F4 BESTIMMUNG VON FEDERKONSTANTEN

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Wichtige physikalische Grundbegriffe: *Trägheitsgesetz, Grundgesetz der Dynamik, Federkonstante, Federkraft, harmonische Schwingung, Frequenz, Periodendauer, Amplitude*

In diesem Versuch soll die Federkonstante einer Schraubenfeder mit drei verschiedenen Methoden bestimmt werden. Bei der Auswertung der Ergebnisse sind Grundbegriffe und Methoden der Fehlerrechnung und –analyse gezielt anzuwenden und zu üben

1. Statische Messung der Federkonstanten: Wird eine am oberen Ende eingespannte Schraubenfeder am unteren Ende durch Anhängen einer Masse m belastet, so wird die Feder gedehnt und es stellt sich eine neue Ruhelage ein (Abb. 1, statischer Fall). Die Gewichtskraft $\vec{F}_G = m \cdot g$ und die durch die elastische Verformung entstehende Federkraft $\vec{F}_F = -k \cdot x$ (mit k als Federkonstante) stehen im Gleichgewicht (Newtonsches Trägheitsgesetz)

$$\vec{F}_G + \vec{F}_F = 0\,. \tag{1}$$

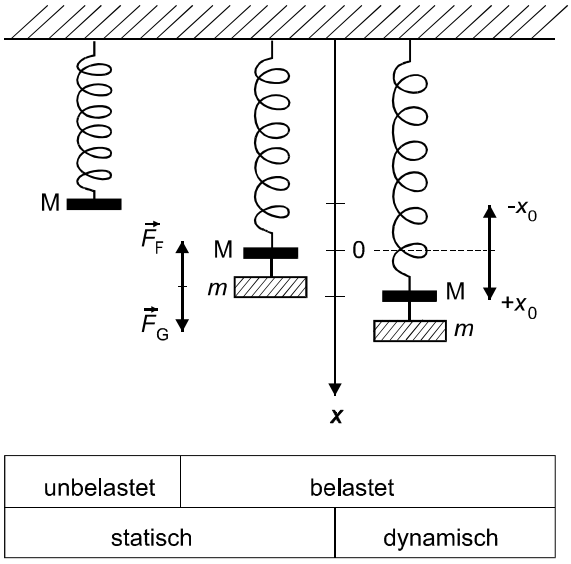

Abbildung 1: Statische und dynamische Belastung einer Schraubenfeder

Durch Einsetzen der Beziehungen für beide Kräfte und einfache Umstellung ergibt sich daraus

$$x = \frac{m \cdot g}{k}\,. \tag{2}$$

Die statische Auslenkung x der Schraubenfeder muss demnach linear von der Belastung m abhängig sein. Durch die experimentelle Untersuchung der Abhängigkeit x(m) kann sowohl die Linearität des Federkraftgesetzes $\vec{F}_F = -k \cdot x$ überprüft als auch die Federkonstante k bestimmt werden.

2. Dynamische Messung der Federkonstanten: Lenkt man eine mit der Masse m belastete Feder aus ihrer Ruhelage aus (Abb. 1, dynamischer Fall), dann wirkt eine rücktreibende Federkraft $\vec{F}_F = -k \cdot x$ und die Masse m erfährt eine Beschleunigung $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = \frac{F_F}{m}$ nach dem Newtonschen Grundgesetz der Dynamik. Für die weiteren Betrachtungen sollen jegliche Reibungskräfte vernachlässigt werden; daher ergibt sich aus der Newtonschen Bewegungsgleichung hier die einfachste Form einer Schwingungsdifferentialgleichung mit

