intervall  $(x_j - \Delta x/2; x_j + \Delta x/2)$  bestimmt.
- Die auf die Klassengrenzen entfallenden Merkmalswerte werden je zur Hälfte der rechten und der linken Klasse zugeordnet.

Mit der Einführung von Klassen der Breite  $\Delta x$  lässt sich auch eine entsprechende Interpretation für die schon oben eingeführte relative Häufigkeit  $h(x_j)$  angeben: Der Ausdruck  $h(x_j) \cdot \Delta x$  beschreibt die Wahrscheinlichkeit, ein Messergebnis im Intervall  $(x_j - \Delta x/2; x_j + \Delta x/2)$  zu finden. Eine allgemeingültige Vorschrift für die Wahl von Kriterien der Klasseneinteilung lässt sich allerdings nicht angeben: Plausibel ist sicherlich, dass die Klassenbreite nicht zu eng sein darf, weil sonst wegen der geringen Häufigkeiten die einzelnen Schwankungen viel zu groß werden. Andererseits darf die Klasseneinteilung aber auch nicht zu „grob“ sein, da sonst die in der Verteilung der Merkmalswerte enthaltene Information verloren gehen kann. *Es ist übrigens auch manchmal zweckmäßig, Klassen nicht äquidistant auf der Achse für den Merkmalswert einzuteilen!*

Ohne weitere Begründung werden für die Klassenzahl  $N$  und die Klassenbreite  $\Delta x$  empfohlen:

$$N \approx 5 \cdot \lg(n) \quad \text{und} \quad \Delta x = \frac{1}{N} \cdot (x_{\max} - x_{\min}) \quad (6)$$

Hier ist  $n$  der Stichprobenumfang;  $x_{\max}$  der größte und  $x_{\min}$  der kleinste Wert der Zufallsgröße. In der Praxis ergibt das bei „gebräuchlichem“ Stichprobenumfang zwischen 10 und 20 Klassen. Alternativ schlägt DIN 55302 folgende Klassenbildungen vor:

| Stichprobenumfang $n$ | Klassenzahl $N$ |
|-----------------------|-----------------|
| 100                   | 10              |
| 1000                  | 13              |
| 10000                 | 16              |

Generell ist hier noch anzumerken: Physikalische Größen sind sehr oft kontinuierlich verteilt. Die Mess- und Ablesegenauigkeit ist aber stets begrenzt und gibt damit die überhaupt mögliche feinste Klasseneinteilung vor. Damit würde man aber zwangsläufig oft gleiche Zahlenwerte ermitteln, eine etwas „gröbere“ Klasseneinteilung ist deshalb sinnvoller!

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

Zur zweckmäßigen Darstellung der Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe mit Klasseneinteilung wird die absolute oder relative Häufigkeit der Merkmalswerte innerhalb der Klasse  $x_j$  als Funktion des Merkmalswertes  $x$  aufgetragen: Die grafische Darstellung bezeichnet man als *Histogramm* (Abb. 7).

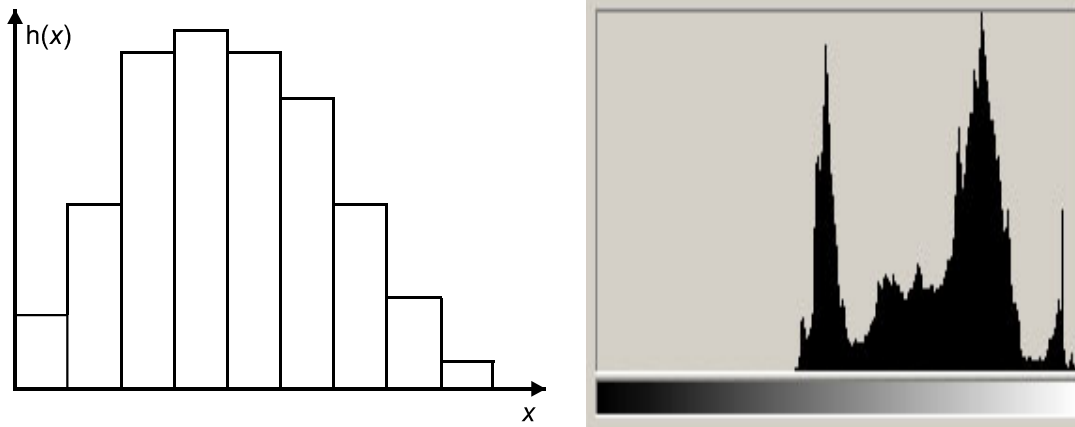


Abbildung 7: Histogramme (rechts Grauwertverteilung eines Fotos)

#### Anwendungsbeispiele:

- Ambitionierte Hobby-Fotografen werden Histogramme möglicherweise bereits kennen. In der digitalen Fotografie bzw. Bildverarbeitung versteht man darunter die Darstellung der statistischen Häufigkeit der Grauwerte bzw. Farbwerte in einem Bild. Das erlaubt eine Aussage über die vorkommenden Grau- bzw. Farbwerte sowie über Kontrastumfang und Helligkeit, so dass eine Optimierung der Exposition einer Fotografie bzw. gezielte (i.a. digitale) Nachbearbeitung ermöglicht wird. Die für derartige Histogramme meist schon fest vorgegebene Klassenzahl ist aus praktischen Gründen  $2^8 = 256$  (entspricht 8 Bit bzw. 1 Byte), was z.B. für die Darstellung von Grautönen als völlig ausreichend angesehen wird. So ist z.B. in Abb. 7 rechts ersichtlich, dass das zugehörige Foto „überbelichtet“ wurde.
- Angenommen, man untersucht die Verteilung der Baumgrößen in einem Waldschlag. Bei hinreichend großer Messgenauigkeit kommt jede Baumgröße nur einmal vor. Haben die Bäume im Mittel eine Größe zwischen 3 m und 5 m, wird man ein Klassenintervall von etwa 20 cm wählen und die Häufigkeit für jede Klasse bestimmen.

Eine weitere Form der Veranschaulichung ist die *Summenhäufigkeitsverteilung*  $H(x)$ , die aus den relativen Häufigkeiten  $h(x_j)$  wie folgt berechnet wird:

$$H(x_j) = \sum_{x_k \leq x_j} h(x_k) \quad (7)$$

Es ist also für die Summenhäufigkeit  $H(x)$  beim Merkmalswert  $x$  die Summation über alle relativen Häufigkeiten bis einschließlich der beim Merkmalswert  $x$  selbst zu bilden. Die Auftragung der Funktion  $H(x)$  über dem Merkmalswert  $x$  liefert eine „Treppenkurve“ (s. Abb. 8), wobei wegen der schon oben erwähnten Normierung der relativen Häufigkeit ein Wertevorrat  $0 \leq H(x) \leq 1$  gegeben ist.

$H(x)$  kann interpretiert werden als Wahrscheinlichkeit dafür, den Merkmalswert im Intervall  $(0;x)$  vorzufinden. Sind  $H(x_1)$  bzw.  $H(x_2)$  die Summenhäufigkeiten für die Merkmalswerte  $x_1$  bzw.  $x_2$ , so entspricht der Ausdruck  $H(x_1) - H(x_2)$  der Wahrscheinlichkeit, einen Merkmalswert im Intervall  $(x_1;x_2)$  vorzufinden.

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

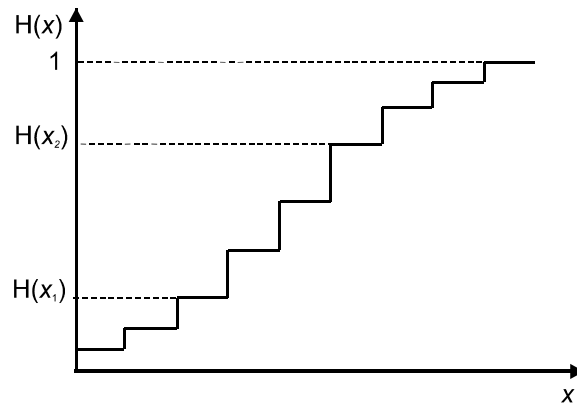


Abbildung 8: Summenhäufigkeitsverteilung

#### 3.3.3 Kontinuierliche Merkmalswerte

Bei den bisherigen Überlegungen zur Statistik wurde eine Stichprobe mit endlich vielen Elementen und diskret verteilten Merkmalswerten vorausgesetzt. Um sich von diesen beiden Einschränkungen zu befreien, d.h. von der Stichprobe zur Beschreibung der Grundgesamtheit und von diskreten zu stetig verteilten Merkmalswerten überzugehen, müssen folgende Grenzübergänge erfolgen: Umfang  $n \rightarrow \infty$ , Klassenzahl  $N \rightarrow \infty$  und Klassenbreite  $\Delta x \rightarrow dx$ .

Veranschaulichen kann man sich diesen Übergang, wenn auf der Ordinate die Häufigkeitsdichte  $h(x)/\Delta x$  aufgetragen wird, aus der durch  $N \rightarrow \infty$  und  $\Delta x \rightarrow 0$  schließlich aus dem Histogramm die kontinuierliche Funktion  $f(x)$  entsteht (Abb. 9). Da das gleichbedeutend mit dem Übergang von einer endlichen Stichprobe zur Grundgesamtheit ist, wird die Funktion  $f(x)$  als *Wahrscheinlichkeitsdichte* der Verteilung der Grundgesamtheit bezeichnet.

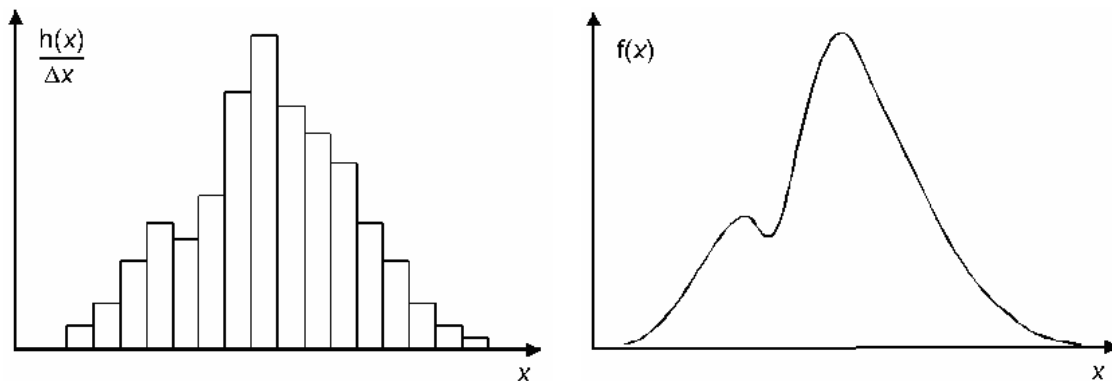


Abbildung 9: Übergang von der Häufigkeitsdichte zur Wahrscheinlichkeitsdichte

#### 3.3.4 Parameter von Zufallsverteilungen

Die Charakterisierung von Zufallsgrößen durch Häufigkeits-, Summenhäufigkeits- oder Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen ist zwar sehr anschaulich, aber für praktische Zwecke oft ungeeignet. Deshalb sucht man nach einer kleinen Zahl geeigneter Parameter, mit denen die Verteilung charakterisiert werden kann. Die wichtigsten Parameter zur Charakterisierung der Grundgesamtheit sind:

- der *Erwartungswert oder Mittelwert*  $\mu$ , der auch als erstes Moment einer Verteilungsfunktion bezeichnet wird und ihre Lage beschreibt

$$\text{für diskrete Zufallsgrößen mit } \mu = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot h(x_i) \quad (8a)$$

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

für stetige Zufallsgrößen mit  $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$  (8b)

- die *Streuung oder Varianz*  $\sigma^2$ , die auch zweites Moment der Verteilung genannt wird und ihre Breite beschreibt

für diskrete Zufallsgrößen mit  $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 \cdot h(x_i)$  (9a)

für stetige Zufallsgrößen mit  $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx$  (9b)

Anstelle der Varianz ist die *Standardabweichung*  $\sigma$  als positive Wurzel der Varianz gebräuchlicher, weil sie die gleiche Einheit wie das Messergebnis hat und damit unmittelbar eine Aussage über die Messunsicherheit erlaubt:

für diskrete Zufallsgrößen mit  $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 \cdot h(x_i)}$  (10a)

für stetige Zufallsgrößen mit  $\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx}$  (10b)

Aus einer Stichprobe, d. h. einer endlichen Zahl  $n$  von Elementen, lassen sich empirische Näherungswerte für den Mittelwert  $\bar{x}$  und die Standardabweichung  $s$  berechnen:

| Empirischer Parameter | Stichprobe der Elemente $x_i$ vom Umfang $n$                    | Stichprobe der Klassen $x_j$ mit absoluten Häufigkeiten $k(x_j)$             |
|-----------------------|---|--|
| Mittelwert            | $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ (11a)                  | $\bar{x} \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N x_j \cdot k(x_j)$ (11b)            |
| Standardabweichung    | $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ (12a) | $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2 \cdot k(x_j)}$ (12b) |

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die mathematische Beschreibung statistischer Vorgänge durch die Grundgesamtheit erfolgt, die durch Mittelwert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$  -gegebenenfalls auch weitere Parameter- charakterisiert wird. Praktisch ist man aber immer auf endliche Stichproben angewiesen, aus denen man Mittelwert  $\bar{x}$  und Standardabweichung  $s$  als empirische Näherungswerte für  $\mu$  und  $\sigma$  ermittelt. Mit wachsendem Umfang  $n$  der Stichprobe wird die Näherung immer besser erfüllt.

Für die weiteren Betrachtungen ergibt sich eine wichtige Schlussfolgerung:

**Wenn das Verteilungsgesetz der zufälligen Messabweichungen einer Messgröße bekannt ist, kann mit den empirischen Näherungen für Erwartungswert und Standardabweichungen ein Intervall angegeben werden, in dem mit einer bestimmten statistischen Sicherheit der "wahre Wert" erwartet werden kann.**

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

#### 3.4 Zufällige Messabweichungen

##### 3.4.1 Verteilung zufälliger Messabweichungen (Standardabweichung)

Zufällige Messabweichungen entstehen durch messtechnisch nicht erfassbare und nicht beeinflussbare Änderungen von Messgeräten, Messobjekten oder Umwelteinflüssen sowie durch subjektive Einflüsse des Beobachters. Da diese unterschiedlichen Ursachen unabhängig voneinander wirken, stellen die Messwerte  $x_i$  einer physikalischen Größe (systematische Abweichungen seien hier ausgeschlossen) statistisch gesehen eine Stichprobe aus der zufallsverteilten Grundgesamtheit aller Messwerte dieser Größe dar. Die Werte  $x_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) einer Messreihe sind also eine Stichprobe vom Umfang  $n$  und können in Form eines Histogramms (s. Abb. 10) dargestellt werden. Mittelwert  $\bar{x}$  und Standardabweichung  $s$  sind als empirische Näherungen für die Stichprobe bestimmbar gemäß (11) und (12).

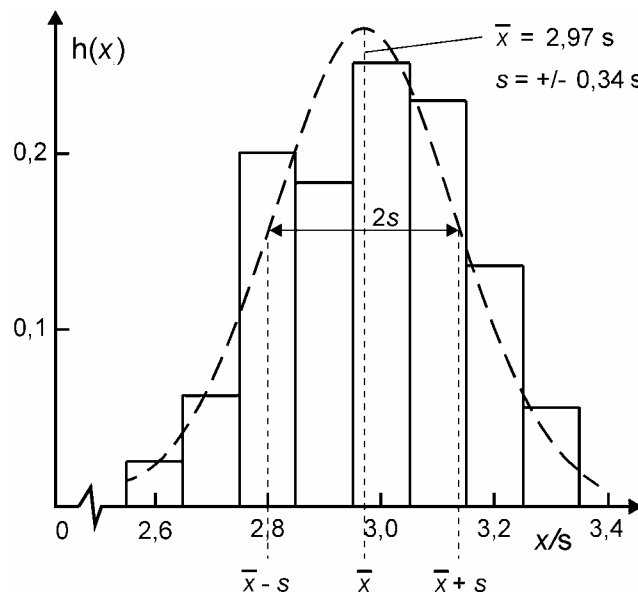


Abbildung 10: Verteilung von Messwerten

Aus der dargestellten Verteilung der Messwerte  $x_i$  lassen sich einige Charakteristika ablesen:

- Die Messwerte haben für den Mittelwert  $\bar{x}$  die größte Häufigkeit.
- Die Messwerte streuen symmetrisch um den Mittelwert  $\bar{x}$ .
- Kleine Abweichungen  $|x_i - \bar{x}|$  der Messwerte vom Mittelwert  $\bar{x}$  sind häufiger als größere.

Praktische Erfahrungen (kein mathematisch stringenter Beweis) zeigen, dass aufgrund der Unabhängigkeit der unterschiedlichen Ursachen für die zufälligen Messabweichungen voneinander, die Grundgesamtheit aller Messwerte einer physikalischen Größe  $x$  meistens (aber nicht immer!) durch die *Gauß- oder Normalverteilung* beschrieben werden kann. Die Gauß-Verteilung wird mathematisch dargestellt durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right). \quad (13)$$

Diese Funktion hat folgende Eigenschaften:

- Beim Wert  $\mu$  hat sie ein Maximum und ist bezüglich  $\mu$  symmetrisch.
- Für Werte  $|x - \mu| \rightarrow \infty$  konvergiert sie gegen Null.
- Für  $\mu \pm \sigma$  besitzt sie Wendepunkte und ist schmal für kleine  $\sigma$ .



### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

- Sie ist mit  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$  normiert.

Diese Eigenschaften der Normalverteilung sind aber gerade die oben genannten Charakteristika, wie sie für die zufälligen Messabweichungen aus dem Histogramm für die Messwerte (Abb. 10) abgeleitet wurden. Die Größen  $\bar{x}$  und  $s$  der Stichprobe entsprechen dabei den Größen  $\mu$  und  $\sigma$  der Grundgesamtheit. Folglich kann man feststellen:

**Die Gaußsche Normalverteilung beschreibt näherungsweise die Statistik der zufälligen Messabweichungen für eine größere Anzahl von Einzelmessungen.**

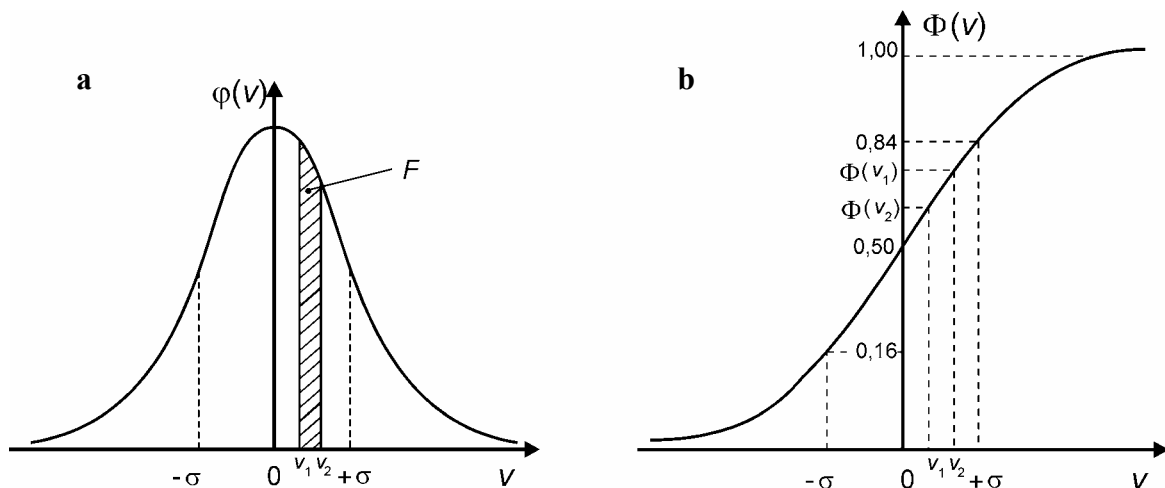
Die Messwerte  $x_i$  jeder physikalischen Größe sind zufallsbedingt, sie streuen um den "wahren" Wert (Erwartungswert)  $\mu$  der Grundgesamtheit, der nicht bekannt ist und nicht bestimmt werden kann. Die "wahren" Messabweichungen

$$v_i^w = x_i - \mu \quad (14)$$

stellen, ebenso wie die Messwerte, ihrerseits Zufallsgrößen dar, die ebenfalls gemäß

$$\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{v^2}{2\cdot\sigma^2}\right) \quad (15)$$

normalverteilt sind. Diese Funktion (s. Abb. 11a) hat ihr Maximum bei  $v = 0$  und Wendepunkte bei  $-\sigma$  und  $+\sigma$ .



