

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät I  
Institut für Physik

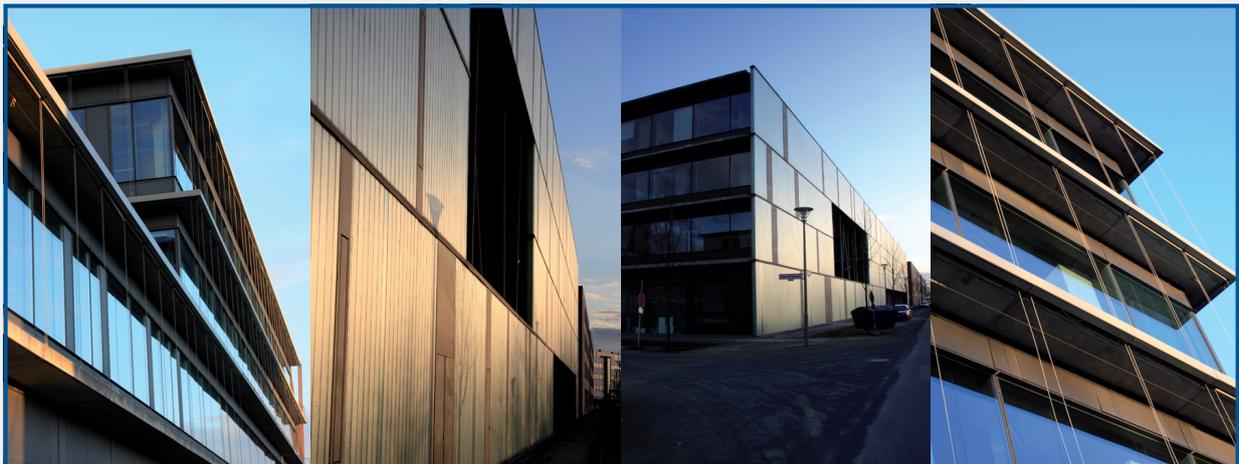


Physikalisches Grundpraktikum

---

# Physikalisches Grundpraktikum

interaktives Heft



Elektrodynamik und Optik 2010

# Vorbemerkung

Der hier vorliegende Teil der Anleitungen zum Physikalischen Grundpraktikum enthält Versuchsanleitungen aus den Themengebieten Elektrodynamik und Optik. Die erforderlichen physikalischen Grundlagen werden nur soweit beschrieben, wie es zum Verständnis der Aufgabenstellung unbedingt nötig ist.

Die bisher in der Schule erworbenen physikalischen und mathematischen Kenntnisse sind meist nicht ausreichend für die Bearbeitung der Aufgaben, auch wird nur sehr selten ein entsprechender Vorlauf in den Vorlesungen gegeben sein. Zur angemessenen Vorbereitung ist daher ein intensives Selbststudium für jeden Versuch notwendig. Dafür sind die einschlägigen Lehrbücher eine wertvolle Hilfe. Als Orientierung können die allen Versuchsanleitungen vorangestellten Grundbegriffe bzw. Schlagwörter dienen. Einen Schwerpunkt in der Versuchsauswertung bildet stets die kritische Beurteilung der direkt gemessenen oder aus Messungen gewonnenen Resultate. Deshalb sollen zu allen Ergebnissen die Messunsicherheiten angegeben werden, die meist durch die Abschätzung der zufälligen und systematischen Fehler bestimmbar sind. Eine statistische Fehlerrechnung lohnt sich nur in den wenigen Fällen, wo genügend viele Einzelmessungen vorliegen und die Größenordnung ihrer Streuung mindestens die Größenordnung der abgeschätzten systematischen Fehler erreicht. Hinweise zur Behandlung von Messfehlern sind im Praktikumsskript „Einführung“ enthalten.

Für das Selbststudium werden aus der umfangreichen Literatur zur Experimentalphysik und zum Praktikum empfohlen:

- W. Demtröder, Experimentalphysik, Springer-Verlag, Berlin u. a. (4 Bände)
- C. Gerthsen, H. Kneser und H. Vogel, Physik, Springer-Verlag, Berlin u. a.
- E. Grimsehl, Lehrbuch der Physik, BSG B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig (4 Bände)
- L. Bergmann und C. Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Walter de Gruyter, Berlin und New York (4 Bände)
- W. Ilberg, Physikalisches Praktikum, B.G. Teubner, Stuttgart
- W. Walcher, Praktikum der Physik, B.G. Teubner, Stuttgart