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0\,, \tag{3}$$

die eine freie ungedämpfte Schwingung beschreibt. Mit den willkürlich ausgewählten Anfangsbedingungen $x(t=0)=x_0$ (Anfangslage) und $\dot{x}(t=0)=v_0=0$ (Anfangsgeschwindigkeit) lautet ihre Lösung

$$x(t)=x_0\cdot\cos(\omega\cdot t)\,, \tag{4}$$

wobei physikalisch x_0 als Amplitude und $\omega=\sqrt{k/m}$ als Kreisfrequenz der freien ungedämpften Federschwingung bezeichnet werden. Der Körper der Masse m schwingt nach Auslenkung (aus der Gleichgewichts- bzw. Ruhelage um x_0) in Form einer harmonischen Schwingung mit der Periodendauer

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,, \tag{5}$$

die experimentell direkt gemessen werden kann. Aus (5) ist bei bekannter Masse m die Federkonstante k bestimmbar.

3. Berechnung der Federkonstanten aus der Geometrie und den Materialeigenschaften der Schraubenfeder: Durch eine Auslenkung aus der Ruhelage wird die Schraubenfeder gedehnt, und damit der gesamte Federdraht auf sog. Torsion (svw. „Verdrehung“ oder „Verdrillung“) beansprucht. Ohne weitere Herleitung sei hier eine Beziehung angegeben, die es gestattet, aus dem sog. Torsionsmodul G (als Materialkonstante des Federdrahtes) und den geometrischen Daten der Schraubenfeder (Drahtlänge l, Drahtdurchmesser d und Wickelradius r) die Federkonstante k zu berechnen:

$$k=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{G\cdot d^4}{l\cdot r^2}\,. \tag{6}$$

AUFGABEN

1. Aus dem statischen Verhalten einer Schraubenfeder ist deren Federkonstante experimentell zu bestimmen. Dazu ist gemäß Beziehung (2) die statische Auslenkung x in Abhängigkeit von der Belastung m mit verschiedenen Massestücken zu messen. Die Daten sind in der Form x = x(m) als Diagramm grafisch darzustellen und daraus die Federkonstante k zu ermitteln. Für die zu erwartende lineare Abhängigkeit ist sowohl mit einfacher grafischer Methode („Steigungsdreieck“) als auch numerisch (Geradenausgleichsrechnung, lineare Regression) der Anstieg von x = x(m) und daraus die Federkonstante (jeweils auch einschließlich der Messunsicherheit) zu bestimmen.
2. Mithilfe des dynamischen Verhaltens des Federschwingers ist für dieselbe Feder die Federkonstante aus der experimentell beobachteten Periodendauer der Schwingung zu bestimmen (jeweils auch einschließlich der Messunsicherheit). Dazu ist Formel (5) bei bekannter und sinnvoll gewählter Masse m zu nutzen.
3. Mithilfe von Formel (6) ist aus den Daten der Schraubenfeder, die am Versuchsplatz angegeben sind, die Federkonstante k, einschließlich ihrer resultierenden Unsicherheit, zu berechnen.
4. Die Obergrenzen für systematische Messabweichungen bei den ersten beiden Aufgaben (statische und dynamische Messung der Federkonstanten) sind abzuschätzen (Größenordnungen). Es ist zu analysieren, welche dieser systematischen Abweichungen korrigierbar sind und welche dann tatsächlich in die Messunsicherheit des Endergebnisses eingehen.
5. Für alle drei Methoden (Aufgaben 1-3) sind die Ergebnisse (einschließlich Messunsicherheit) für die Federkonstante übersichtlich darzustellen, miteinander zu vergleichen und zu diskutieren. Sofern möglich, ist ein gewichteter Mittelwert zu ermitteln.

F4 BESTIMMUNG VON FEDERKONSTANTEN

VERSUCHSHINWEISE

Die Schraubenfeder ist mit einem Ende an einem Stativ befestigt. Zur Messung der Auslenkung der Feder aus der Ruhelage wird die Stellung der an der Feder befindlichen Marke M (Abb. 1) auf einer Spiegelskale abgelesen. (Welchen Vorteil bietet eine Spiegelskale gegenüber einer einfachen Skale?)