**Abbildung 11: Gaußsche Normalverteilung (a) und Fehlerfunktion (b)**

Experimentell zugänglich ist immer nur eine endliche Zahl von Einzelmessungen, also nur eine Stichprobe der Grundgesamtheit. Anstelle der „wahren“ bildet man die „scheinbaren“ Messabweichungen

$$v_i = x_i - \bar{x} \quad (16)$$

und berechnet als charakteristisches Maß für die zufälligen Messabweichungen die empirische Standardabweichung

$$s = \pm \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n v_i^2} = \pm \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (17)$$

Sie kennzeichnet die Streuung der Messwerte, d. h. die Genauigkeit einer gegebenen Messmethode, und wird auch als mittlere quadratische Abweichung der Einzelmessung bezeichnet. Im Praktikum wird diese *empirische* Standardabweichung  $s$  meist kurz *Standardabweichung* genannt. Das Integral

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNGSICHERHEITEN

$$\Phi(v) = \int_{-\infty}^v \varphi(v') dv' \quad (18)$$

wird als *Gaußsche Fehlerfunktion* (Abb. 11b) bezeichnet. Das Integral (18) ist *nicht geschlossen integrierbar*, seine Werte sind aber in einschlägigen Tabellenwerken angegeben. Da  $\varphi(v)dv$  als Wahrscheinlichkeit dafür interpretiert werden kann, dass eine Messabweichung im Intervall  $(v; v+dv)$  liegt, liefert entsprechend der Ausdruck

$$\Phi(v_2) - \Phi(v_1) = \int_{v_1}^{v_2} \varphi(v') dv' \quad (19)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei Einzelmessungen Messabweichungen im Intervall  $v_1$  bis  $v_2$  auftreten, das entspricht der schraffierten Fläche F in Abb. 11a.

Mit Hilfe der Fehlerfunktion laut Gl. (19) kann man nun die *statistische Sicherheit* bzw. Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, dass ein einzelner Messwert in einem bestimmten Intervall um den Mittelwert  $\mu$  (bzw. empirisch  $\bar{x}$ ) liegt (s. Tab. 12).

**Tabelle 12: Statistische Sicherheiten für gegebene Intervalle**

| Intervall         | Statistische Sicherheit |
|-------------------|-------------------------|
| $\mu \pm \sigma$  | 68,3 %                  |
| $\mu \pm 2\sigma$ | 95,4 %                  |
| $\mu \pm 3\sigma$ | 99,7 %                  |

Diese statistische Sicherheit gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit im Wiederholungsfall der Messwert in das entsprechende Intervall fallen wird. Die angegebenen Werte gelten streng nur für die Grundgesamtheit, setzen also zur Bestimmung von  $\mu$  und  $\sigma$  eine sehr große Zahl von Messwerten voraus.

Normalerweise wird man aber die empirischen Parameter  $\bar{x}$  und  $s$  mit Hilfe eines geringeren Stichprobenumfanges bestimmen. Das hat dann eine kleinere statistische Sicherheit zur Folge. Um eine vorgegebene bzw. geforderte statistische Sicherheit beibehalten zu können, muss das Intervall entsprechend vergrößert werden. Um welchen Faktor das Intervall in Abhängigkeit von der vorgegebenen statistischen Sicherheit für den Umfang einer Stichprobe vergrößert werden muss, gibt der so genannte *Student-Faktor* an.

Für die Grundgesamtheit, d. h. eine sehr große Zahl von Messwerten, hat der Student-Faktor  $t$ , entsprechend der gewählten statistischen Sicherheit, die Werte 1, 2 bzw. 3 (s. Tab. 13). Für eine Stichprobe ist  $t$  außer von der gewählten statistischen Sicherheit auch noch von der Anzahl  $n$  der Messwerte abhängig.

**Tabelle 13: Student-Faktor für gegebenen Stichprobenumfang**

| Stichprobenumfang<br>n | Student-Faktor t für statistische Sicherheit von |        |        |
|------------------------|--|--------|--------|
|                        | 68,3 %   | 95,4 % | 99,7 % |
| 3                      | 1,32   | 4,30   | 19,21  |
| 5                      | 1,15   | 2,78   | 6,62   |
| 6                      | 1,11   | 2,57   | 5,51   |
| 10                     | 1,06   | 2,26   | 4,03   |
| 100                    | 1,00   | 2,00   | 3,04   |

Für alle im Praktikum vorkommenden Fälle kann  $t \approx 1$  gewählt werden, sofern für den Stichprobenumfang  $n \geq 6$  gilt: In der Physik wird meist nur mit einer statistischen Sicherheit von

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

68,3 % gerechnet. Teilweise wird aber in anderen Bereichen, insbesondere in sicherheitsrelevanten Bereichen der Technik, eine *deutlich* höhere statistische Sicherheit verlangt.

#### 3.4.2 Vertrauensbereich

Neben der Genauigkeit der Messmethode, die sich in der Standardabweichung  $s$  ausdrückt, ist für die Bestimmung der zufälligen Messabweichungen  $e_z$  einer Messgröße die Zuverlässigkeit des Mittelwertes  $\bar{x}$  von besonderem Interesse: Er ist das Ergebnis vieler Einzelmessungen, seine mittlere quadratische Abweichung wird als *Vertrauensbereich* (mathematisch meist als *Konfidenzintervall*) bezeichnet und nach

$$\bar{s} = \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = \pm t \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}} \quad (20)$$

berechnet. Der Vertrauensbereich gibt das Intervall an, in dem der „wahre“ Wert mit einer bestimmten statistischen Sicherheit zu erwarten ist. Die Bedeutung des Student-Faktors  $t$  wurde schon im vorigen Abschnitt erläutert. Im Praktikum wird für  $n \geq 6$  generell mit  $t = 1$  gerechnet. Der hier auftretende Faktor  $1/\sqrt{n}$  wird noch im Abschnitt 3.6 begründet.

**Der Vertrauensbereich  $\bar{s}$  ist der Beitrag der zufälligen Messabweichungen  $e_z$  zur gesamten Messunsicherheit unter Voraussetzung eines Stichprobenumfangs  $n \geq 6$ .**

Für den Fall  $n < 6$  ist für den Anteil der zufälligen Messabweichungen an der Messunsicherheit nur eine Abschätzung möglich (vgl. Abschnitt 3.5), da in diesem Fall die statistischen Voraussetzungen für die Berechnung des Vertrauensbereiches nicht hinreichend erfüllt sind.

#### 3.4.3 Methode der kleinsten Quadrate

Eine andere Begründung für den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung zur Kennzeichnung der Stichprobe liefert die von C. F. Gauß entwickelte *Methode der kleinsten Quadrate*.

Für eine Stichprobe mit den Elementen  $x_i$  wird ein „Bestwert“, der Mittelwert  $\bar{x}$ , genau so definiert, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen vom ihm ein Minimum wird:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \text{Minimum} \quad (21)$$

Das Minimum erhält man mit dem üblichen Ansatz für die 1. Ableitung:

$$\frac{d}{d\bar{x}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = -2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0 \text{ und damit } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (22)$$

Ganz offensichtlich liefert also auch die Gaußsche Minimalbedingung den arithmetischen Mittelwert als "besten" Wert zur Kennzeichnung der Stichprobe!

Als Maß für die Streuung kann man auch den Mittelwert der scheinbaren Abweichungen  $v_i = x_i - \bar{x}$  betrachten und erhält folgendes Ergebnis:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - n \cdot \bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} = 0 \quad (23)$$

**Die Summe der scheinbaren Abweichungen verschwindet.**

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

Das bedeutet aber, dass die Summe der scheinbaren Abweichungen offenbar ein ungeeignetes Maß für die Streuung ist. Daher wird zweckmäßiger über die Summe ihrer Quadrate gemittelt und man erhält schließlich die Standardabweichung  $s$  der Verteilung mit

$$s = \sqrt{\frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Der Wert  $(n-1)$  im Nenner ergibt sich, weil durch die Festlegung von  $\bar{x}$  (s. Gleichung (22)) nur noch  $(n - 1)$  unabhängige Werte existieren.

#### 3.5 Messergebnisse einer direkt gemessenen Größe

Nach der ausführlichen Diskussion der systematischen und zufälligen Messabweichungen werden für eine direkt gemessene Größe nun die einzelnen Schritte vom Messvorgang bis zum vollständigen Messergebnis zusammengestellt (s. Abb. 12) und an einem Rechenbeispiel (s. Tab. 14) erläutert.

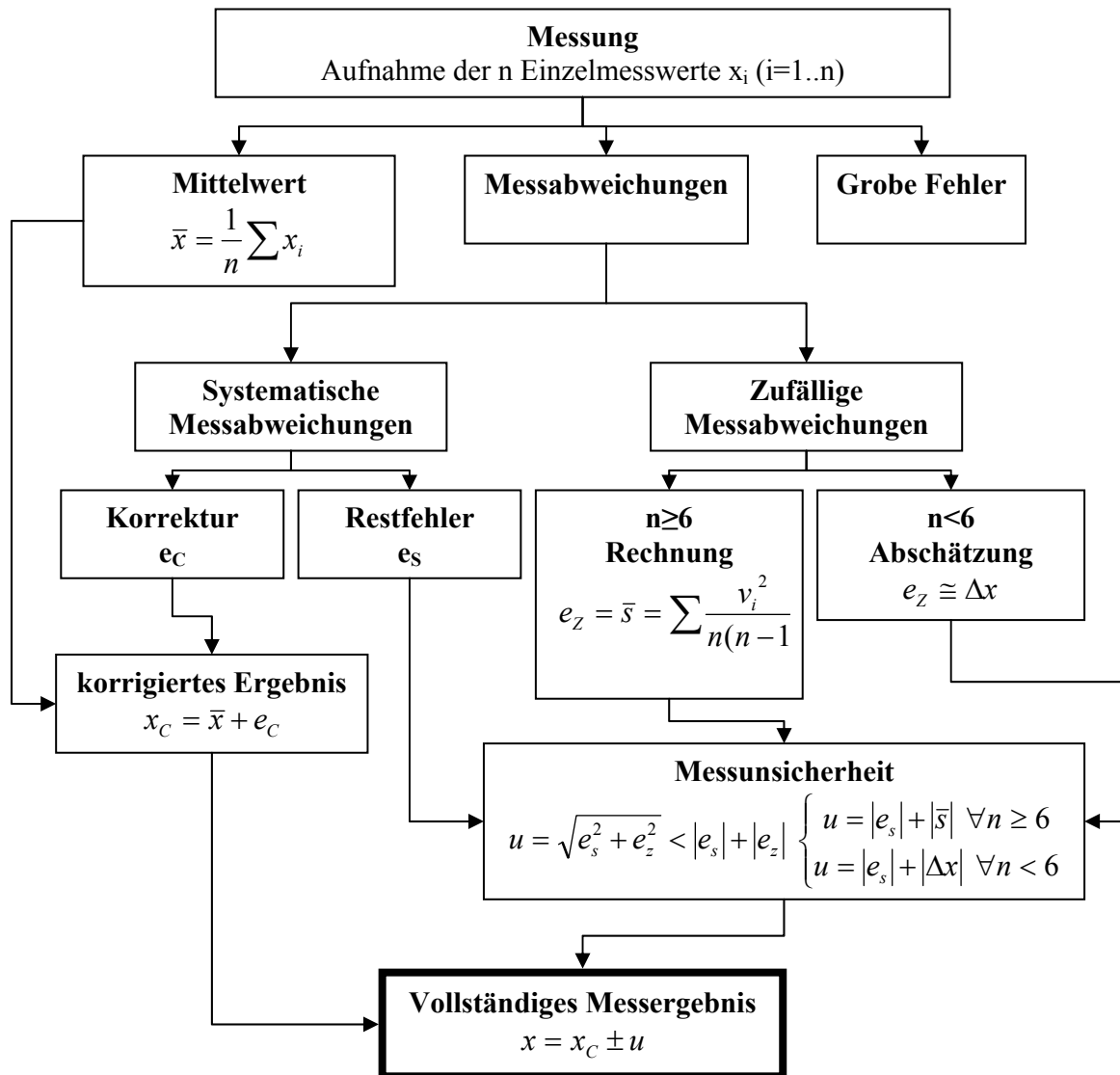


Abbildung 12: Schema zur Ermittlung des vollständigen Messergebnisses

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

#### 1. Einzelergebnisse und Mittelwert

Beim Messvorgang erfolgt die Bestimmung einzelner Messwerte  $x_i$  ( $i=1\dots n$ ) einer physikalischen Größe, die eine Stichprobe aus der Grundgesamtheit der Messwerte dieser Größe darstellen. Aus diesen Messwerten wird der arithmetische Mittelwert  $\bar{x}$  bestimmt.

Das Rechenbeispiel zeigt die Messwerte  $T_i$  für die Periodendauer eines Fadenpendels (vgl. Versuch F3), gemessen mit einer elektronisch gesteuerten Lichtschranke. Der Mittelwert  $\bar{T}$  wird auf eine Stelle genauer berechnet als die Messwerte.

#### 2. Korrektur des Mittelwertes

Unterliegen die Messwerte durch äußere Einflüsse o. ä. einer systematischen Messabweichung, die nach Größe und Richtung berechenbar ist, ermittelt man die Korrekturgröße  $e_c$ . Aus dem Mittelwert  $\bar{x}$  und der Korrekturgröße  $e_c$  wird das korrigierte Messergebnis  $x_c$  mit Hilfe von  $x_c = \bar{x} + e_c$  bestimmt.

Im Rechenbeispiel erfolgt die Messung der Periodendauer des Fadenpendels bei einer Amplitude von  $\varphi = 8^\circ$ . Da die Periodendauer  $T$  von der Amplitude  $\varphi$  abhängig ist, muss aus dem Mittelwert  $\bar{T}$  der gemessenen Periodendauer die amplitudenunabhängige Periodendauer  $T_0$  ermittelt werden. Für die Periodendauer gilt gemäß Gl. (3)

$$\bar{T} = T_0 \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{4} \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{9}{64} \cdot \sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \dots \right\}, \text{ so dass in erster Näherung}$$

$$\bar{T} \cong T_0 \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{4} \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right\} \text{ und } T_0 \cong \bar{T} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{4} \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right\}^{-1} \text{ bzw. } T_0 \cong \bar{T} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{4} \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right\}$$

folgt. Damit wird die Korrektur zu  $e_c \cong -\frac{1}{4} \cdot \bar{T} \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -2,9504 \text{ s} \cdot 0,0012 = -3,6 \text{ ms}$ .

#### 3. Bestimmung der systematischen Restabweichung

Die nichtkorrigierbaren systematischen Messabweichungen (systematische Restfehler) werden wesentlich von den durch die Bauart und die technische Präzision bedingten Fehlern der Messgeräte bestimmt. Für die wichtigsten Messgeräte im Praktikum sind die systematischen Restfehler im vorliegenden Skript zusammengestellt (s. Abschnitt 3.2.4), ansonsten sind sie aus der Gerätebeschreibung zu entnehmen. Ist am Versuchsplatz kein systematischer Restfehler angegeben, dann kann er gegenüber den zu erwartenden zufälligen Messabweichungen vernachlässigt werden.

Im Rechenbeispiel zur Bestimmung der Periodendauer des Fadenpendels sei der systematische Restfehler der Zeitmessung mit der Lichtschranke zu  $e_s = 1 \text{ ms}$  gegeben.

#### 4. Bestimmung der zufälligen Messabweichung

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- Ist die Zahl der Messergebnisse  $n > 6$ , dann sind die Beziehungen gemäß Abschnitt 3.4 anwendbar. Als entscheidende Größe zur Kennzeichnung des Anteils zufälliger Messabweichungen wird der Vertrauensbereich des Mittelwertes berechnet und verwendet. Im Rechenbeispiel ist ein zweckmäßiges Schema angegeben, wie man aus den Einzelmesswerten die Quadratsumme der scheinbaren Messabweichungen berechnet.
- Ist die Zahl der Messergebnisse  $n < 6$ , wird ein Größtfehler  $\Delta x$  aus der Ablese- bzw. Anzeigegenauigkeit der Skale bzw. der digitalen Anzeige des Messgerätes abgeschätzt (s. Abschnitt 3.2). In der Regel wird *mindestens* mit einer Unsicherheit der Ablesung von  $\pm 1/2$  Skalenteil bzw. der Anzeige von  $\pm 1$  LSD bzw. Digit gerechnet.

#### 5. Bestimmung der Messunsicherheit

Die unabhängig ermittelten systematischen und zufälligen Messabweichungen bestimmen die Messunsicherheit  $u$  des Endergebnisses. Da die zufälligen und die systematischen Abweichungen unabhängig voneinander sind, d.h. statistisch gesprochen nicht miteinander korrelieren, addieren sie sich quadratisch (pythagoreisch), d.h. die Messunsicherheit ergibt sich zu

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

$$u = \sqrt{e_s^2 + e_z^2} < |e_s| + |e_z|. \quad (24)$$

Bei einer geringen Zahl von Messwerten (wie oft im Praktikum) ist es für eine Abschätzung statthaft, die pythagoreische Summe durch die größere Summe aus den Beträgen von zufälligen und systematischen Abweichungen zu ersetzen. Im konkreten Rechenbeispiel bedeutet das:

$$u = \sqrt{e_s^2 + e_z^2} = \sqrt{(1ms)^2 + (0,3ms)^2} \cong 1ms \text{ bzw. } u < |e_s| + |e_z| = 1ms + 0,3ms \cong 1ms$$

#### 6. Vollständiges Messergebnis

Das vollständige Messergebnis für die Messgröße  $x$  ergibt sich somit in der Form

$$x = \bar{x} + e_c \pm u = x_c \pm u \text{ mit der Messunsicherheit } u = \sqrt{e_s^2 + e_z^2} \approx |e_s| + |e_z|. \quad (25)$$

**Tabelle 14: Rechenbeispiel für die Auswertung im Versuch zum Fadenpendel**

| <i>(1) Einzelergebnisse</i>  |                      |                      |                                      |
|--|----------------------|----------------------|--------------------------------------|
| $i$  | $T_i$ (s)            | $v_i$ ( $10^{-4}$ s) | $v_i^2$ ( $10^{-8}$ s <sup>2</sup> ) |
| 1  | 2,949                | -14                  | 196                                  |
| 2  | 2,951                | +6                   | 36                                   |
| 3  | 2,950                | -4                   | 16                                   |
| 4  | 2,952                | +16                  | 256                                  |
| 5  | 2,950                | -4                   | 16                                   |
| 6  | 2,950                | -4                   | 16                                   |
| 7  | 2,951                | +6                   | 36                                   |
| 8  | 2,950                | -4                   | 16                                   |
| 9  | 2,951                | +6                   | 36                                   |
| 10   | 2,950                | -4                   | 16                                   |
|  | $\sum T_i = 29,504s$ | $\sum v_i = 0$       | $\sum v_i^2 = 640 \cdot 10^{-8} s^2$ |
| Mittelwert: $\bar{T} = \frac{1}{n} \sum T_i = 2,9504s$   |                      |                      |                                      |
| <i>(2) Korrektur</i>   |                      |                      |                                      |
| $e_c \cong -\frac{1}{4} \cdot \bar{T} \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -2,9504s \cdot 0,0012 = -3,6ms$   |                      |                      |                                      |
| $T_c = \bar{T} + e_c = (2,9504 - 0,0036)s = 2,9468s$   |                      |                      |                                      |
| <i>(3) systematischer Restfehler</i>   |                      |                      |                                      |
| $e_s = 1ms$  |                      |                      |                                      |
| <i>(4) Zufällige Messabweichungen</i>  |                      |                      |                                      |
| $e_z = \bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{v_i^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{640 \cdot 10^{-8} s^2}{90}} = 0,3ms$ |                      |                      |                                      |
| <i>(5) Gesamte Messunsicherheit</i>  |                      |                      |                                      |
| $u \cong  e_s  +  e_z  = 1ms + 0,3ms = 1,3ms$  |                      |                      |                                      |
| <i>(6) Vollständiges Messergebnis (Endergebnis)</i>  |                      |                      |                                      |
| $T = (2,9468 \pm 0,0013)s \cong (2,947 \pm 0,001)s$  |                      |                      |                                      |

In der Praxis muss man nicht unbedingt wie im Rechenbeispiel eine Tabelle anfertigen:

- Wissenschaftliche Taschenrechner haben inzwischen meistens fest programmierte Statistikprogramme, die nach Eingabe der Messwerte  $x_i$  direkt den Mittelwert  $\bar{x}$  und die Standard-

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSIChERHEITEN

abweichung  $s$  ausgeben können. Allerdings weichen verschiedene Taschenrechnermodelle geringfügig in der Handhabung voneinander ab, so dass ein genaues Studium der Gebrauchsanweisung empfohlen wird. Dabei ist besonders zu beachten, ob die Standardabweichung  $s$  auf  $n$  oder auf  $n - 1$  bezogen ist.