---

---

# Inhaltsverzeichnis<sup>1</sup>

---

---

<b>Versuch E1</b>	
Wheatstonesche Brücke .....	1
<b>Versuch E2</b>	
Innenwiderstand von Messgeräten .....	6
<b>Versuch E3</b>	
Transformator .....	9
<b>Versuch E4</b>	
Wechselstromwiderstände .....	14
<b>Versuch E5</b>	
Gleichrichterschaltungen .....	22
<b>Versuch E7</b>	
Kompensationsmethode .....	28
<b>Versuch E11</b>	
Magnetische Hysterese .....	32
<b>Versuch E12</b>	
Elektronen in Feldern .....	40
<b>Versuch O1</b>	
Dünne Linsen .....	46
<b>Versuch O2</b>	
Mikroskop .....	51
<b>Versuch O3/O4</b>	
Prismen- und Gitterspektrometer .....	56
<b>Versuch O6</b>	
Newtonsche Ringe .....	63
<b>Versuch O7</b>	
Abbe-Refraktometer .....	67
<b>Versuch O8</b>	
Fraunhofersche Beugung .....	71
<b>Versuch O10</b>	
Linsensysteme .....	77
<b>Versuch O11</b>	
Polarisation durch Reflexion an Glas .....	82

---

<sup>1</sup>Die Kurzbezeichnungen der Versuche sind historisch entstanden. Einige Versuche sind hier nicht enthalten.

---

---

# E1 Wheatstonesche Brücke

---

---

## Physikalische Grundlagen

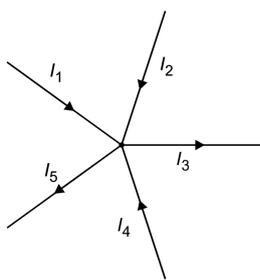
### Grundbegriffe

Elektrischer Widerstand  
Ohmsches Gesetz  
Kirchhoffsche Gesetze  
Potentiometer  
Wheatstonesche Brücke

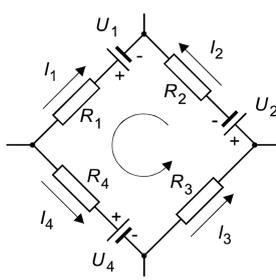
### 1. Kirchhoffsche Gesetze

Wird an einen elektrischen Leiter eine Spannung  $U$  angelegt und es fließt ein Strom  $I$ , dann definiert man folgendes Verhältnis als den Widerstand des Leiters.

$$R = \frac{U}{I} \quad (\text{SI-Einheit: } 1 \Omega = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}}). \quad (1.1)$$



a) Knotensatz



b) Maschensatz

Abbildung 1.1: Kirchhoffsche Gesetze

Falls  $R$  nur vom Verhältnis  $U/I$  und nicht von den Einzelgrößen selbst abhängt, wird  $R$  Ohmscher Widerstand genannt. Es gilt dann das Ohmsche Gesetz

$$U = R \cdot I, \quad (1.2)$$

in dem  $R = \text{const.}$  vorausgesetzt wird. Zur Berechnung der Ströme und Spannungen in Netzwerken - darunter versteht man jede beliebige Kombination aus Spannungsquellen, Widerständen und Leitungsdrähten - benötigt man neben dem Ohmschen Gesetz die Kirchhoffschen Sätze:

### Knotensatz

In jedem Knotenpunkt einer Schaltung ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme (Abb. 1.1a)). Gibt man den zufließenden Strömen positives, den wegfließenden Strömen negatives Vorzeichen, dann erhält der Knotensatz die Form:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0. \quad (1.3)$$

### Maschensatz

In jeder Masche eines Netzwerkes (Abb. 1.1b) ist die Summe der Spannungen aller Spannungsquellen gleich der Summe der Spannungsabfälle an den Widerständen der Masche:

$$\sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n R_i I_i. \quad (1.4)$$

Für die praktischen Berechnungen muss für jede Masche ein Umlaufsinn und für jeden Zweig der Masche eine Zählrichtung des Stromes festgelegt werden; diese Festlegungen können willkürlich erfolgen. Zur Berechnung einer Masche (Abb. 1.1b)) gehe man von einem Knotenpunkt der Masche aus und berechne im Umlaufsinn die Summe der Spannungen und der Spannungsabfälle. Wird eine Spannungsquelle vom Minus- zum Pluspol durchlaufen, rechnet man die Spannung positiv, andernfalls negativ. Stimmen angenommene (technische) Stromrichtung und Umlaufsinn überein, so gilt der Spannungsabfall am Widerstand als positiv, andernfalls negativ. Für die dargestellte Masche erhält man bei Beachtung dieser Regeln

$$-U_1 + U_2 + U_4 = I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_4 R_4.$$