Die sog. Verkehrsfehlergrenze der Massennormale ist für die Masse $m = 50\ g$ mit $\Delta m = \pm 0{,}1\ g$ festgelegt. Bei Messung einer Länge l mit der Spiegelskale ist die Messunsicherheit $\Delta l = \pm (0{,}2\ mm + 5 \cdot 10^{-4} \cdot l)$. Für die Fallbeschleunigung ist (lt. Festlegung der Eichbehörden der Länder für Waagen) ein Wert von $g = (9{,}8130 \pm 0{,}0001)\ m \cdot s^{-2}$ zu verwenden.

Für die 1. Aufgabe wird die Feder schrittweise bis 400 g mit Massestücken von 50 g belastet und mit Hilfe einer Spiegelskale an der Marke M die Auslenkung x gemessen (erste Messreihe). Nach Erreichen der Höchstbelastung von 400 g ist dann die Feder wieder schrittweise zu entlasten (zweite Messreihe).

a) Aus der grafischen Darstellung x = x(m) ist mithilfe des „Steigungsdreiecks" der Anstieg g/k grafisch zu ermitteln und seine Unsicherheit entsprechend abzuschätzen (vgl. Einführungsskript). Daraus sind dann die Federkonstante k als mittelbar bestimmter Größe und ihre Unsicherheit Δk zu berechnen.
b) Durch lineare Regression ist mithilfe geeigneter Software (s. Einführungsskript und Vorlesung) der Anstieg und seine Unsicherheit numerisch zu ermitteln; daraus ebenfalls wieder die Federkonstante und deren Unsicherheit.

Für die 2. Aufgabe wird die Feder mit einer Gesamtmasse von 400 g belastet und 10mal die Zeit für jeweils 20 Schwingungen mithilfe einer Stoppuhr gemessen. Daraus ist der Mittelwert der Periodendauer T und ihr Vertrauensbereich s_T zu berechnen und mittelbar damit die Federkonstante k über Gleichung (5) mit ihrer Messunsicherheit.

a) Zur Genauigkeit der Messung mit Stoppuhren sind im Einführungsskript ausführliche Hinweise enthalten. Entsprechend den dort enthaltenen Angaben sind die systematischen Messabweichungen mit ihrer Auswirkung auf die Periodendauer und die Federkonstante realistisch abzuschätzen.
b) Bezüglich der Massen ist bereits ein Hinweis bei Aufgabe 1 gegeben worden. Zusätzlich müsste noch der Einfluss der Eigenmasse der Feder von $m_F \approx 5\ g$ auf die Periodendauer berücksichtigt werden. Die Teile der Feder nehmen unterschiedlich an der Bewegung teil; es kann als zu berücksichtigende Zusatzmasse $m' = m_F/3$ gesetzt werden. Somit ergibt sich für die Periodendauer $T' = 2\pi\sqrt{\frac{m+m'}{k}} = T\sqrt{1+\frac{m_F}{3m}}$.
c) Auch bei sehr sorgfältiger Anfangsauslenkung führt der Federschwinger nach einigen Schwingungen unvermeidlich seitliche Schwingungen aus: Wie beeinflusst diese Bewegung die gemessene Periodendauer? Man überlege sich auch, welche Auswirkungen die in der Betrachtung vernachlässigte aber unvermeidlich auftretende Reibung auf das Ergebnis dieses Verfahrens hat!

Für die 3. Aufgabe sind am jeweiligen Versuchsplatz die Messunsicherheiten der einzelnen Größen mit angegeben. Eine Unterscheidung von zufälligen und systematischen Komponenten ist hier allerdings nicht möglich.

Für Aufgabe 5 ist eine tabellarische Darstellungsweise vorzuziehen. In Zusammenhang mit dem gewogenen Mittelwert ist zu analysieren, unter welchen Bedingungen er überhaupt sinnvoll gebildet werden kann.