- Alternativ (und besonders effizient) kann die statistische Auswertung auch mit einem üblichen Tabellenkalkulationsprogramm auf dem PC erfolgen, die notwendigen statistischen Funktionen für Mittelwert und Standardabweichung gehören inzwischen zur Standardausstattung derartiger Software.

Bei der Nutzung derartiger Techniken sollte aber unbedingt beachtet werden, dass bei der Angabe von Ergebnissen die technisch mögliche und damit sehr große Stellenzahl immer auf eine *messtechnisch begründet sinnvolle Stellenzahl* reduziert, d.h. sachgerecht gerundet, werden muss.

Man halte sich in diesem Zusammenhang immer das folgende treffende Zitat vor Augen: „*In nichts zeigt sich der Mangel an mathematischer Ausbildung mehr als an einer übertrieben genauen Rechnung.*“ (C. F. Gauß)

Als einfachen „Faustregeln“ für den Gebrauch im Praktikum kann man sich an Folgendem orientieren:

**Die Angabe von Messunsicherheiten kann im Praktikum meist auf eine (nur sehr selten auch zwei) signifikante Ziffer(n) gerundet werden.**  
**Bei jeder Ergebnisangabe sollte die letzte signifikante Stelle des Ergebnisses an der gleichen Dezimalstelle stehen wie die letzte signifikante Ziffer der Messunsicherheit.**  
**Der korrigierte Messwert wird nicht genauer angegeben, als es die Messunsicherheit zulässt: Die letzte(n) Stelle(n) des vollständigen Messergebnisses steht(stehen) immer unter dem Einfluss der Messunsicherheit!**

#### Anwendungsbeispiele:

| sachgerechte Ergebnisangabe      | nicht sachgerechte Ergebnisangabe  |
|----------------------------------|------------------------------------|
| $s = (6,33 \pm 0,06) \text{ m}$  | $s = (6,3278 \pm 0,057) \text{ m}$ |
| $I = (350 \pm 90) \text{ mA}$    | $I = (346 \pm 85) \text{ mA}$      |
| $U = (36,00 \pm 0,04) \text{ V}$ | $U = (36 \pm 0,04) \text{ V}$      |
| $m = (15,4 \pm 0,9) \text{ kg}$  | $m = (15,4 \pm 0,94) \text{ kg}$   |
| $m = 15,3 \text{ kg} \pm 6 \%$   | $m = 15,26 \text{ kg} \pm 5,89 \%$ |

Diese Regeln gelten so strikt für Endergebnisse. Ob dabei u.U. auch zwei signifikante Ziffern für Messunsicherheiten berücksichtigt werden müssen, ist nach (begründeten) Einzelerfordernissen zweckmäßig zu entscheiden. Bei Zwischenrechnungen und -ergebnissen müssen praktisch meist mehr Stellen berücksichtigt werden, weil sonst durch auftretende *Rundungsfehler* (d.h. Überlagerung mehrerer gerundeter Zwischenergebnisse) sehr leicht zu große oder zu kleine Messunsicherheiten des Endergebnisses entstehen können.

Wie die angeführten Beispiele zeigen, müssen für das korrigierte Messergebnis  $x_c$  immer *Zahlenwert und Einheit* angegeben werden. Die Messunsicherheit kann entsprechend den üblichen Konventionen entweder durch Zahlenwert und Einheit als absolute oder als

prozentuale Größe durch  $u_{pr} = \frac{u}{x_c} \cdot 100\%$  beschrieben werden.

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

#### 3.6 Indirekte Ermittlung einer Messgröße

Bei den meisten physikalischen Messungen ergibt sich eine experimentell zu bestimmende Ergebnisgröße  $F$  nicht direkt, sondern aus einem funktionalen Zusammenhang (Modell)  $F = F(x, y, \dots)$  zwischen verschiedenen direkt messbaren Eingangsgrößen  $x, y, \dots$

##### Beispiel:

Das Volumen  $V$  eines Zylinders mit der Höhe  $h$  und dem Durchmesser  $d$ , die jeweils für sich gemessen werden, berechnet sich aus  $V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h$ .

Für die *Berechnung des wahrscheinlichsten Wertes*  $\bar{F}$  für den funktionalen Zusammenhang  $F$  gilt ganz allgemein (Beweis s. Abschnitt 3.6.2): Ist  $F = F(x, y, \dots)$  eine Ergebnisgröße, die sich aus einzelnen direkt gemessenen Eingangsgrößen ( $x, y, \dots$ ) berechnet und sind jeweils die Mittelwerte ( $\bar{x}, \bar{y}, \dots$ ) bestimmt worden, so erhält man  $\bar{F}$ , wenn man die Werte  $\bar{x}, \bar{y}, \dots$  in die Formel zur Berechnung von  $F$  einsetzt wie in

$$\bar{F} = F(\bar{x}, \bar{y}, \dots) \quad (26)$$

Offensichtlich wird eine „fehlerbehaftete“ Bestimmung der Eingangsgrößen (ausgedrückt durch ihre jeweiligen Messunsicherheiten) auch die Ausgangs- bzw. Ergebnisgröße so beeinflussen, dass ihr eine Unsicherheit anhaftet (*Fortpflanzung von Unsicherheiten*, oft noch als *Fehlerfortpflanzung* bezeichnet). Daher ist es von prinzipiellem Interesse, die Auswirkungen der einzelnen Messunsicherheiten auf das Ergebnis und seine Unsicherheit zu bestimmen.

Sofern die Mittelwerte und Messunsicherheiten der Eingangsgrößen tatsächlich bekannt sind, lässt sich daraus auch die Unsicherheit  $u_F$  einer indirekt ermittelten Ergebnisgröße  $F(x, y, \dots)$  bestimmen. Für die Bestimmung der Unsicherheit  $u_F$  ist dabei fallweise zu unterscheiden, ob die direkt gemessenen Eingangsgrößen  $x, y, \dots$  als *unkorrelierte* oder *korrelierte* Messgrößen vorliegen. Die Behandlung erfolgt jeweils getrennt in den folgenden Abschnitten.

Zum Begriff der Korrelation sind wegen oft auftretender Missverständnisse einige grundsätzliche und klärende Anmerkungen notwendig:

- Als *Korrelation im mathematisch-statistischen Sinne* wird eine Beziehung zwischen zwei oder mehr statistischen Variablen bezeichnet. Zur Beschreibung einer statistischen Korrelation lassen sich u.a. Korrelationskoeffizienten (z.B. nach Pearson), Korrelationsintegrale oder Korrelationsfunktionen (z.B. in der Signaltheorie) verwenden.
- Auch wenn eine Korrelation besteht, ist damit *noch nicht* gesagt, ob eine Größe die andere kausal beeinflusst, ob beide von einer dritten Größe kausal abhängen oder ob sich überhaupt ein Kausalzusammenhang folgern lässt. Eine direkte Kausalität kann auch *gänzlich* fehlen; es kann z.B. kausal auch über eine dritte Größe ein Zusammenhang bestehen (*Scheinkorrelation*).
- Häufig benutzt man zu Recht die Korrelation, um einen *Hinweis* darauf zu bekommen, ob zwei statistische Größen ursächlich miteinander zusammenhängen. Das zeigt sich insbesondere dann eindeutig, wenn beide Größen durch eine mathematische Beziehung verknüpft sind und/oder eine der Größen nur von der anderen Größe abhängt.
- Oft werden aber (z.T. auch in wissenschaftlichen Publikationen) aus Korrelationen direkte Kausalitäten und/oder Kausalitätsrichtungen abgeleitet, obwohl das so nicht zutrifft. Um Kausalitäten und Kausalitätsrichtungen exakt bestimmen zu können, sind grundsätzlich Experimente erforderlich, bei denen eine Größe festgelegt und die andere gemessen wird, um eine *Regressionsanalyse* durchführen zu können.



### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

#### 3.6.1 Fortpflanzung von Unsicherheiten unkorrelierter Größen

Ersetzt man die Mittelwerte  $\bar{x}, \bar{y}$  usw. der Eingangsgrößen in Gl. (26) durch geringfügig variierte Werte  $\bar{x} + \delta x, \bar{y} + \delta y$  usw., so erwartet man anstelle von  $\bar{F}$  ein geringfügig geändertes  $\bar{F} + \delta F$  mit

$$\delta F = F(\bar{x} + \delta x, \bar{y} + \delta y, \dots) - F(\bar{x}, \bar{y}, \dots). \quad (27)$$

Da die Variationen  $\delta$  der Variablen sehr klein sind (d.h.  $\delta x \ll \bar{x}, \delta y \ll \bar{y}$  usw.), kann als Näherung für  $F(\bar{x} + \delta x, \bar{y} + \delta y, \dots)$  mit einer Taylorreihenentwicklung und Berücksichtigung nur der linearen Glieder

$$F(\bar{x} + \delta x, \bar{y} + \delta y, \dots) \approx F(\bar{x}, \bar{y}, \dots) + \frac{\partial F(x, y, \dots)}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial F(x, y, \dots)}{\partial y} \cdot \delta y + \dots$$

in Gl.(27) eingesetzt werden. Man erhält dabei

$$\delta F \approx \frac{\partial F(x, y, \dots)}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial F(x, y, \dots)}{\partial y} \cdot \delta y + \dots$$

als Näherung für die Variation der Ergebnisgröße. Beachtet man, dass die jeweiligen partiellen Ableitungen  $\frac{\partial F(x, y, \dots)}{\partial x}, \frac{\partial F(x, y, \dots)}{\partial y}$  usw. beliebige Vorzeichen haben können und übernimmt

das Ergebnis für die „Fortpflanzung“ in Gleichung (27) näherungsweise für die Messunsicherheiten, so erhält man als Abschätzung für die maximale Unsicherheit (*Größtfehlerabschätzung*) von F das Ergebnis

$$u_F \approx \pm \left\{ \left| \frac{\partial F(x, y, \dots)}{\partial x} \cdot u_x \right| + \left| \frac{\partial F(x, y, \dots)}{\partial y} \cdot u_y \right| + \dots \right\}. \quad (28)$$

Durch Übergang zur pythagoreischen Addition gelangt man zum Gaußschen Gesetz der *Fortpflanzung der Unsicherheiten unkorrelierter Eingangsgrößen auf die Ergebnisgröße*:

$$u_F = \pm \sqrt{\left( \frac{\partial F(x, y, \dots)}{\partial x} \cdot u_x \right)^2 + \left( \frac{\partial F(x, y, \dots)}{\partial y} \cdot u_y \right)^2 + \dots} \quad (29)$$

Der Grundgedanke dieser pythagoreischen Addition nach Gauß ist die (statistische) Unabhängigkeit der Messunsicherheiten für die einzelnen Eingangsgrößen, so dass grundsätzlich eine teilweise gegenseitige Kompensation der Abweichungen möglich ist (vollständige Ableitung s. Abschnitt 3.6.2).

#### Beispiel:

Es wird der Vertrauensbereich des arithmetischen Mittelwertes  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  betrachtet. Innerhalb einer Messreihe ist jeder einzelne Messwert  $x_i$  mit der Standardabweichung  $s$  behaftet:

$x_i \pm s \quad \forall i = 1..n$ . Zur Berechnung des Vertrauensbereiches  $\bar{s}$  muss das Fortpflanzungsgesetz auf die Berechnung des arithmetischen Mittelwertes angewendet werden, so dass

$$\bar{s} = \pm \sqrt{\left(\frac{s}{n}\right)^2 + \left(\frac{s}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{s}{n}\right)^2} = \pm \sqrt{n \cdot \left(\frac{s}{n}\right)^2} = \pm \frac{s}{\sqrt{n}}$$

folgt, womit der Faktor  $1/\sqrt{n}$  in der Beziehung für den Vertrauensbereich (s. Gl. (20)) nunmehr verständlich wird.

In vielen praktischen Fällen kann die strenge Formel nach Gl. (29) für die Fortpflanzung der Unsicherheiten durch die etwas einfachere Beziehung für die Abschätzung Gl. (28) ersetzt werden, in der eine mögliche teilweise Kompensation von Messabweichungen der einzelnen Größen nicht berücksichtigt wird.

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

Die direkte Anwendung von (28) bzw. (29) ist meist relativ aufwändig. Die Rechnung wird oft deutlich leichter, wenn sich die Funktion  $F = F(x,y,\dots)$  auf eine der folgenden drei Standardformeln oder entsprechende Kombinationen davon zurückführen lässt:

|   |   |                |
|---|---|----------------|
| <i>Additive Funktionen</i>  | $F(x,y) = a \cdot x \pm b \cdot y$  | Konstanten a,b |
| $u_F = \pm \left( a \cdot u_x + b \cdot u_y \right)$  | Die mit den Konstanten multiplizierten absoluten Messunsicherheiten werden addiert. | (30)           |
| <i>Multiplikative Funktionen</i>  | $F(x,y) = a \cdot xyz$ oder $F(x,y) = \frac{b \cdot xy}{z}$                         | Konstanten a,b |
| $\frac{u_F}{F} = \pm \left( \left  \frac{u_x}{x} \right  + \left  \frac{u_y}{y} \right  + \left  \frac{u_z}{z} \right  \right)$       | Die relativen Messunsicherheiten werden addiert.                                    | (31)           |
| <i>Multiplikative Funktionen mit Potenzen</i>   | $F(x,y) = c \cdot x^l \cdot y^m \cdot z^{-n}$                                       | Konstante c    |
| $\frac{u_F}{F} = \pm \left( \left  l \frac{u_x}{x} \right  + \left  m \frac{u_y}{y} \right  + \left  n \frac{u_z}{z} \right  \right)$ | Die nach den Potenzen gewichteten relativen Messunsicherheiten werden addiert.      | (32)           |

Die Beziehungen (30-32) lassen sich als Spezialfälle aus (28) einfach ableiten, indem für F jeweils die Ausdrücke in der Tabelle eingesetzt werden. In völlig analoger Weise kann man Gleichung (29) verwenden, um entsprechende Ausdrücke für den Fall der (etwas exakteren) pythagoreischen Addition von Unsicherheiten zu gewinnen. In der Tabelle sind dazu die Beträge in den Ausdrücken jeweils lediglich durch die entsprechenden Quadrate zu ersetzen und aus den Summen die Quadratwurzeln zu ziehen, um die resultierende Unsicherheit  $u_F$  für die Ausgangsgröße F zu erhalten.

#### Anwendungsbeispiel zur Abschätzung der maximalen Unsicherheit einer Ausgangsgröße (Größtfehlerabschätzung):

Der Durchmesser d und die Höhe h eines Zylinders wurden mit dem Ziel der Volumenbestimmung gemessen. Die jeweiligen Messergebnisse für Durchmesser und Höhe seien

$$d = \bar{d} \pm u_d = (17,0 \pm 0,2) \text{ mm} \text{ bzw. } h = \bar{h} \pm u_h = (46,8 \pm 0,4) \text{ mm} .$$

Das Volumen des Zylinders bestimmt sich damit zu

$$\bar{V} = \frac{\pi}{4} \cdot \bar{d}^2 \cdot \bar{h} = 10623 \text{ mm}^3 .$$

Für die Unsicherheit der Ergebnisgröße (Volumen V) folgt mit Anwendung von (32) und Einsetzung der Eingangsgrößen und ihrer Messunsicherheiten zunächst

$$u_V = \pm \left( \left| 2 \frac{u_d}{d} \right| + \left| \frac{u_h}{h} \right| \right) \cdot \bar{V} = 341 \text{ mm}^3$$

und dann das vollständige Endergebnis

$$V = \bar{V} \pm u_V = (10623 \pm 341) \text{ mm}^3 \approx (10,6 \pm 0,3) \text{ cm}^3 .$$

#### Anwendungsbeispiel zur Kombination der Standardformeln:

Zusammengesetzte Ausdrücke wie

$$F(w,x,y,z) = \frac{a \cdot w \cdot b \cdot x}{c \cdot y + d \cdot z}$$

für die unabhängigen Einzelmessgrößen w, x, y und z könnten nach Gl. (28) bzw. (29) behandelt werden, was aber zu recht komplizierten Ausdrücken führt. Einfacher wird die Kombination von Gl. (30) und Gl. (31), beispielsweise in pythagoreischer Addition mit

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

$$\frac{u_F}{\bar{F}} = \sqrt{\left(\frac{u_w}{\bar{w}}\right)^2 + \left(\frac{u_w}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{u_{Nenner}}{Nenner}\right)^2}.$$

Die beiden „Abkürzungen“

$$Nenner = c \cdot y + d \cdot z \quad \text{und} \quad u_{Nenner} = \sqrt{(c \cdot u_y)^2 + (d \cdot u_z)^2}$$

sind hier zweckmäßigerweise eingeführt worden. Die Anwendung von (29) würde zum selben Ergebnis führen.

Bei kombinierter Anwendung dieser o. g. Standardformeln ist aber stets unbedingt darauf zu achten, dass in der Funktion  $F$  keine der Messgrößen mehr als einmal vorkommt, z.B. gleichzeitig in Zähler und Nenner wie in

$$F(x, y) = \frac{x}{x + y}.$$

Sonst könnte eine mögliche Kompensation von Abweichungen unberücksichtigt bleiben und die Unsicherheit der Ergebnisgröße  $u_F$  ganz beträchtlich überschätzt werden – sogar noch mehr als bei Anwendung der Abschätzung gemäß (28)! In derartigen Fällen muss zwangsläufig mit (28) bzw. (29) gerechnet werden – auch wenn dafür umfangreichere Rechnungen notwendig sind!

#### 3.6.2 Fortpflanzung von Unsicherheiten korrelierter Größen

Im Unterschied zum vorigen Abschnitt wird nunmehr keine Unabhängigkeit der Einzelgrößen vorausgesetzt.

Mitunter sind bei der Messdatenauswertung verschiedener Praktikumsversuche die letztlich gesuchten Ergebnisgrößen und ihre Messunsicherheiten aus dem Quotienten  $F = a/b$  der zu einer linearen Funktion  $y = a \cdot x + b$  gehörenden Parameter „Anstieg“  $a$  und „absolutes Glied“  $b$  und ihren Standardabweichungen  $s_a$  und  $s_b$  zu bestimmen, deren Werte auf unterschiedliche Weise (s. viel weiter unten) ermittelt werden können. Da die Parameter  $a$  und  $b$  aber immer stark (negativ) korreliert sind, kann  $u_F$  grundsätzlich nicht nach (29) berechnet werden.

Bei der Betrachtung der in diesem (viel allgemeineren) Fall gültigen Fortpflanzung von Messunsicherheiten wird im Unterschied zum vorigen Abschnitt nicht von den Mittelwerten  $\bar{F} = F(\bar{x}, \bar{y}, \dots)$  ausgegangen, sondern von den  $n$  Funktionswerten

$$F_i = F(x_i, y_i),$$

die aus den  $n$  Messdatenpaaren  $(x_i, y_i)$  gebildet werden. Die gesuchte Varianz  $s_F^2$  der Funktionswerte  $F_i$  ist

$$s_F^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (F_i - \bar{F})^2. \quad (33)$$

Da die Abweichungen der  $x_i$  von  $\bar{x}$  bzw. der  $y_i$  von  $\bar{y}$  als infinitesimal angenommen werden, kann man erneut für die Näherung der  $F_i$  eine Taylor-Reihenentwicklung verwenden, die nach den linearen Gliedern abgebrochen wird:

$$F_i = F(x_i, y_i) \approx F(\bar{x}, \bar{y}) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} \cdot (x_i - \bar{x}) + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{y=\bar{y}} \cdot (y_i - \bar{y}). \quad (34)$$

Man beachte, dass hier in (34) die partiellen Ableitungen bei  $\bar{x}$  bzw.  $\bar{y}$  zu nehmen sind!

Die Mittelwertbildung dieser  $F_i$  erlaubt es, den bisher noch ausstehenden Beweis für  $\bar{F} = F(\bar{x}, \bar{y})$  zu führen: In der Beziehung

$$\bar{F} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( F(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot (x_i - \bar{x}) + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot (y_i - \bar{y}) \right) \quad (35)$$

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

verschwinden für große n (streng für Grundgesamtheiten) der zweite und dritte Term gemäß (23) und es folgt prompt die Formel (26).

Jetzt kann  $s_F^2$  durch Einsetzen von (34) und (35) in die Beziehung (33) berechnet werden:

$$\begin{aligned} s_F^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial x} \cdot (x_i - \bar{x}) + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot (y_i - \bar{y}) \right)^2 \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + 2 \cdot \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \cdot s_x^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \cdot s_y^2 + 2 \cdot \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \cdot s_{xy} \end{aligned} \quad (36)$$

Im Ergebnis für (36) ist neben den bereits bekannten Varianzen  $s_x^2$  und  $s_y^2$  eine neue Größe enthalten: Als *Kovarianz* bezeichnet man per Definition den Ausdruck

$$s_{xy} = \text{Cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}). \quad (37)$$

Die Kovarianz kann man als Verallgemeinerung der Varianz auffassen, da  $s_{xx} = s_x \cdot s_x$  gilt.

Ferner werden zwei Zufallsvariablen x und y dann als unkorreliert bezeichnet, wenn  $s_{xy} = 0$ .

Aus den Varianzen  $s_x^2$  und  $s_y^2$  sowie der Kovarianz  $s_{xy}$  wird der so genannte *lineare Korrelationskoeffizient* (oder einfach nur Korrelationskoeffizient)

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} \quad (38)$$

gebildet. Er kann Werte zwischen -1 und +1 annehmen:

Besteht ein exakt linearer Zusammenhang der Form  $y_i = a \cdot x_i + b$ , so ist  $r_{xy} = \pm 1$  mit dem positiven Vorzeichen bei positivem Anstieg a und negativem Vorzeichen im umgekehrten Fall. Dagegen muss bei  $r_{xy} = 0$  auf fehlende Korrelation geschlossen werden. (Diese Werte gelten so streng aber nur für Grundgesamtheiten - für die in der Praxis endlich vielen Messungen in einer Stichprobe wird man Korrelationskoeffizienten relativ nahe bei  $\pm 1$  bzw. 0 erhalten).

Übernimmt man (36) für die Messunsicherheiten, so erhält man die gesuchte Beziehung für die *Fortpflanzung der Messunsicherheit auf die Ergebnisgröße bei korrelierten Eingangsgrößen*:

$$u_F = \sqrt{\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \cdot u_x^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \cdot u_y^2 + 2 \cdot \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \cdot u_{xy}} \quad (39)$$

Offensichtlich kann man diese Beziehung (39) als *Verallgemeinerung für beliebige Messgrößen* (Zufallsvariablen) auffassen, die den *Spezialfall* in (29) für unkorrelierte Größen mit  $u_{xy} = 0$  ausdrücklich einschließt.

In Zusammenhang mit der Beziehung (38) wurde schon auf  $r_{xy} = \pm 1$ , d.h. positive und negative Korrelation, hingewiesen. Eine vorhandene Korrelation wird bei der Bestimmung der Messunsicherheit  $u_F$  der Ergebnisgröße gemäß (29), was aber streng nur für unkorrelierte Größen korrekt ist, zu einer Verringerung oder Vergrößerung (je nach Vorzeichen) führen.

Die mit (28) schon eingeführte Größtfehlerabschätzung wird aber wegen der Gültigkeit von  $|s_{xy}| \leq s_x \cdot s_y$  (Schwarzsche Ungleichung, ohne Beweis) immer nur eine obere Grenze liefern:

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNGSICHERHEITEN

Die Größtfehlerabschätzung ist deshalb stets eine *Abschätzung nach oben*, führt also im Fall  $\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \cdot u_{xy} < 0$  zu einer besonders deutlichen Überschätzung von  $u_F$ .

**Dieses Verhalten soll nachfolgend exemplarisch illustriert werden:**

Für das gewählte Beispiel  $F = a/b$  (im Fall der Anpassung an die Gerade  $y = a \cdot x + b$ ) ergibt sich

$$s_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)^2 \cdot s_a^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial b}\right)^2 \cdot s_b^2 + 2 \cdot \frac{\partial F}{\partial a} \cdot \frac{\partial F}{\partial b} \cdot s_{ab}$$

und nach Division durch  $F^2$  die relative Varianz

$$\frac{s_F^2}{F^2} = \frac{s_a^2}{a^2} + \frac{s_b^2}{b^2} - 2 \cdot \frac{s_{ab}}{a \cdot b}$$

Für  $F = a \cdot b$  dagegen erhält man ein positives Vorzeichen vor dem Kovarianzterm. Dabei ist zu beachten, dass  $s_{ab}$  selbst negativ ist (b steigt mit fallendem a und umgekehrt).

Die Ermittlung der Kovarianz  $s_{ab}$  wird im nachfolgenden Abschnitt beschrieben.

#### 3.7 Ausgleichsrechnung bei vermittelnder Beobachtung (lineare Regression)

Visuell (d.h. mit dem Auge) lassen sich als geometrische Formen nur Geraden und Kreise *eindeutig* identifizieren. Es ist deshalb ausgesprochen zweckmäßig, einen durch eine größere Anzahl von Messdatenpunkten  $(x_i, y_i)$  und eine zugehörige Modellfunktion (physikalische Gesetzmäßigkeit)  $y = f(x)$  charakterisierten Zusammenhang zu linearisieren, d.h. grafisch als Gerade darzustellen. Für die allermeisten Funktionstypen ist das relativ einfach durch mathematische Umformung zu erreichen, wie die folgenden Beispiele zeigen:

| Funktion                      | Linearisierung                  |
|-------------------------------|---------------------------------|
| $y = b \cdot x^a$             | $\ln y = a \cdot \ln x + \ln b$ |
| $y = b \cdot e^{a \cdot x}$   | $\ln y = a \cdot x + \ln b$     |
| $y = \sqrt{a \cdot x + b}$    | $y^2 = a \cdot x + b$           |
| $y = \frac{1}{a \cdot x + b}$ | $\frac{1}{y} = a \cdot x + b$   |

Im nächsten Kapitel wird gezeigt, wie eine solche Linearisierung durch geschickte grafische Darstellung (d.h. die Wahl entsprechend sachgerechter Achsenskalierung) realisiert wird.

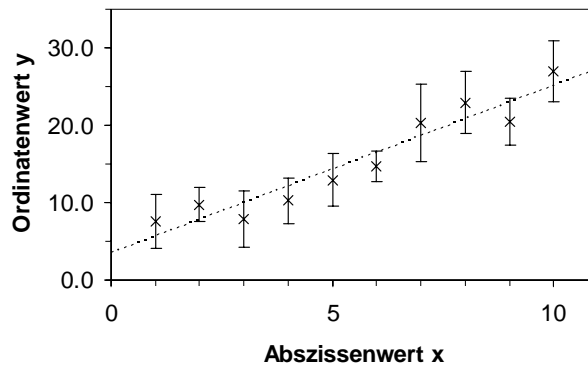
Gelegentlich ist eine derartige Umformung nicht möglich bzw. sinnvoll; dieser im Praktikum aber eher seltene Fall soll jetzt nicht betrachtet werden. Die nachfolgende Betrachtung beschränkt sich daher auf eine lineare Abhängigkeit.

Gegeben seien n Messpunkte  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1..n$ ) bestimmter Messunsicherheit, die theoretisch einer linearen Funktion  $y = a \cdot x + b$  (Gerade) folgen und wegen der Messabweichungen unweigerlich um sie herum streuen (s. Abb. 13). Die x-Werte sollen als „fehlerfrei“ (bzw. als im Vergleich zu den y-Werten „praktisch fehlerfrei“) vorausgesetzt werden. Für die y-Werte werden dagegen Unsicherheiten angenommen, ausgedrückt durch die zunächst als bekannt vorausgesetzt (aber unterschiedlichen) Standardabweichungen  $s_i$  der  $y_i$ , wie sie in Form von „Fehlerbalken“ auch in Abb. 13 dargestellt sind.

Für die gegebenen Messpunkte ist diejenige „ausgleichende“ Gerade zu finden, die den charakteristischen Verlauf (unter Einschluss der „Punktstreuung“) am besten beschreibt. Im Sinne der bisherigen Betrachtungen (s. Methode der kleinsten Quadrate) sind die Parameter a und b gesucht, für die die Summe der Quadrate der Abweichungen  $v_i$  der Messpunkte von der

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

Geraden minimal wird. Dabei ist zusätzlich noch eine *Gewichtung* der Einzelbeiträge über die  $s_i$  auszuführen, da die einzelnen Messpunkte unterschiedlich „genau“ sind: Es ist sicherlich leicht einzusehen, dass die Messpunkte mit einer geringeren Messunsicherheit stärker berücksichtigt (gewichtet) werden müssen als diejenigen mit einer größeren Messunsicherheit.



**Abbildung 13: Ausgleichsgerade (lineare Regression)**

Es folgt damit aus dem Gaußschen Minimalprinzip hier die Forderung

$$\sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{s_i^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - a \cdot x_i - b}{s_i} \right)^2 = \text{Minimum.} \quad (40)$$

Sie wird genau dann erfüllt, wenn die partiellen Ableitungen des Ausdrucks in (40) nach  $a$  und  $b$  jeweils verschwinden, also:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{s_i^2} &= -2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{s_i^2} (y_i - a \cdot x_i - b) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{s_i^2} &= -2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i^2} (y_i - a \cdot x_i - b) = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

Nach einigen Umformungen erhält man aus (41) die so genannten *Normalgleichungen*

$$\begin{aligned} b \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i^2} + a \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{s_i^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{s_i^2} \\ b \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{s_i^2} + a \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{s_i^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i \cdot y_i}{s_i^2} \end{aligned} \quad (42)$$

die als lineares Gleichungssystem in  $a$  und  $b$  aufgefasst werden können. Die Lösungen lauten

$$a = \frac{1}{D} \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i \cdot y_i}{s_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i^2} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{s_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{s_i^2} \right) \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{D} \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{s_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{s_i^2} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{s_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i \cdot y_i}{s_i^2} \right). \quad (43)$$

Der hier zur Vereinfachung der Schreibweise gewählte Ausdruck

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{s_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i^2} - \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{s_i^2} \right)^2$$

ist zu verstehen als Determinante  $D$  der Koeffizientenmatrix

$$\alpha = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i^2} & \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{s_i^2} \\ \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{s_i^2} & \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{s_i^2} \end{pmatrix} \quad (44)$$

des linearen Gleichungssystems (42).

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

Die Standardabweichungen für die beiden Parameter a und b der linearen Funktion erhält man durch Anwendung des Fortpflanzungsgesetzes für die Unsicherheiten auf die beiden Beziehungen in (43):

$$s_a = \pm \sqrt{\frac{1}{D} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i^2}} \quad \text{und} \quad s_b = \pm \sqrt{\frac{1}{D} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{s_i^2}} \quad (45)$$

Der empirische Korrelationskoeffizient  $r_{xy}$  für die Anpassung an die lineare Funktion  $y = a \cdot x + b$  lautet

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2\right)}} \quad (46)$$

mit  $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$  und  $\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i$ . Häufig wird anstelle des Korrelationskoeffizienten auch

das so genannte *Bestimmtheitsmaß*  $R^2 = r_{xy}^2$  zur Charakterisierung verwendet.

Bei einigen Anwendungen ist bekannt, dass die abhängigen Messgrößen poissonverteilt sind, d.h.  $s_i^2 \approx y_i$ . Dann wird von dieser Kenntnis auch Gebrauch gemacht (s. Versuch F7).

Eine Vereinfachung für die lineare Regression ergibt sich dann, wenn die Gerade durch den Koordinatenursprung verläuft, d.h.  $y = a \cdot x$ . Wird wieder angenommen, dass nur die y-Werte „fehlerbehaftet“ und die x-Werte (nahezu) „fehlerfrei“ sind, dann lautet die Bedingung völlig analog zu (40)

$$\sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{s_i^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - a \cdot x_i}{s_i} \right)^2 = \text{Minimum}. \quad (47)$$

Mit gleicher Vorgehensweise wie oben (Differentiation nach a und Nullsetzen, Fortpflanzungsgesetz) folgen daraus schließlich die Beziehungen

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i \cdot y_i}{s_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{s_i^2}} \quad \text{und} \quad s_a = \pm \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{s_i^2}}} \quad (48)$$

Deutlich einfacher wird die Betrachtung natürlich, wenn die y-Werte alle in gleicher Weise mit einer Messunsicherheit behaftet sind oder als „näherungsweise gleichartig unsicher“ angenommen werden können. Dann ist eine Gewichtung der einzelnen Beiträge selbstverständlich nicht mehr notwendig:

Für die Parameter a und b der Anpassung folgen mit  $s_i \approx s$  Vereinfachungen von (43) mit

$$a = \frac{1}{D} \left( n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i \right) \quad (49)$$

$$b = \frac{1}{D} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \right)$$

und für die Standardabweichungen die Vereinfachungen

$$s_a = \pm s \cdot \sqrt{\frac{n}{D}} \quad \text{und} \quad s_b = \pm s \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{D}} \quad (50)$$

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

mit  $\hat{D} = n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2$  als Determinante der entsprechenden Koeffizientenmatrix.

Sofern auch für diesen Spezialfall eine „ausgleichende“ Gerade durch den Koordinatenursprung erwartet wird, lauten die Ergebnisse für den Anstieg und seine Standardabweichung:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{und} \quad s_a = \pm \frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \quad (51)$$

In seltenen Fällen, wenn die Messunsicherheiten der Messpunkte  $(x_i, y_i)$  völlig unbekannt sind, kann man als *Behelf* das Streumaß  $s_y$  der  $y$ -Werte aus der *Streuung der Messpunkte relativ zur ausgleichenden Funktion* bestimmen. Genau dieser Fall, der aber bereits eine wesentliche Einschränkung darstellt, ist oft „stillschweigend“ in regressionsfähigen programmierbaren Taschenrechnern und einfacherer Software für die lineare Regression realisiert.

Im betrachteten Fall  $y = a \cdot x + b$  rechnet man mit

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot x_i - b)^2}{n - 2}},$$

was man als mittlere Abweichung der Datenpunkte interpretieren kann. In den Gleichungen (50) ist dann  $s = s_y$  einzusetzen. Der Nenner  $n-2$  unter der Wurzel erklärt sich wie folgt: Da zur Festlegung einer Geraden 2 Punkte notwendig sind, beträgt die Zahl der „Kontrollmessungen“ folglich  $n-2$ . Für eine Gerade durch den Koordinatenursprung rechnet man dagegen mit

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot x_i)^2}{n - 1}},$$

was dann in die Gleichungen (51) eingesetzt wird. Der Nenner  $n-1$  unter der Wurzel folgt hier daraus, dass zur Festlegung einer derartigen Geraden außer dem Ursprung  $(0,0)$  nur noch ein Datenpunkt erforderlich ist, so dass sich gerade  $n-1$  „Kontrollmessungen“ ergeben.

Wie bereits früher erwähnt, ist in einigen Fällen (s. Abschnitt 3.6.2) auch die Kovarianz  $s_{ab}$  der Parameter  $a$  und  $b$  von grundsätzlichem Interesse. Daher soll nun ein Lösungsansatz skizziert werden, der neben den Varianzen auch die Kovarianzen liefert und für alle Messdatenreihen gilt, die sich durch Linearkombinationen  $y(x) = \sum_{k=1}^m a_k \cdot f_k(x)$  beliebiger Funktionen

$f_k(x)$  ausgleichen lassen; damit auch für den bisher betrachteten Fall der Geraden mit  $m = 2$ ,  $f_1(x) = 1$ ,  $f_2(x) = x$ ,  $a_1 = b$  und  $a_2 = a$ . Mit der Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate erhält man insgesamt  $m$  Normalgleichungen zur Bestimmung der  $m$  Parameter  $a_1, a_2, \dots, a_m$ :

$$\sum_{i=1}^n y_i \cdot \frac{f_l(x_i)}{s_i^2} = \sum_{k=1}^m \left\{ a_k \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{s_i^2} \cdot f_l(x_i) \cdot f_k(x_i) \right) \right\} \quad l = 1..m$$

Dieses Gleichungssystem lautet in Matrixschreibweise

$$\beta = a \cdot \alpha \quad (52)$$

Die Elemente des Zeilenvektors  $a = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m)$  sind die gesuchten Parameter. Die Matrix  $\alpha$  ist die symmetrische Koeffizientenmatrix mit den Elementen

$$\alpha_{kl} = \alpha_{lk} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{s_i^2} \cdot f_l(x_i) \cdot f_k(x_i) \right).$$



### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

Die Elemente des Zeilenvektors  $\beta = (\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_m)$  sind definiert durch

$$\beta_l = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{s_i^2} \cdot y_i \cdot f_l(x_i) \right).$$

Die Lösung für den Zeilenvektor  $a$  erhält man durch Multiplikation der Gleichung (52) von rechts mit der inversen Matrix  $\varepsilon = \alpha^{-1}$  von  $\alpha$ , die definiert ist durch  $\varepsilon \cdot \alpha = \alpha \cdot \varepsilon = 1$  (1 ist die Einheitsmatrix). Man erhält

$$\beta \cdot \varepsilon = a \cdot \alpha \cdot \varepsilon \text{ bzw. } a = \beta \cdot \varepsilon \quad (53)$$

oder für die Parameter ausgeschrieben

$$a_l = \sum_{k=1}^m (\beta_k \cdot \varepsilon_{kl}) = \sum_{k=1}^m \left\{ \varepsilon_{kl} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{s_i^2} \cdot y_i \cdot f_k(x_i) \right) \right\}.$$

Für  $m=2$ ,  $f_1(x) = 1$  und  $f_2(x) = x$  ergeben sich daraus die Gleichungen (43). Die inverse Matrix  $\varepsilon = \alpha^{-1}$  ist (wie  $\alpha$  selbst) symmetrisch, man nennt sie *Kovarianzmatrix*, weil ihre Elemente in der Hauptdiagonalen die Varianzen und die übrigen Elemente die Kovarianzen (s. Abschnitt 3.6.2) der Parameter der Ausgleichsfunktion  $y(x)$  sind. Für den Fall  $y = a \cdot x + b$  erhält man als Kovarianzmatrix

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} s_b^2 & s_{ab} \\ s_{ab} & s_a^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{s_i^2} & -\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{s_i^2} \\ -\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{s_i^2} & \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i^2} \end{pmatrix}$$

mit den Varianzen gemäß Gleichung (45) und der Kovarianz

$$s_{ab} = -\frac{1}{D} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{s_i^2}. \quad (54)$$

#### Rechenbeispiel für die lineare Regression:

Bei einem Experiment zur Bestimmung des Innenwiderstandes  $R_A$  eines Amperemeters (Drehspulmessinstrument) wird die Stromstärke  $I_A$  durch das Messinstrument in Abhängigkeit vom Widerstandswert  $R_x$  eines zu ihm parallel geschalteten Präzisionsdekadenwiderstandes bei Speisung aus einer Konstantstromquelle (Stromstärke  $I_0$ ) gemessen (s. Versuch E2):

Aus der Theorie (Knotensatz und Ohmsches Gesetz) ergibt sich die Beziehung

$$I_0 = I_A \cdot \left( 1 + \frac{R_A}{R_x} \right),$$

die mit  $y = 1/I_A$ ,  $x = 1/R_x$ ,  $a = R_A/I_0$  und  $b = 1/I_0$  in geeigneter Weise auf die Form  $y = a \cdot x + b$  gebracht (d.h. linearisiert) werden kann. Aus der linearen Regression sollen der Innenwiderstand  $R_A$  des Amperemeters und die Stromstärke  $I_0$  der Konstantstromquelle bestimmt werden.

Das Instrument hat einen Messbereich von  $100 \mu\text{A}$  (Maximalausschlag), seine Genauigkeitsklasse ist 1,5. Auf der Skale liegt eine Teilung in Schritten von  $5 \mu\text{A}$  vor, eine Schätzung auf  $\pm \frac{1}{2}$  Skalenteile ist möglich. Aus der Genauigkeitsklasse selbst folgt eine Unsicherheit von  $1,5 \mu\text{A}$  (1,5% von  $100 \mu\text{A}$ ); für die Schätzung/Ablesung dagegen  $2,5 \mu\text{A}$ . Daraus ergibt sich mit pythagoreischer Addition

$$\Delta I_A = \sqrt{(1,5)^2 + (2,5)^2} \mu\text{A} \approx 3 \mu\text{A}$$

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

als gesamte Unsicherheit der Strommessung. Für  $y = \frac{1}{I_A}$  folgt aus dem Fortpflanzungsgesetz eine Unsicherheit von

$$\Delta y = \left| \frac{d}{dI_A} \left( \frac{1}{I_A} \right) \cdot \Delta I_A \right| = \frac{\Delta I_A}{I_A^2} = \Delta I_A \cdot y^2,$$

die sich also wie  $y^2$  verändert ( $\Delta y_i$  entspricht hier im Weiteren den  $s_i$ ). Die  $x = \frac{1}{R_x}$  sind dagegen als „praktisch nahezu fehlerfrei“ (s. Tab. 10 in Abschnitt 3.2) anzunehmen. Es ist eine lineare Regression gemäß (43-45) auszuführen, wofür nun zweckmäßig eine Tabelle eingerichtet wird:

| i               | Messwerte             |                      | $x_i$<br>( $\Omega^{-1}$ ) | $y_i$<br>( $\mu A^{-1}$ ) | $s_i$<br>( $\mu A^{-1}$ ) | $s_i^2$<br>( $\mu A^2$ ) | $x_i \cdot s_i^2$<br>( $\Omega^{-1} \mu A^2$ ) | $(x_i/s_i)^2$<br>( $\Omega^{-2} \mu A^2$ ) | $y_i \cdot s_i^2$<br>( $\mu A$ ) | $x_i \cdot y_i \cdot s_i^2$<br>( $\Omega^{-1} \mu A$ ) |
|-----------------|-----------------------|----------------------|----------------------------|---------------------------|---------------------------|--------------------------|--|--|----------------------------------|--|
|                 | $R_x$<br>( $\Omega$ ) | $I_A$<br>( $\mu A$ ) |                            |                           |                           |                          |  |  |                                  |  |
| 1               | 480                   | 30                   | 0,002083                   | 0,033333                  | 0,003333                  | 90000                    | 187,5  | 0,390625                                   | 3000                             | 6,2500   |
| 2               | 990                   | 47,5                 | 0,001010                   | 0,021053                  | 0,001330                  | 565629                   | 571,3  | 0,577114                                   | 11908                            | 12,0283  |
| 3               | 1470                  | 57                   | 0,000680                   | 0,017544                  | 0,000923                  | 1172889                  | 797,9  | 0,542778                                   | 20577                            | 13,9980  |
| 4               | 1970                  | 65                   | 0,000508                   | 0,015385                  | 0,000710                  | 1983403                  | 1006,8   | 0,511068                                   | 30514                            | 15,4893  |
| 5               | 3780                  | 78                   | 0,000265                   | 0,012821                  | 0,000493                  | 4112784                  | 1088,0   | 0,287841                                   | 52728                            | 13,9492  |
| 6               | 4770                  | 82                   | 0,000210                   | 0,012195                  | 0,000446                  | 5023575                  | 1053,2   | 0,220788                                   | 61263                            | 12,8434  |
| 7               | 10100                 | 90                   | 0,000099                   | 0,011111                  | 0,000370                  | 7290000                  | 721,8  | 0,071464                                   | 81000                            | 8,0198   |
| 8               | 13880                 | 92                   | 0,000072                   | 0,010870                  | 0,000354                  | 7959922                  | 573,5  | 0,041317                                   | 86521                            | 6,2335   |
| 9               | 21900                 | 95                   | 0,000046                   | 0,010526                  | 0,000332                  | 9050069                  | 413,2  | 0,018870                                   | 95264                            | 4,3499   |
| 10              | 68300                 | 97,5                 | 0,000015                   | 0,010256                  | 0,000316                  | 10040977                 | 147,0  | 0,002152                                   | 102984                           | 1,5078   |
| Summenbildungen |                       |                      |                            |                           |                           | $\sum \frac{1}{s_i^2}$   | $\sum \frac{x_i}{s_i^2}$                       | $\sum \frac{x_i^2}{s_i^2}$                 | $\sum \frac{y_i}{s_i^2}$         | $\sum \frac{x_i \cdot y_i}{s_i^2}$                     |
|                 |                       |                      |                            |                           |                           | 47289248                 | 6560,2   | 2,664017                                   | 545759                           | 94,6692  |

Mit Hilfe der Tabelle und der erfolgten Summenbildungen erhält man schließlich hier als Ergebnisse der linearen Regression für  $y = a \cdot x + b$

Determinante (44):  $D = 82942459,64$

Anstieg (43):  $a = 10,81 \Omega \cdot \mu A^{-1}$

Achsenabschnitt (43):  $b = 0,0100 \mu A^{-1}$

Unsicherheit des Anstiegs (45):  $s_a = 0,76 \Omega \cdot \mu A^{-1}$

Unsicherheit des Achsenabschnitts (45):  $s_b = 0,0002 \mu A^{-1}$

Korrelationskoeffizient (46):  $r_{xy} = 0,9998$

Bestimmtheitsmaß (46):  $R^2 = 0,9997$

Die für die Berechnung von Korrelationskoeffizient bzw. Bestimmtheitsmaß eigentlich erforderlichen Spalten für die  $x_i - \bar{x}$ ,  $(x_i - \bar{x})^2$ ,  $y_i - \bar{y}$  und  $(y_i - \bar{y})^2$  sowie deren Summenbildungen sind in der Tabelle aus Platzgründen nicht mehr aufgeführt.

Aus dem Korrelationskoeffizienten, der hier sehr nahe am Wert +1 liegt, kann eine äußerst signifikante lineare Korrelation mit positivem Anstieg a (wie im Ergebnis auch ersichtlich) gefolgert werden: Das gewählte lineare Modell  $y = a \cdot x + b$  (das zudem auch physikalisch begründet ist) ist ganz offensichtlich zutreffend!

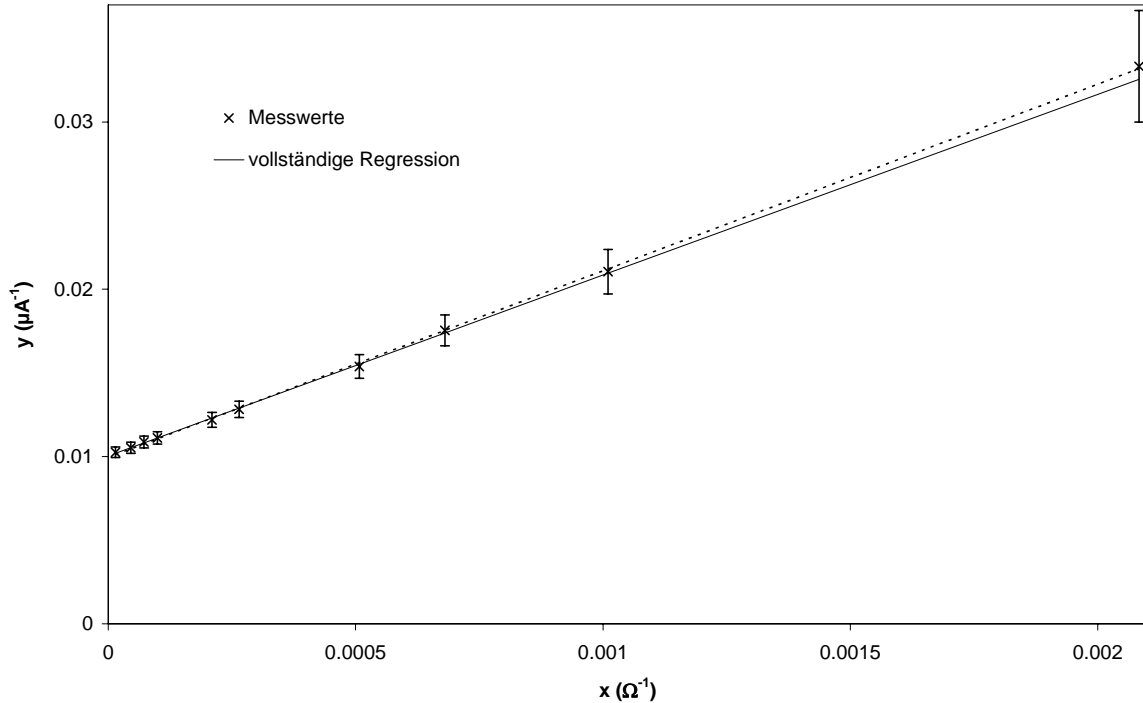
Für die Stromstärke der Konstantstromquelle erhält man aus dem Achsenabschnitt  $I_0 = \frac{1}{b} = 100 \mu A$ , durch Anwendung des Fortpflanzungsgesetzes für die Unsicherheit

$$\Delta I_0 = \frac{s_b}{b^2} = \frac{0,0002}{(0,01)^2} \mu A \approx 2 \mu A. \text{ Als Innenwiderstand des Messgerätes ermittelt man}$$

$$R_A = a \cdot I_0 = 10,81 \Omega \cdot \mu A^{-1} \cdot 100 \mu A = 1081 \Omega \text{ mit der durch Anwendung des Fortpflanzungs-}$$

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

gesetzes berechneten Unsicherheit  $\Delta R_A = \sqrt{(I_0 \cdot s_a)^2 + (a \cdot \Delta I_0)^2} \approx 79 \Omega$ . Die vollständigen Ergebnisse lauten also  $R_A = (1081 \pm 79) \Omega$  und  $I_0 = (100 \pm 2) \mu A$ . Abschließend sollen die Ergebnisse der linearen Regression gemeinsam mit den Datenpunkten in einer aussagekräftigen Grafik veranschaulicht werden (s. Abb. 14):



**Abbildung 14: Beispiel für lineare Regression an einem realen Datensatz**

In der Abb.14 ist zu ersehen, dass die ausgleichende Regressionsgerade (durchgezogene Linie) hier erwartungsgemäß durch sämtliche „Fehlerbalken“ verläuft. Sofern aber einzelne Datenpunkte mit ihren Fehlerbalken bzw. -kreuzen *nicht* durch die ausgleichende Funktion erfasst werden, müsste stets überlegt werden, ob die Unsicherheiten nicht *zu gering* bestimmt wurden oder gar „Ausreißer“ (grobe Fehler?) vorliegen.

Es ist hier auch der Spezialfall ohne Berücksichtigung der realen Messunsicherheiten der Datenpunkte (gestrichelte Linie) mit eingezeichnet: Offensichtlich erhält man dabei etwas andere Ergebnisse insbesondere für den Anstieg ( $11,16 \Omega \cdot \mu A^{-1}$ ); der Achsenabschnitt ( $0,01 \Omega \cdot \mu A^{-1}$ ) ist derselbe wie oben. Die Berechnung liefert auch etwas geringere Unsicherheiten als hier soeben bestimmt, insbesondere für  $R_A$  und  $I_0$  als die interessierenden Endgrößen.

Dieser Befund ist durch den großen Einfluss der mit  $x$  wachsenden Messunsicherheit zu erklären: Eine tatsächlich ausgleichende Gerade muss mit zunehmendem Argument  $x$  wegen der immer größer werdenden Fehlerbalken immer „unsicherer“ sein. Die ersten Datenpunkte erhalten wegen ihrer geringeren Unsicherheit ein sehr hohes Gewicht bei der Regression und bestimmen dominierend die Ergebnisse. Es zeigt sich hier, dass eine *wirklich sachgerechte* Regressionsanalyse häufig doch einen *höheren Aufwand* erfordert!

Man ersieht bereits an diesem vergleichsweise einfachen Beispiel den relativ hohen numerischen Aufwand einer linearen Regression und die offensichtliche Zweckmäßigkeit des Einsatzes einer *Tabellenkalkulation, kombiniert mit der Möglichkeit der grafischen Präsentation* (Software).

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNSICHERHEITEN

#### 3.8 Ausgleichsrechnung bei Messergebnissen mit verschiedenen Unsicherheiten (gewichteter Mittelwert)

Angenommen, eine physikalische Größe  $x$  sei nach  $k$  verschiedenen Methoden gemessen worden. Aus jeder der  $k$  Messreihen ergeben sich  $k$  Mittelwerte  $\bar{x}_j$  mit den (voneinander verschiedenen)  $k$  Messunsicherheiten  $u_j$ . Aus den  $k$  Einzelergebnissen soll nunmehr ein gemeinsamer Mittelwert und eine gemeinsame Unsicherheit ermittelt werden (s. Abb. 15). Offensichtlich ist das *nur dann sinnvoll, wenn sich die durch die jeweiligen Unsicherheiten bedingten Intervalle* ( $\bar{x}_j - u_j$ ,  $\bar{x}_j + u_j$ ) *auch überlappen*.

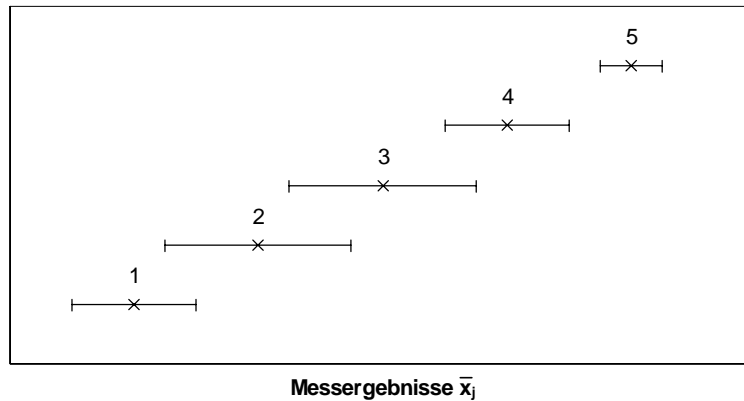


Abbildung 15: Veranschaulichung zur Bildung des gewichteten Mittelwertes

Im Beispiel von Abb. 15 ist das für das 5. Ergebnis nicht mehr gegeben (möglicherweise durch eine unberücksichtigte systematische Abweichung), so dass nur für die ersten 4 Ergebnisse ein gemeinsamer Mittelwert und eine gemeinsame Unsicherheit ermittelt werden könnte.

Da jede Messreihe eine unterschiedliche Unsicherheit besitzt, muss ihr jeweils ein Gewicht  $p_j$  entsprechend der Unsicherheit  $u_j$  zugeordnet werden. Das so genannte *gewichtete Mittel*  $\bar{x}_g$  und dessen resultierende Messunsicherheit  $u_g$  werden wie folgt berechnet:

$$\bar{x}_g = \frac{\sum_{j=1}^k p_j \cdot \bar{x}_j}{\sum_{j=1}^k p_j} \quad \text{und} \quad u_g = \pm \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^k (p_j \cdot u_j)^2}}{\sum_{j=1}^k p_j} \quad (55)$$

$$\bar{x}_g = \frac{\sum_{j=1}^k p_j \cdot \bar{x}_j}{\sum_{j=1}^k p_j} \quad \text{und} \quad u_g = \pm \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^k (p_j \cdot u_j)^2}}{\sum_{j=1}^k p_j} \quad (56)$$

Die Gewichte  $p_j$  ergeben sich nach

$$p_j = C/u_j^2, \quad (57)$$

wobei die Konstante  $C$  völlig willkürlich gewählt werden kann. Man wählt z.B.  $C = u_1^2$ , so dass  $p_1 = 1$  wird.

Anmerkungen:

- Aus (57) wird ersichtlich, dass (vernünftigerweise!) das Ergebnis mit der kleinsten Unsicherheit immer das größte Gewicht erhält.
- In der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann mithilfe der oben schon erwähnten Cauchy-Schwarzischen Ungleichung gezeigt werden, dass die hier vorgenommene Wahl der Gewichtungsfaktoren zu  $p_j \propto u_j^{-2}$  die Varianz des gewichteten Mittelwertes minimiert, also optimal ist.
- Der arithmetische Mittelwert kann als Spezialfall des gewichteten Mittels aufgefasst werden.

### 3. MESSABWEICHUNGEN UND MESSUNGSICHERHEITEN

Der Einführung der Gewichte liegt folgender Gedankengang zugrunde:

Angenommen, die unterschiedlichen Messunsicherheiten seien vorwiegend durch die statistischen Abweichungen, also durch die Vertrauensbereiche bestimmt, dann können die verschieden großen Messunsicherheiten auf eine unterschiedliche Zahl von Einzelmessungen bei den verschiedenen Messreihen zurückgeführt werden.

Die ermittelten Gewichte  $p_j$  bedeuten dann, dass eine Messreihe mit kleinerer Unsicherheit  $u_j \approx \bar{s}_j$  auf Grund einer größeren Zahl von Einzelmessungen zustande gekommen sein müsste, da  $\bar{s}_j = s/\sqrt{n_j}$  gilt und bei sonst gleicher Standardabweichung  $s$  die Gewichtungsfaktoren für alle Messreihen  $p_j \propto n_j$  sind.

Der Gewichtungsfaktor bewirkt, dass der zugehörige Mittelwert  $\bar{x}_j$  genau so behandelt wird, als ob er  $p_j$ -mal gemessen worden wäre.

Diese hier für statistische Abweichungen erklärte Wahl der Gewichtungsfaktoren wird generell auf die Messunsicherheiten übertragen.

#### Anwendungsbeispiel:

Beim 100m-Zieleinlauf wird die Zeit des Erstplatzierten mit drei verschiedenen Methoden gemessen: mit einer Stoppuhr zu  $(11,4 \pm 0,2)$  s, mit der TV-Kamera zu  $(11,49 \pm 0,02)$  s und mit einer Lichtschranke zu  $(11,486 \pm 0,001)$  s. Erkennbar überlappen sich alle drei Intervalle, so dass das gewogene Mittel tatsächlich gebildet werden kann:

| Stoppuhr  | TV-Kamera       | Lichtschranke    |
|---|-----------------|------------------|
| $t_1 = 11,4$ s  | $t_2 = 11,49$ s | $t_3 = 11,486$ s |
| $u_1 = 0,2$ s   | $u_2 = 0,02$ s  | $u_3 = 0,001$ s  |
| $C = u_1^2; p_1 = 1$  | $p_2 = 100$     | $p_3 = 40000$    |
| $\bar{t} = \frac{1 \cdot 11,4 + 100 \cdot 11,49 + 40000 \cdot 11,486}{40101} \text{ s} = 11,4860078.. \text{ s} \approx 11,486 \text{ s}$                     |                 |                  |
| $u_g = \frac{\sqrt{(1 \cdot 0,2)^2 + (100 \cdot 0,02)^2 + (40000 \cdot 0,001)^2}}{40101} \text{ s} = 9,987.. \cdot 10^{-4} \text{ s} \approx 0,001 \text{ s}$ |                 |                  |
| $\bar{t}_g = (11,486 \pm 0,001) \text{ s}$  |                 |                  |

Das erzielte Ergebnis ist nicht überraschend – wegen der erheblich geringeren Unsicherheit der Messung mit Lichtschranke, die zudem quadratisch in das Gewicht eingeht, bestimmt sie das gewogene Mittel und seine Unsicherheit im gewählten Beispiel dominierend. Die geringfügigen „Verbesserungen“ durch die beiden deutlich ungenaueren Verfahren sind nicht signifikant.

## 4. GRAFISCHE DARSTELLUNGEN

### 4.1 Problemstellung

Grafische Darstellungen sind eine besonders wichtige Form der Präsentation von Ergebnissen in Vorträgen, Postern, Berichten, Zeitschriftenartikeln und sonstigen wissenschaftlichen Veröffentlichungen. Sie bestimmen –neben dem Titel und gegebenenfalls einem Abstract bzw. der Inhaltsübersicht– meist auch *entscheidend* den ersten Eindruck, den ein Zuhörer oder Leser von Inhalt und Qualität einer Präsentation bzw. Veröffentlichung erhält.

Kritisch zu hinterfragen ist immer der mit einer grafischen Darstellung beabsichtigte Zweck: So kann durch eine bestimmte gewählte Darstellungsart versucht werden, die Aufmerksamkeit des Betrachters in eine bestimmte beabsichtigte Richtung zu lenken, ohne dass er es selbst bemerkt. Dabei kann –ungeachtet des Wahrheitsgehaltes der zugrunde liegenden Daten– beim Betrachter ein manipulierter Eindruck entstehen. Grafische Darstellungen eignen sich besonders deshalb zur Manipulation, weil sie die dargebotenen Daten „aufbereiten“, was im Klartext nichts anderes bedeutet, als eine bestimmte Deutungsperspektive festzulegen.

Der Zweck grafischer Darstellungen in der Physik besteht in der Veranschaulichung von Zusammenhängen, darüber hinaus sehr oft in der Überprüfung bzw. Bestimmung von funktionalen Abhängigkeiten zwischen physikalischen Größen. Im Praktikum, wo Arbeitstechniken der Experimentalphysik erworben und vertieft werden sollen, dienen grafische Darstellungen der Überprüfung von (theoretisch meist bekannten) Beziehungen zwischen Messgrößen oder auch unmittelbar zur Bestimmung von physikalischen Ergebnisgrößen.

Für die Gestaltung von wissenschaftlichen grafischen Darstellungen gelten, ebenso wie für die Ermittlung und Angabe von Ergebnissen (vgl. Kapitel 3) streng objektive Kriterien und Normative, die im 1. Kapitel bei den Hinweisen zur Protokollgestaltung bereits teilweise genannt wurden und unbedingt zu beachten sind. Eine klare Orientierung gibt DIN 461 „Graphische Darstellung in Koordinatensystemen“. Gute Gestaltungsbeispiele sind auch in den einschlägigen physikalischen Fachpublikationen bzw. Journalen zu finden, die detaillierte Hinweise für Autoren geben.

#### Anwendungsbeispiel:

Die Periodendauer  $T$  eines Fadenpendels ist abhängig von der Pendellänge  $l$  und der Fallbeschleunigung  $g$  entsprechend der Beziehung

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Es soll die Periodendauer  $T$  als Funktion der Pendellänge  $l$  gemessen werden. Die Darstellung von  $T(l)$  in einem Diagramm mit linearer Achsenteilung ergibt (erwartungsgemäß) eine gekrümmte Kurve (s. Abb. 16a). Visuell, d.h. nach Augenschein, kann man allerdings nicht entscheiden, ob die theoretische funktionale Abhängigkeit tatsächlich erfüllt ist.

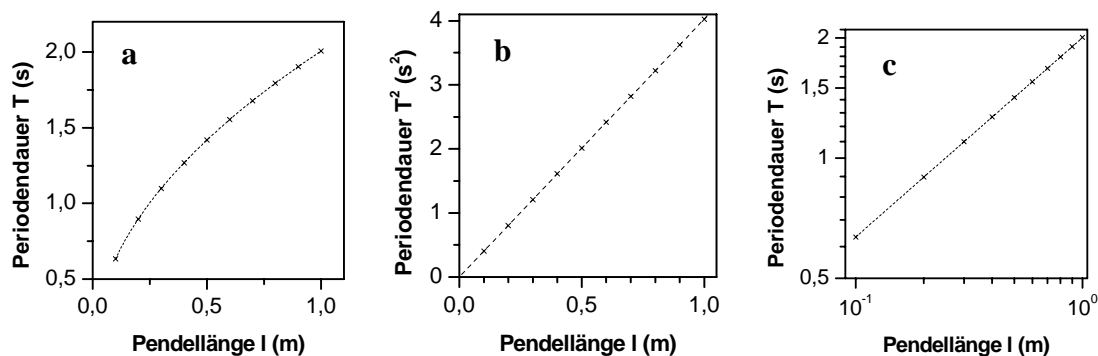


Abbildung 16: Periodendauer als Funktion der Pendellänge eines Fadenpendels

## 4. GRAFISCHE DARSTELLUNGEN

Dagegen ergibt die Darstellung von  $T^2 = f(l)$  einen linearen Verlauf wie in Abb. 16b, dessen Anstieg  $a = 4 \cdot \pi^2 / g$  die Bestimmung der Fallbeschleunigung  $g$  ermöglicht. Ebenso liefert eine Darstellung von  $\log(T) = f(\log(l))$  in Abb. 16c eine Gerade, deren Anstieg  $a = 1/2$  die Überprüfung des Exponenten der Wurzelfunktion gestattet.

Zur zeichnerischen Darstellung spezieller nichtlinearer funktionaler Abhängigkeiten (vor allem Exponential- und Potenzfunktionen) in linearisierter Form gibt es besondere Koordinatenpapiere, die die Arbeit wesentlich vereinfachen. Allerdings ist es heute bedeutend praktischer und effizienter, mit entsprechend geeigneter Software die Messwerte zu verarbeiten und Diagramme zu erstellen. In diesem Kapitel wird die Handhabung der unterschiedlichen Koordinatensysteme und -papiere näher erläutert.

Bedingt durch den enormen wissenschaftlich-technischen Fortschritt in den letzten Jahrzehnten, insbesondere infolge der rasanten Entwicklung der Computertechnik und ihrer massenhaften Anwendung, sind die „klassischen“ Arbeitstechniken mit Koordinatenpapieren stark in den Hintergrund getreten. Sie haben aber auch heute noch ihre Berechtigung. In der modernen Wissenschaft erfolgt die Behandlung, Auswertung und Darstellung von Messergebnissen natürlich fast ausschließlich computergestützt durch numerische Verfahren, die in der Software implementiert werden und oft die Methode der kleinsten Quadrate (s. Abschnitt 3.7) nutzen. Schon bessere Taschenrechner verfügen über die Möglichkeit der linearen Regressionsanalyse. *Grundsätzlich ist es notwendig, dass auch Angaben zur Unsicherheit des Anstieges und des Achsenschnittpunktes gemacht werden können. Ohne diese Angaben sind die Ergebnisse praktisch wertlos!*

Bei der Benutzung von entsprechender Software leidet oft unvermeidlich wegen fehlender „Transparenz“ die für Studierende ganz sicher wichtige Anschaulichkeit. Für das tiefere Verständnis der Behandlung und Darstellung von Versuchdaten sind aber Grundkenntnisse unbedingt erforderlich. Deshalb werden bei manchen Praktikumsversuchen auch weiterhin die genannten „klassischen“ (z.B. ein grafischer Geradenausgleich) neben modernen Arbeitstechniken gefordert.

Historisch bedingt, sind hier im Praktikum vor Jahren unter dem (mittlerweile fast vergessenen) Betriebssystem DOS die beiden BASIC-Programme "GERA" und "GERANULL" entwickelt worden, mit denen ein numerischer Geradenausgleich ausgeführt werden kann. Die Programme sind insbesondere auch für den Geradenausgleich von Exponential- und Potenzfunktionen eingerichtet und berechnen die Geradenparameter einschließlich ihrer Standardabweichungen. Diese Software ist auch heute noch unter dem Betriebssystem WINDOWS nutzbar (DOS-Fenster) und steht selbstverständlich weiterhin frei und kostenlos auf der Webseite des Grundpraktikums zur Verfügung. Da inzwischen andere und wesentlich professionellere Software (auch Freeware) existiert, wurden diese DOS-Programme nicht auf neuere Betriebssysteme portiert.

Im Rahmen dieses Skripts kann selbstverständlich nicht auf jede kommerziell oder frei verfügbare Software zur Behandlung und Darstellung von Messdaten eingegangen werden. Zu einigen Programmen (soweit sie für die Versuchsauswertung bisher verwendet werden oder auch empfohlen werden können) sind aber dennoch Anmerkungen erforderlich.

Erfahrungsgemäß werden für das Praktikum durch Studierende oft mit EXCEL Auswertungen (Ausgleichsrechnung bzw. Regression für funktionale Zusammenhänge) vorgenommen und Grafiken erstellt. Obwohl sehr weit verbreitet und genutzt, ist diese Software *für physikalische Zwecke nur bedingt geeignet*:

- Routineaufgaben der Tabellenkalkulation und einfachere statistische Analysen lassen sich schon nach kurzer Einarbeitungszeit sehr effizient erledigen. Nützliche statistische Funktio-

## 4. GRAFISCHE DARSTELLUNGEN

nen sind in der Funktionsbibliothek reichlich vorhanden; Diagramme lassen sich mithilfe eines Assistenten sehr schnell erstellen.

- Eine Ausgleichsrechnung bzw. Regressionsanalyse ist prinzipiell möglich für lineare, logarithmische, polynomische, potenzielle und exponentielle funktionale Abhängigkeiten (Trendlinien-Funktion im Diagrammfenster). Standardmäßig können aber nur das Bestimmtheitsmaß  $R^2$  und die Anpassungsparameter (Koeffizienten) der Regression (z.B. Anstieg und Achsenabschnitt einer Geraden) angezeigt werden – mit Hilfe der Funktion „Format, Markierte Trendlinie“ im Diagrammfenster-Menü.
- Die Standardabweichungen der Regressionskoeffizienten, die unverzichtbar sind, stehen aber nicht so offensichtlich zur Verfügung. Für lineare und exponentielle Zusammenhänge kann man sich mit den integrierten Funktionen RGP und RKP behelfen und mit der Funktion INDEX auf die Koeffizienten und ihre Standardabweichungen zugreifen. Das erfordert aber tiefer gehende Kenntnisse bzw. Recherchen in der Hilfe von EXCEL. Zudem beschränkt sich diese Regression auf den im vorigen Kapitel beschriebenen Spezialfall von Datenpunkten ohne Messunsicherheiten.
- Die integrierte Funktionsbibliothek ist für physikalische Zwecke meist unzureichend. Eine Erweiterung ist zwar mit VISUAL BASIC (VB) prinzipiell möglich, erfordert aber einen hohen Aufwand, der für eine einmalige Anwendung sicher nicht lohnt.
- Die grafische Darstellung lässt viele für physikalisch-technische Zwecke wichtige Optionen völlig vermissen oder nur über große Umwege zu; wie z. B. unterbrochene Achsen, individuell angepasste Fehlerkreuze für die einzelnen Datenpunkte und frei wählbare (mit beliebigen Bereichen!) logarithmische Achsenteilungen.

Unter Beachtung der Einschränkungen kann diese Software dennoch für die Auswertung von Versuchdaten aus dem Praktikum und deren grafische Darstellung verwendet werden, wenn die erforderlichen Ergebnisse (d.h. mit Angabe der Standardabweichungen!) erzielt werden können. Einige Hinweise für Lösungsansätze sind hier gegeben worden.

Sofern legal verfügbar (z.T. in den Rechnerpools des Computer- und Medienservices der HUB bzw. der jeweiligen Institute), kann für die im Praktikum bestehenden Anforderungen solche kommerzielle Software wie ORIGIN, MATHEMATICA, MATLAB, MAPLE o. ä. eingesetzt werden. Aus unserer Erfahrung wird wegen der sehr intuitiven Programm-Oberfläche und der vorwiegend technisch-physikalischen Ausrichtung ganz besonders ORIGIN empfohlen, das sich in der Praxis bewährt hat und in vielen Arbeitsgruppen des Instituts für Physik verwendet wird. ORIGIN steht auf den WINDOWS-PC im PC-Raum des Grundpraktikums zur Verfügung, setzt aber eine Anbindung/Anmeldung im Intranet am Lizenz-Server des Instituts für Physik voraus.

Außer den bereits genannten kommerziellen Programmen kann selbstverständlich auch jede Freeware eingesetzt werden, sofern sie den im Praktikum gestellten Anforderungen genügt:

- *SciGraphica* (siehe [scigraphica.sourceforge.net](http://scigraphica.sourceforge.net)) unter LINUX ist ORIGIN sehr ähnlich und scheint viel versprechend. Es fehlt leider derzeit noch die Möglichkeit der Bearbeitung von Daten und die Regressionsrechnung, grafische Darstellungen (2D, 3D, Polarkoordinaten) und eine Ausgabe als PostScript sind aber schon möglich.
- Verwendbar sind auch die Programme *xmgrace* (entwickelt für LINUX, portierbar auf WINDOWS) und *gnuplot* (entwickelt unter UNIX, lauffähig unter allen wichtigen Betriebssystemen).
- Eine besondere Empfehlung verdient aus unserer Sicht die Software *QtiPlot*, die einen Open Source Klon von ORIGIN darstellt und für WINDOWS, verschiedene LINUX-Distributionen und Mac OS X verfügbar ist. QtiPlot kann im LINUX-Rechnerpool des Instituts für Physik genutzt werden.



## 4. GRAFISCHE DARSTELLUNGEN

### 4.2 Grundbegriff der Skale

Zur grafischen Darstellung werden physikalische Größen durch eine geeignete Vorschrift eindeutig den Punkten einer Geraden zugeordnet. Da jede physikalische Größe  $a$  als Produkt aus Zahlenwert  $\{a\}$  und Einheit  $[a]$  darstellbar ist, genügt es, die Zahlenwerte  $\{a\}$  den Punkten einer Geraden zuzuordnen. Um die Schreibweise zu vereinfachen, wird nachfolgend auf die geschweifte Klammer verzichtet und für die Zahlenwerte  $x, y, \dots$  geschrieben.

Wenn die Zahlenwerte den Punkten einer Geraden zugeordnet werden, entsteht eine *Skale*. Am Ende der Skale (s. Abb. 17) kennzeichnet man durch die Angabe von Größe  $a$  und Einheit  $[a]$ , bei welcher Wahl der Einheit die Größe den Zahlenwert  $x$  hat. Der einer Länge  $l_x$  zugeordnete Zahlenwert  $x$  auf der Skale repräsentiert direkt die physikalische Größe.

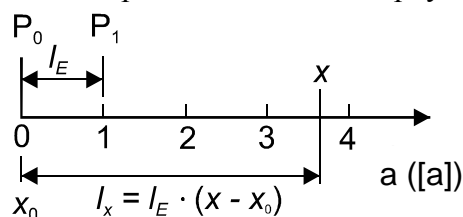


Abbildung 17: Lineare Skale

Aus einer Geraden entsteht eine Skale durch folgende Festlegungen:

- Einem Punkt  $P_0$  der Geraden wird ein Zahlenwert  $x_0$  als *Anfangspunkt* der Skale zugeordnet. Häufig wählt man dafür den Punkt  $x = 0$ , allerdings sind Skalen mit unterdrücktem Nullpunkt oft viel praktischer.
- Vom Anfangspunkt  $P_0$  ausgehend wird ein *Richtungssinn* definiert, meist gekennzeichnet durch eine Pfeilspitze.
- Es wird ein Punkt  $P_1$  gewählt und der Strecke  $\overline{P_0P_1}$  der Zahlenwert 1 zugeordnet, so dass auf der Geraden ein *Maßstab* oder eine *Einheitslänge*  $l_E$  festgelegt ist.
- Eine *Abbildungsfunktion*  $g(x)$  ordnet jedem Zahlenwert  $x$  auf der Skale eine Länge  $l_x = l_E(g(x) - g(x_0))$  zu.

### 4.3 Lineare Skalen

Der einfachste Fall einer Skale ist die lineare (reguläre) Skale (Abb. 17). Dem Anfangspunkt der Skale ist der Zahlenwert  $x = 0$  zugeordnet (der Pfeil kennzeichnet den Richtungssinn) und die Länge  $l_E$  legt den Maßstab der Skale fest. Die Abbildungsvorschrift der linearen Skale ordnet den Zahlenwerten  $x$  die Längen  $l_x$  zu, die proportional zu  $(x - x_0)$  oder bei der in der Abbildung gewählten Zuordnung  $x_0 = 0$  direkt proportional zu  $x$  sind. Hier gilt also  $l_x = x \cdot l_E$ , wobei  $l_x$  und  $l_E$  direkt z.B. in Millimetern gemessene Längen darstellen, die die Zahlenwerte  $x$  bzw. 1 repräsentieren.

Die Abbildungsfunktion der linearen Skale ist die Identität. Ein und demselben Zahlenwert können durch unterschiedliche Maßstabswahl verschieden lange Strecken auf einer Skale zugeordnet werden. Dabei sollten einige Kriterien berücksichtigt werden:

#### 1. Variabilitätsbereich

Sind  $x_{\min}$  und  $x_{\max}$  der kleinste und größte Zahlenwert, der darzustellen ist, und  $L$  die höchste zulässige Länge der Skale, so ergibt sich für den Maßstab die Einschränkung

$$l_E \leq \frac{L}{x_{\max} - x_{\min}}. \quad (58)$$

## 4. GRAFISCHE DARSTELLUNGEN

### Anwendungsbeispiel:

Für die Zeitwerte 80 s bis 140 s auf einer linearen Skale der Länge  $L = 130 \text{ mm}$  ergibt sich die Einheitslänge zu

$$l_E \leq \frac{130 \text{ mm}}{140 \text{ s} - 80 \text{ s}} \approx 2,17 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Man wird hier den nächstkleineren ganzzahligen Wert  $l_E = 2 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$  wählen und erhält so eine Skale der Länge 120 mm. Da der Variabilitätsbereich der Zahlenwerte den Wert  $x = 0$  nicht enthält, ordnet man dem Anfangspunkt  $P_0$  den Zahlenwert 80 zu, um die vorhandene Skalenlänge möglichst gut auszunutzen.

### 2. Genauigkeit

Bei grafischen Darstellungen muss die erreichbare Zeichengenauigkeit größer oder mindestens vergleichbar der Messunsicherheit sein. Bei einer sehr guten Darstellung auf Millimeterpapier können noch etwa  $\Delta l = 0,2..0,3 \text{ mm}$  geschätzt werden, woraus sich die Ungenauigkeit der dargestellten Zahlenwerte ergibt. Ist  $\Delta x$  der Zahlenwert der Messunsicherheit, so sollte  $\Delta x \cdot l_E \geq \Delta l$  sein. Für den Maßstab folgt daraus

$$l_E \geq \frac{\Delta l}{\Delta x} \approx \frac{0,2 \text{ mm}}{\Delta x}. \quad (59)$$

### Anwendungsbeispiel:

Für eine Zeitmessung mit der Unsicherheit  $\Delta x = 0,001 \text{ s}$  soll noch die dritte Dezimale grafisch darstellbar sein. Es ergibt sich eine Einheitslänge von

$$l_E \geq \frac{\Delta l}{\Delta x} = \frac{0,2 \text{ mm}}{0,001 \text{ s}} = 200 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Haben die darzustellenden Zahlenwerte nur einen kleinen Variabilitätsbereich, so kann mit dieser Einheitslänge gearbeitet werden. Ist aber der Variabilitätsbereich der Zahlenwerte groß (s. Beispiel oben), so führt diese Wahl der Einheitslänge zu einer unhandlichen Zeichnung, und die Aufgabe kann grafisch nicht gelöst werden.

### 3. Zweckmäßigkeit der Teilung

Für Ablesungen, Interpolationen u.ä. ist es zweckmäßig, wenn die Skale gut ablesbar ist. Die Einheitslänge sollte bei Darstellungen auf Millimeterpapier zu  $l_E = 1,2,4,5,10 \text{ mm}$  oder Vielfachen davon gewählt werden, weil dann das Eintragen und Ablesen der Zwischenwerte sehr einfach ist. Eine *Dreiteilung* der Skale ist *immer unzweckmäßig!*

## 4.4 Nichtlineare Skalen

Für die Konstruktion einer nichtlinearen Skale bleiben die oben genannten Festlegungen (s. Abschnitt 4.2) gültig; durch die Wahl der Abbildungsfunktion  $g(x)$  wird jedoch eine andere Zuordnung getroffen. Bei den nichtlinearen Skalen sind die Längen  $l_x$  den Zahlenwerten  $y = g(x)$  proportional, d. h.

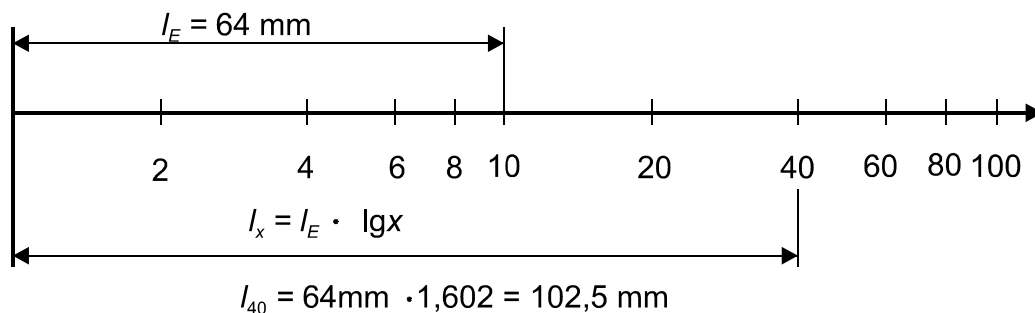
$$l_x = l_E \cdot (y - y_0) = l_E \cdot (g(x) - g(x_0)). \quad (60)$$

Schreibt man an die so konstruierte Skale nicht die Werte  $y$ , sondern die Werte  $x$ , dann entsteht so eine Nichtlinearität der Anordnung der  $x$ -Werte (s. Abb. 18).

Im Praktikum sind vor allem nichtlineare Skalen mit der Abbildungsfunktion des dekadischen Logarithmus  $g(x) = \lg x$  von Bedeutung. Es gilt aufgrund der Potenzgesetze (ganze Zahl  $n$ )

$$g(10^{n+1}) - g(10^n) = \lg 10^{n+1} - \lg 10^n = (n+1) \cdot \lg 10 - n \cdot \lg 10 = 10.$$

#### 4. GRAFISCHE DARSTELLUNGEN



**Abbildung 18: Logarithmische Skale**

Ordnet man dem Anfangspunkt  $P_0$  der Skale den Funktionswert  $g(10^n)$  zu, erhält man für die Einheitslänge der logarithmischen Teilung die Beziehung

$$\overline{P_0 P_1} = l_E \cdot (g(10^{n+1}) - g(10^n)) = 1. \quad (61)$$

**Bei einer logarithmisch geteilten Skale wächst beim Fortschreiten um eine Einheitslänge  $l_E$  der Funktionswert  $x$  um eine Größenordnung.**

Die Einheitslänge  $l_E$  einer nichtlinearen Skale kann (unter Beachtung der nichtlinearen Abbildungsfunktion  $g(x)$ ) willkürlich gewählt werden; sollte aber nach den gleichen praktischen Kriterien wie bei der linearen Skale (s. Abschnitt 4.3) erfolgen.

#### 4.5 Darstellungen linearer Abhängigkeiten

Die mathematisch einfachste Funktion ist die lineare Abhängigkeit  $y = a \cdot x + b$  zwischen zwei Variablen  $x$  und  $y$ , die bei Darstellung mit linearer Skalierung eine Gerade ergibt. Für diesen Zweck könnte auch noch normales Millimeterpapier eingesetzt werden.

##### **Anwendungsbeispiel:**

Zur Bestimmung der Urspannung  $U_0$  (Spannung ohne Belastung) und des Innenwiderstandes  $R_i$  eines galvanischen Elementes (chemische Batterie) wird die grafische Auswertung eines linearen Zusammenhangs zwischen zwei Messgrößen gewählt. Bei Belastung des Elementes mit dem Strom  $I$  beträgt die Spannung  $U$  an den Ausgangsklemmen des Elementes  $U = U_0 - R_i \cdot I$ , d.h. zwischen den Messgrößen  $U$  und  $I$  besteht ein linearer Zusammenhang. In der grafischen Darstellung  $U = f(I)$  (s. Abb. 19) kann durch die  $n$  Messpunkte  $(I_i, U_i)$  nach Augenmaß eine ausgleichende Gerade (ausgezogene Linie) gelegt werden. Dabei ist zu beachten, dass die Gerade wegen der Forderung  $\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b$  (folgt aus den Überlegungen im vorigen Kapitel) durch den so genannten *Schwerpunkt*  $(\bar{x}, \bar{y})$  der Messpunkte mit den Koordinaten

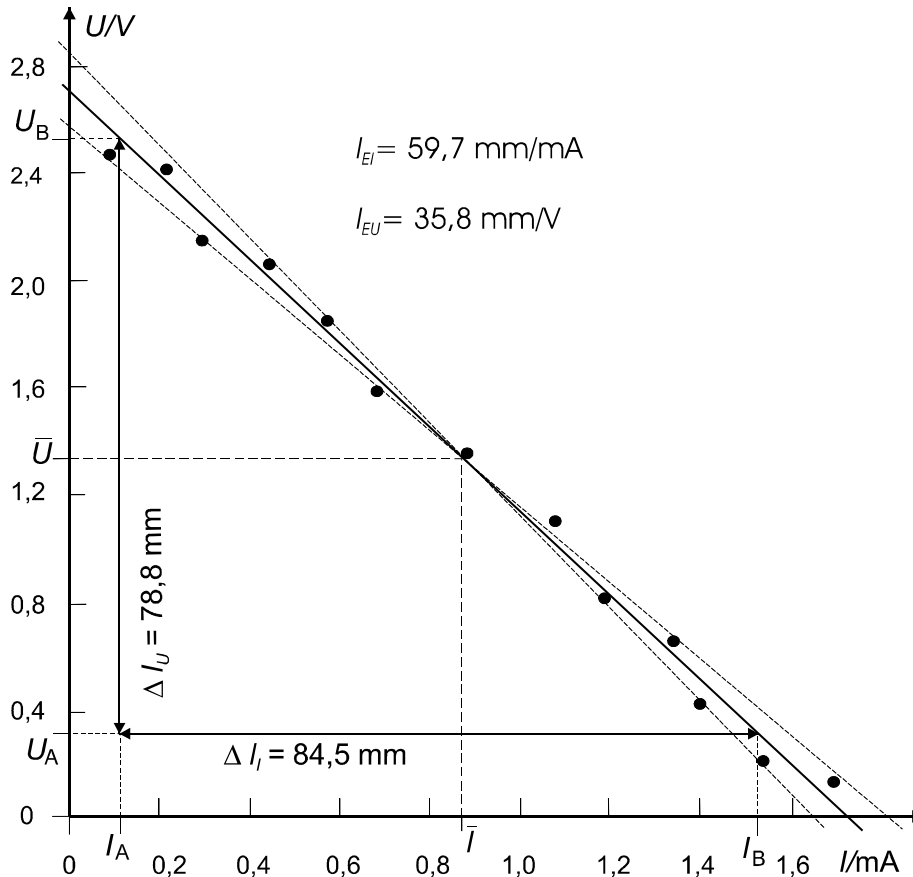
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{und} \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

geführt werden muss. Den Innenwiderstand  $R_i$  erhält man direkt als (negativen) Anstieg  $a$  der Geraden aus den Punkten  $(I_A, U_A)$  und  $(I_B, U_B)$  des Anstiegsdreiecks oder aus den in Millimetern gemessenen Längen  $\Delta I$  und  $\Delta U$  mit

$$a = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{U_B - U_A}{I_B - I_A} = \frac{0,32 - 2,49}{1,51 - 0,11} \text{ V} \cdot \text{mA}^{-1} = -1,55 \text{ k}\Omega \quad \text{oder auch}$$

#### 4. GRAFISCHE DARSTELLUNGEN

$$a = \frac{-\Delta l_U}{l_{EU}} \cdot \frac{\Delta l_I}{l_{EI}} = \frac{-78,8 \text{ mm}}{35,8 \text{ mm} \cdot \text{V}^{-1}} \cdot \frac{84,5 \text{ mm}}{59,7 \text{ mm} \cdot \text{mA}^{-1}} = -1,555 \text{ k}\Omega .$$



**Abbildung 19:** Darstellung der linearen Abhängigkeit zwischen Klemmspannung  $U$  und Laststromstärke  $I$  eines galvanischen Elementes

Die beiden Punkte des Anstiegsdreiecks wählt man zweckmäßig möglichst weit auseinander liegend, um die relativen Abweichungen bei der Ablesung möglichst klein zu halten. Der Innenwiderstand ist dann  $R_i = -a = 1,55 \text{ k}\Omega$ . Die Urspannung  $U_0$  ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Geraden mit der Spannungsachse zu  $U_0 = 2,71 \text{ V}$  oder auch rechnerisch mit  $U_0 = \bar{U} + R_i \cdot \bar{I} = 1,33 \text{ V} + 1,55 \text{ k}\Omega \cdot 0,87 \text{ mA} = 2,68 \text{ V}$ .

Eine grafische Auswertung gestattet auch grobe Abschätzungen von Grenzen („Größtfehlerabschätzungen“) für die beiden Geradenparameter Anstieg und Achsenabschnitt (im gewählten Beispiel von  $R_i$  und  $U_0$ ):

Durch die Messpunkte legt man zwei weitere Gerade (gestrichelt in Abb. 19) derart, dass die Streuung der Messpunkte im Wesentlichen erfasst wird und beide Geraden wiederum durch den Schwerpunkt verlaufen. Einige wenige Messpunkte (s. hierzu die Ausführungen zum 68%-Vertrauensniveau in Abschnitt 3.4.2) dürfen auch außerhalb des durch die gestrichelten Geraden abgegrenzten Bereiches liegen. Wegen des *subjektiven Ermessensspielraumes* kann dieses Verfahren tatsächlich *nur zur groben Abschätzung von Unsicherheiten* dienen - im Unterschied zu den objektiven Ergebnissen einer linearen Regression (s. Abschnitt 3.7). Man bestimmt die Anstiege  $a_1$  und  $a_2$  der beiden gestrichelten Geraden und berechnet als Unsicherheit des Innenwiderstandes

$$\Delta R_i = \Delta a = \pm \frac{|a_1 - a_2|}{2} = \pm \frac{|1,78 - 1,35|}{2} \text{ k}\Omega = \pm 0,215 \text{ k}\Omega .$$

## 4. GRAFISCHE DARSTELLUNGEN

Die Unsicherheit der Quellspannung  $\Delta U_0$  entnimmt man entweder aus den Schnittpunkten der beiden gestrichelten Geraden mit der Spannungsachse oder wendet das Fortpflanzungsgesetz für Messunsicherheiten auf  $U_0 = \bar{U} + R_i \cdot \bar{I}$  an. Hier im Beispiel ergibt sich daraus

$$\Delta U_0 = \pm \left| \frac{\partial U_0}{\partial R_i} \cdot \Delta R_i \right| = \pm |\bar{I} \cdot \Delta R_i| = \pm 0,87 \text{ mA} \cdot 0,215 \text{ k}\Omega = \pm 0,187 \text{ V},$$

wobei die Mittelwerte  $\bar{U}$  und  $\bar{I}$  als „fehlerfrei“ anzusehen sind.

Das vollständige Ergebnis mit Angabe der abgeschätzten Obergrenzen für die Unsicherheiten lautet hier schließlich  $R_i = (1,6 \pm 0,2) \text{ k}\Omega$  und  $U_0 = (2,7 \pm 0,2) \text{ V}$ .

### 4.6 Darstellungen exponentieller Abhängigkeiten

Spezielle Koordinatenpapiere, auf denen eine Achse mit logarithmischer Skale und eine Achse mit linearer Skale versehen sind, heißen *Exponentialpapiere*, weil mit ihrer Hilfe Exponentialfunktionen als Geraden dargestellt werden können.

Folgt eine darzustellende funktionale Abhängigkeit  $y(x)$  einem Exponentialgesetz wie

$$y(x) = y_0 \cdot e^{k \cdot x} \quad (62)$$

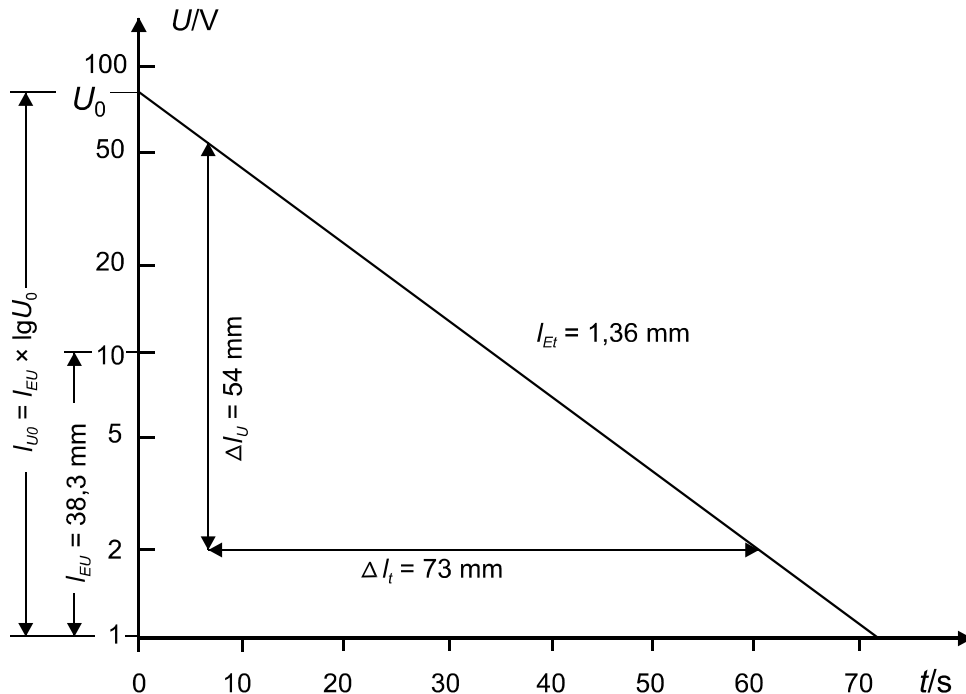
mit den Konstanten  $y_0$  und  $k$ , so wird man zweckmäßig wegen

$$\ln y = k \cdot x + \ln y_0 \quad (63a)$$

bzw. (mit Übergang zum dekadischen Logarithmus)

$$\lg y = k \cdot \lg e \cdot x + \lg y_0 \quad (63b)$$

eine einfach geteilte logarithmische (oder auch nur kurz „logarithmische“) Darstellung auswählen, um eine grafische Linearisierung von  $y(x)$  wie im Beispiel in Abb. 20 zu erreichen.



**Abbildung 20:** Darstellung einer exponentiellen Abhängigkeit am Beispiel der Entladung eines Kondensators

## 4. GRAFISCHE DARSTELLUNGEN

Bei Auftragung der Messgröße  $y$  mit logarithmischer Skalierung über  $x$  mit linearer Skalierung ergibt sich für die Längen  $l_y$  und  $l_x$  ein linearer Zusammenhang  $l_y = l_{y_0} + a \cdot l_x$ . Mit den in Abschnitt 4.4 eingeführten Skalendefinitionen folgt daraus unmittelbar

$$l_{Ey} \cdot \lg y = l_{Ey} \cdot \lg y_0 + a \cdot l_{Ex} \cdot x. \quad (64)$$

Aus der grafischen Darstellung lassen sich direkt die Konstanten  $y_0$  und

$$k = a \cdot \frac{l_{Ex}}{l_{Ey}} \cdot \frac{1}{\lg e} \quad \text{mit} \quad a = \frac{\Delta l_y}{\Delta l_x} \quad (65)$$

bestimmen, wobei für  $\Delta l_y$  und  $\Delta l_x$  direkt die in Millimetern gemessenen Längen oder die entsprechenden Funktionswerte gewählt werden können.

### Anwendungsbeispiel:

Es wird die Entladung eines Kondensators mit der Kapazität  $C$  über einen Widerstand  $R = 3 \text{ M}\Omega$  untersucht, der mit einer Anfangsspannung  $U_0$  aufgeladen wurde. Die zeitliche Abhängigkeit für die Spannung am Kondensator  $U(t)$  wird mit dem Exponentialgesetz

$$U = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

beschrieben. Die aufgenommenen Messwerte ergeben eine grafische Darstellung (s. Abb. 20), aus der die Anfangsspannung  $U_0$  und die Kapazität  $C$  bestimmt werden können.

Am Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse wird die Länge  $l_{y_0}$  in Millimetern abgelesen gemäß

$$l_{y_0} = l_{Ey} \cdot \lg y_0 \quad \text{bzw.} \quad \lg y_0 = \frac{l_{y_0}}{l_{Ey}}, \quad (66)$$

woraus hier mit  $l_{U_0} = l_{EU} \cdot \lg U_0$  unmittelbar  $\lg U_0 = \frac{72 \text{ mm}}{38,3 \text{ mm} \cdot V^{-1}}$  und  $U_0 \approx 75,8 \text{ V}$  folgt.

Die  $k$ -Bestimmung kann entweder aus zwei abgelesenen Wertepaaren  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  erfolgen; oder auch aus den direkt in Millimetern gemessenen Längen  $\Delta l_x$  und  $\Delta l_y$  (Anstiegsbestimmung):

$$k \cdot \lg e = \frac{\Delta \lg y}{\Delta x} = \frac{\lg y_1 - \lg y_2}{x_1 - x_2} \quad (67a)$$

$$k \cdot \lg e = \frac{\Delta l_y}{l_{Ey}} : \frac{\Delta l_x}{l_{Ex}} \quad (67b)$$

Im konkreten Beispiel liefert (67a)  $k \cdot \lg e = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot \lg e = \frac{\lg 50 - \lg 2}{6,65 - 60} s^{-1} \approx -0,0262 s^{-1}$ , wäh-

rend aus (67b)  $k \cdot \lg e = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot \lg e = -\frac{54}{38,3} : \frac{73}{1,36} s^{-1} \approx -0,0263 s^{-1}$  folgt. Da  $R = 3 \text{ M}\Omega$  be-

kannt ist, berechnet sich die Kapazität des Kondensators zu  $C \approx 5,5 \mu\text{F}$ . Auf die Bestimmung der Unsicherheiten aus der grafischen Darstellung, die grundsätzlich in Analogie zu Abschnitt 4.5 (unter Berücksichtigung der Umrechnung in (63)) erfolgen kann, wird an dieser Stelle verzichtet.

### 4.7 Darstellungen von potenziellen Abhängigkeiten

Spezielle Koordinatenpapiere, auf denen beide Achsen logarithmische Skalen tragen, nennt man *doppeltlogarithmisches oder Potenzpapier*, weil darauf Potenzfunktionen als Gerade dargestellt werden können.

Für funktionale Abhängigkeiten  $y(x)$ , die einem Potenzgesetz wie

$$y = y_0 \cdot x^p \quad (68)$$

#### 4. GRAFISCHE DARSTELLUNGEN

genügen, ist eine doppelt geteilte logarithmische (oder auch kurz „doppelt-logarithmische“) Darstellung wegen

$$\ln y = p \cdot \ln x + \ln y_0 \quad \text{bzw.} \quad \lg y = p \cdot \lg x + \lg y_0$$

offensichtlich die beste Wahl für die grafische Linearisierung.

Trägt man die Messgrößen  $y$  und  $x$  derart auf, dann ergibt sich für die Längen  $l_y$  und  $l_x$  ein linearer Zusammenhang wie  $l_y = l_{y0} + a \cdot l_x$ . Die Längen  $l_y$  und  $l_x$  entsprechen aufgrund der Definition der logarithmischen Skale direkt den physikalischen Größen, so dass

$$l_{E_y} \cdot \lg y = l_{E_y} \cdot \lg y_0 + a \cdot l_{E_x} \cdot \lg x \quad (69)$$

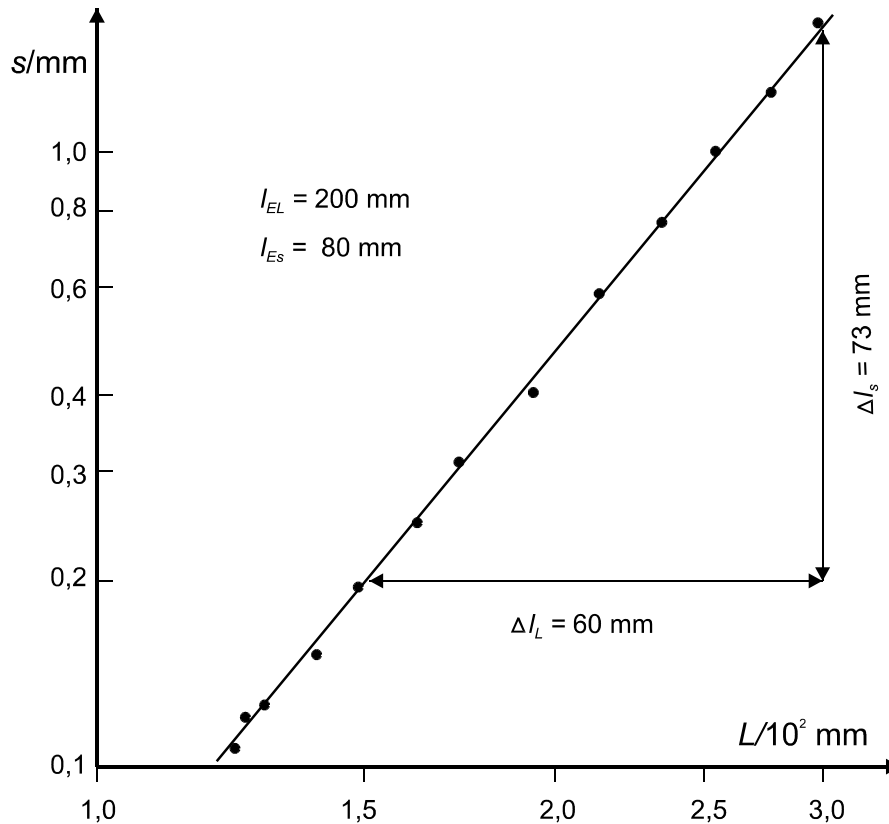
gilt und somit aus der grafischen Darstellung die Konstanten  $y_0$  und  $p = a \cdot \frac{l_{E_x}}{l_{E_y}}$  bestimmt werden können.

#### Anwendungsbeispiel:

Als Beispiel sei die Durchbiegung  $s$  eines Trägers betrachtet, der auf zwei Stützen im Abstand  $L$  aufliegt und in der Mitte durch eine Kraft  $F$  belastet wird. Die Durchbiegung  $s$  ist gegeben durch

$$s = \frac{F}{48 \cdot E \cdot J} \cdot L^3,$$

wobei  $E$  der Elastizitätsmodul und  $J$  das Flächenträgheitsmoment ist. Zur Überprüfung der  $L^3$ -Abhängigkeit werden die Messwerte  $(L_i, s_i)$  doppelt-logarithmisch dargestellt und der Exponent ermittelt (Abb. 21).



**Abbildung 21:** Darstellung einer potenziellen Abhängigkeit am Beispiel der Durchbiegung eines Trägers als Funktion seiner Länge

Am Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse wird die Länge  $l_{y0}$  in Millimetern abgelesen mit

#### 4. GRAFISCHE DARSTELLUNGEN

$$l_{y0} = l_{Ey} \cdot \lg y_0 \text{ bzw. } \lg y_0 = \frac{l_{y0}}{l_{Ey}}. \quad (70)$$

Die Bestimmung der Konstanten  $y_0$  ist nur dann so einfach möglich, wenn der Schnittpunkt  $x = 10^0$  in der grafischen Darstellung ablesbar ist. Andernfalls liest man bei  $x = 10^i$  (ganze Zahl  $i$ ) den Wert  $l_{yi} = l_{Ey} \cdot \lg y_i$  ab. Dann ergibt sich aus  $y_i = y_0 \cdot x^p = y_0 \cdot 10^{ip}$  bzw.  $\lg y_i = \lg y_0 + i \cdot p$  schließlich

$$\lg y_0 = \frac{l_{yi}}{l_{Ey}} - i \cdot \frac{\Delta l_y}{\Delta l_x} \cdot \frac{l_{Ex}}{l_{Ey}}. \quad (71)$$

Die Anstiegsbestimmung kann entweder aus zwei abgelesenen Wertepaaren  $(x_1, y_1)$  bzw.  $(x_2, y_2)$  oder aus den direkt in Millimetern gemessenen Längen  $\Delta l_x$  und  $\Delta l_y$  erfolgen mit

$$p = \frac{\Delta \lg y}{\Delta \lg x} = \frac{\lg y_1 - \lg y_2}{\lg x_1 - \lg x_2} \text{ bzw.} \quad (72a)$$

$$p = \frac{\Delta \lg y}{\Delta \lg x} = \frac{\Delta l_y}{l_{Ey}} : \frac{\Delta l_x}{l_{Ex}}. \quad (72b)$$

Für das gewählte Beispiel führt das zu einem Wert des Exponenten von

$$p = \frac{\lg 1,65 - \lg 0,20}{\lg 3,00 - \lg 1,50} \approx 3,04 \text{ bzw. } p = \frac{73 \text{ mm}}{80 \text{ mm}} : \frac{60 \text{ mm}}{200 \text{ mm}} \approx 3,04;$$

die theoretisch erwartete  $L^3$ -Abhängigkeit ist also im Rahmen der erzielten Messunsicherheit bestätigt.

#### 4.8 Wahrscheinlichkeitsnetze

Für die statistische Auswertung großer Stichproben oder für die grafische Ermittlung des Mittelwertes und der Standardabweichung kann ein Wahrscheinlichkeitsnetz bzw. Wahrscheinlichkeitspapier verwendet werden. Das Wahrscheinlichkeitsnetz ist ein herkömmliches grafisches Hilfsmittel, das vor allem vor Einführung der elektronischen Datenverarbeitung breite Anwendung fand, um einigermaßen schnell und effizient eine Verteilungsüberprüfung von Daten zu ermöglichen.

Allgemein bekannt ist vor allem das Wahrscheinlichkeitsnetz der Normalverteilung: Die Abszisse des Papiers hat eine lineare Skale und die Ordinate trägt eine Skale, die sich aus der Gaußschen Fehlerfunktion  $\Phi(x)$  (s. Abschnitt 3.4) ergibt. Die Fehlerfunktion ergibt sich durch Integration der Dichte der Normalverteilung; sie gibt die Häufigkeit der zufälligen Abweichungen an, die unterhalb  $x$  liegen. In Form einer Doppelskale (s. Abb. 22) wird hier ein Überblick über die Funktionswerte der Fehlerfunktion für eine normierte Standardabweichung  $\sigma = 1$  mit

$$y = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{x'^2}{2}\right) dx' \quad (73)$$

und ihre Umkehrfunktion  $x = \Phi^{-1}(y)$  gegeben.

Gemäß den Ausführungen über die zufälligen Abweichungen (s. Abschnitt 3.4) genügen sie der Normalverteilung; ihre Summenhäufigkeitsverteilung ist die Fehlerfunktion. Deshalb muss die Umkehrfunktion  $x = \Phi^{-1}(y)$  als Abbildungsfunktion der Skale gewählt werden, um eine Summenhäufigkeitsverteilung als Gerade darzustellen.

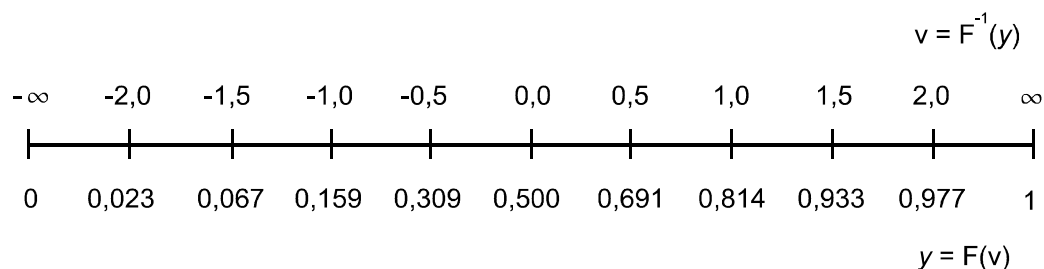
Auf der Ordinate und Abszisse werden deshalb die Skalen des Wahrscheinlichkeitsnetzes nach folgenden Gleichungen abgetragen



#### 4. GRAFISCHE DARSTELLUNGEN

$$l_y = l_{Ey} \cdot \{\Phi^{-1}(y) - \Phi^{-1}(y_0)\} \text{ bzw.} \quad (74a)$$

$$l_x = l_{Ex} \cdot (x - x_0). \quad (74b)$$



**Abbildung 22: Funktionswerte der Gaußschen Fehlerfunktion und ihrer Umkehrfunktion**

Den ausgezeichneten Punkt  $P_0$  legt man in die halbe Höhe des Skalenbereiches und ordnet ihm den Wert  $y_0 = 0,5$  (oder 50 %) zu. Die Teilung des Wahrscheinlichkeitsnetzes entspricht bis auf den frei wählbaren Faktor der Einheitslänge  $l_{Ey}$  der oben skizzierten Skale (Abb. 22). Die Werte  $\Phi^{-1}(y)$  werden linear abgetragen und mit den zugehörigen  $y$ -Werten bezeichnet. Das in dieser Weise konstruierte Wahrscheinlichkeitspapier liegt gedruckt vor und kann auch zum eigenen Ausdruck von der Webseite des Grundpraktikums herunter geladen werden. Die Wahl der Abszissenskale wird zweckmäßig den vorliegenden Zahlenwerten der Stichprobe angepasst.

#### Anwendungsbeispiel:

Es erfolgte mit einer Stichprobe die Messung des Durchmessers von 125 Kugellagerkugeln. Die Messwerte zwischen 65,130 und 65,270 mm ergaben die in der folgenden Tabelle ausgewiesenen Häufigkeiten:

| Durchmesser<br>$d_i$ (mm) | Häufigkeiten         |                      | Summenhäufigkeit<br>$H(d_i)\%$ |
|---------------------------|----------------------|----------------------|--------------------------------|
|                           | absolute<br>$k(d_i)$ | relative<br>$h(d_i)$ |                                |
| 65,130                    | 13                   | 0,104                | 10,4                           |
| 151                       | 16                   | 0,128                | 23,2                           |
| 168                       | 16                   | 0,128                | 36,0                           |
| 180                       | 22                   | 0,176                | 53,6                           |
| 199                       | 27                   | 0,216                | 75,2                           |
| 220                       | 18                   | 0,144                | 89,6                           |
| 270                       | 13                   | 0,104                | 100,00                         |

Für die grafische Darstellung (Abb. 23) wurde die linear geteilte Abszisse dem Variabilitätsbereich der Durchmesserwerte angepasst. Die Ordinate ist in Prozenten angegeben und entsprechend der inversen Fehlerfunktion geteilt. Man entnimmt für  $y = 50\%$  den arithmetischen Mittelwert  $\bar{d} = 65,176 \text{ mm}$  sowie die doppelte Standardabweichung  $2s = 0,071 \text{ mm}$  und bildet damit schließlich  $d = \bar{d} \pm s$ . Die gleichen Ergebnisse würde man natürlich auch rechnerisch erhalten (s. Abschnitt 3.5).

#### 4. GRAFISCHE DARSTELLUNGEN

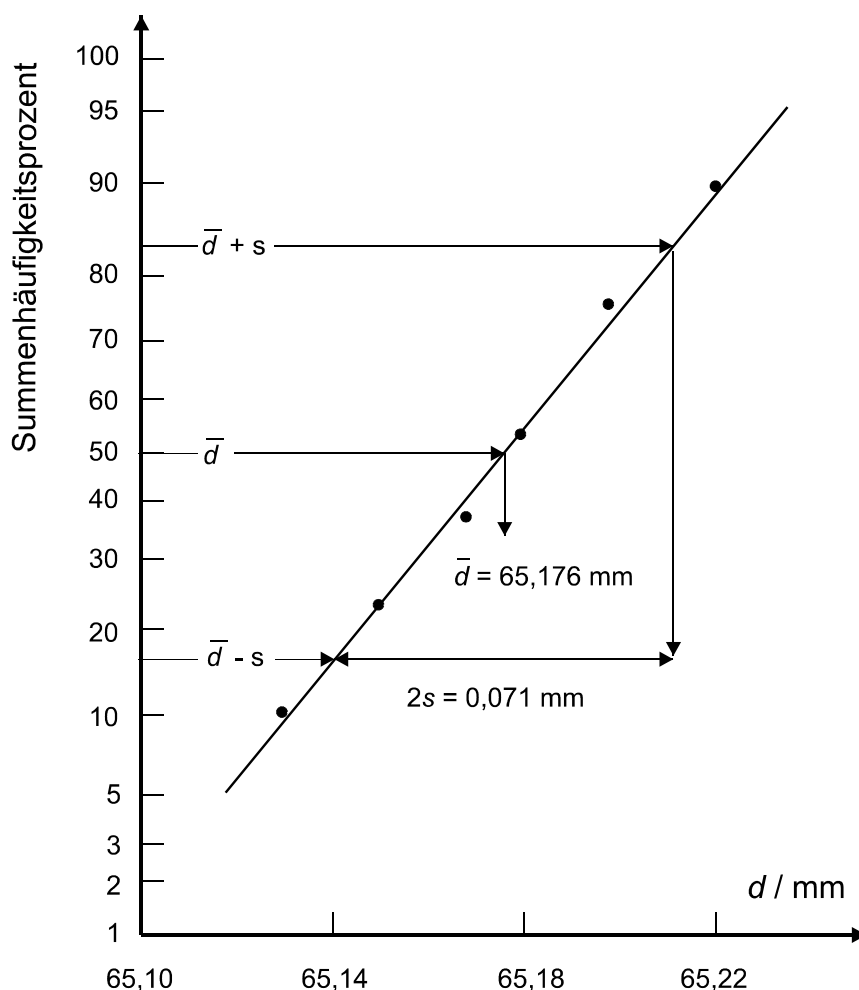


Abbildung 23: Darstellung einer Normalverteilung im Wahrscheinlichkeitsnetz

Sämtliche in diesem Kapitel erwähnten Spezialpapiere (und weitere nützliche!) sind auf der Webseite des Physikalischen Grundpraktikums unter „Downloads und Links“ (weiter mit „Spezialpapiere“) als pdf-Dateien zum lokalen Ausdruck und eigenen Gebrauch frei verfügbar.

Wesentlich praktischer, bequemer und effizienter ist natürlich die Verwendung der entsprechenden Koordinatensysteme bei der grafischen Darstellung und Auswertung von Messdaten mithilfe von geeigneter Software (s. Abschnitt 4.1). Dafür eignen sich nach unserer Erfahrung die Programme ORIGIN und QtiPlot besonders gut, so dass dafür eine unbedingte Empfehlung gegeben wird!

## 5. ÜBUNGSAUFGABEN

Zur Festigung der beim Studium dieser Skripte gewonnenen eigenen Erkenntnisse und als praktische Übung der notwendigen Fertigkeiten wird die Abarbeitung der nachfolgend gestellten Übungsaufgaben zuhause und möglichst in den ersten Wochen des Praktikums sehr nachdrücklich *empfohlen*.

### 5.1 Messergebnis einer direkt gemessenen Größe

Die Wägung eines Holzkörpers der Dichte  $\rho_H = 600 \text{ kg/m}^3$  mit einer Balkenwaage (systematischer Restfehler  $e_s = 0,01 \text{ g}$ ) ergab folgende Messwerte

|             |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| <b>Nr.</b>  | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
| <b>m(g)</b> | 8,54 | 8,49 | 8,53 | 8,51 | 8,47 | 8,50 | 8,48 | 8,55 | 8,52 | 8,51 |

- a) Die Massennormale bestanden aus Messing (Dichte  $\rho_M = 8,4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ). Ist eine Korrektur wegen des unterschiedlichen Auftriebes von Holzkörper und Massennormalen notwendig?
- b) Man bestimme nach dem in Abschnitt 3.5 beschriebenen Verfahren das Messergebnis!

### 5.2 Lineare Regression

An einem auf der Autobahn fahrenden Kraftfahrzeug werden folgende Messwerte bei einer Weg-Zeit-Messung erhalten:

|               |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| <b>t (s)</b>  | 0    | 20   | 38   | 66   | 82   | 118  | 124  | 142  | 176  | 214  |
| <b>s (km)</b> | 85,0 | 85,5 | 86,0 | 86,5 | 87,0 | 87,5 | 88,0 | 88,5 | 89,0 | 90,0 |

- a) Man stelle die Messwerte in der Form  $s = f(t)$  dar und mittle grafisch und rechnerisch!
- b) Aus dem Anstieg der Geraden bestimme man die Geschwindigkeit des Kraftfahrzeuges in m/s und km/h!

### 5.3 Darstellung und Regression für Exponentialfunktionen

Die Messung des Sättigungsdampfdruckes  $p_s$  von Wasser ergab in Abhängigkeit von der Temperatur folgende Werte:

|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |     |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|
| <b>t (°C)</b>   | 10   | 20   | 30   | 40   | 50   | 60   | 70   | 80   | 90   | 100 |
| <b>T (K)</b>  |      |      |      |      |      |      |      |      |      |     |
| <b>T<sup>-1</sup> (10<sup>-3</sup>K<sup>-1</sup>)</b> |      |      |      |      |      |      |      |      |      |     |
| <b>p<sub>s</sub> (kPa)</b>                            | 1,23 | 2,33 | 4,25 | 7,37 | 12,3 | 19,9 | 31,1 | 44,7 | 70,0 | 101 |
| <b>ln p<sub>s</sub></b>                               |      |      |      |      |      |      |      |      |      |     |

Theoretisch besteht zwischen der absoluten Temperatur T und dem Sättigungsdampfdruck der Zusammenhang

$$p_s = p_o \exp\left(-\frac{Q_o}{RT}\right)$$

mit der molaren Verdampfungswärme  $Q_o$  und der molaren Gaskonstante  $R = 8,315 \text{ J/mol K}$ .

## 5. ÜBUNGSAUFGABEN

- Man stelle  $\ln p_s = f(1/T)$  grafisch mit linearen Skalen dar!
- Man stelle  $p_s = f(1/T)$  grafisch mit einer logarithmischen Skale dar!
- Man bestimme in beiden Darstellungen den Anstieg und ermittle die molare Verdampfungswärme in J/mol!

### 5.4 Darstellung und Regression für Potenzfunktionen

Beim freien Fall eines Körpers ermittelt man folgende Messwerte bei einer Weg-Zeit-Messung:

|                                      |      |       |       |       |       |        |        |
|--------------------------------------|------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| <b>s (m)</b>                         | 7,66 | 22,35 | 46,85 | 62,15 | 81,25 | 102,25 | 124,95 |
| <b>t (s)</b>                         | 1,0  | 2,0   | 3,0   | 3,5   | 4,0   | 4,5    | 5,0    |
| <b>t<sup>2</sup> (s<sup>2</sup>)</b> |      |       |       |       |       |        |        |
| <b>s-s<sub>0</sub> (m)</b>           |      |       |       |       |       |        |        |

- Man prüfe den Zusammenhang  $s = s_0 + \frac{1}{2} a t^2$  durch grafische Darstellung  $s = f(t^2)$  und berechne aus dem Anstieg die Beschleunigung  $a$  in  $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ !
- Aus der Darstellung entnehme man den Wert  $s_0$  für  $t = 0$  durch Extrapolation und berechne  $s - s_0$  !
- Man trage  $s - s_0 = f(t)$  doppeltlogarithmisch auf und ermittle den Anstieg der Geraden!