## 2. Widerstandsnetzwerke

Werden Ohmsche Widerstände  $R_1, R_2, \dots, R_n$  in einem Gleichstromkreis zusammengeschaltet, so können sie zu einem resultierenden Widerstand  $R_g$  zusammengefasst werden. Unter Anwendung des Ohmschen Gesetzes und der Kirchhoffschen Sätze ergibt sich

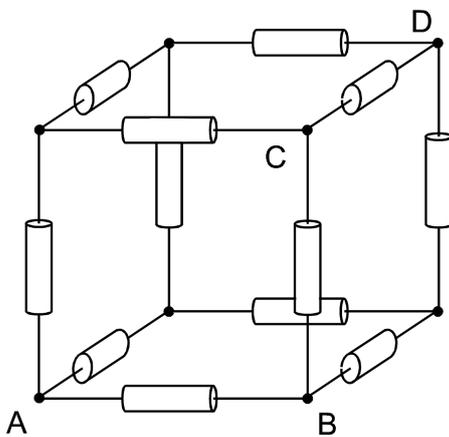


Abbildung 1.2: Widerstandswürfel

$$R_g = \sum_{i=1}^n R_i, \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{R_g} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (1.6)$$

Mit diesen Formeln lassen sich kompliziertere Netzwerke oft einfacher berechnen als durch die direkte Anwendung der Kirchhoffschen Sätze (Gl. (1.3) u. (1.4)). Beispielsweise erhält man für zwölf gleichgroße Widerstände  $R$ , die die Kanten eines Würfels bilden (Abb. 1.2), folgende Werte für den Gesamtwiderstand  $R_g$

zwischen A und B	(Würfelkante)	$R_g = \frac{7}{12} \cdot R$	(1.7)
------------------	---------------	------------------------------	-------

zwischen A und C	(Flächendiagonale)	$R_g = \frac{3}{4} \cdot R$	(1.8)
------------------	--------------------	-----------------------------	-------

zwischen A und D	(Raumdiagonale)	$R_g = \frac{5}{6} \cdot R$	(1.9)
------------------	-----------------	-----------------------------	-------

### 3. Widerstandsmessung

Auf der Grundlage der Definition des Widerstandes (Gl. (1.1)) könnte eine Bestimmung von  $R$  durch die Messung von Spannung und Strom mit einem Schaltungsaufbau nach Abb. 1.3a) oder 1.3b) erfolgen. Beide Schaltungen führen aber zu systematischen Fehlern bei der Bestimmung von  $R$ . Bei der sog. „spannungsrichtigen“ Schaltung (Abb. 1.3a)) wird die Spannung am Widerstand  $R$  korrekt gemessen, aber der Strommesser  $A$  erfasst auch den durch den Spannungsmesser  $V$  fließenden Strom. Der Strom würde nur dann richtig gemessen, wenn der Spannungsmesser einen unendlich hohen Innenwiderstand hätte. Mit der sog. „stromrichtigen“ Schaltung könnte die Spannung nur dann richtig gemessen werden, wenn der Innenwiderstand des Strommessers  $R_A = 0$  wäre. Einfache Labormessmittel erfüllen diese Anforderungen im Allgemeinen nicht hinreichend. Auf der Grundlage der Kirchhoffschen Gesetze wäre eine Korrektur dieser systematischen Fehler möglich, würde aber die Kenntnis bzw. eine zusätzliche Bestimmung der Innenwiderstände der benutzten Messgeräte erfordern.

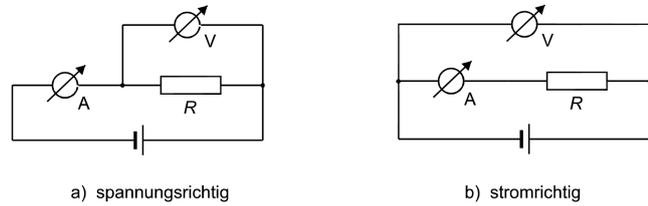


Abbildung 1.3: Messung von Strom und Spannung

Diese insbesondere die Präzisionsmessung von Widerständen erschwerenden Umstände können bei einer Messung von  $R$  mit der *Wheatstoneschen Brücke* (Abb. 1.4) umgegangen werden.

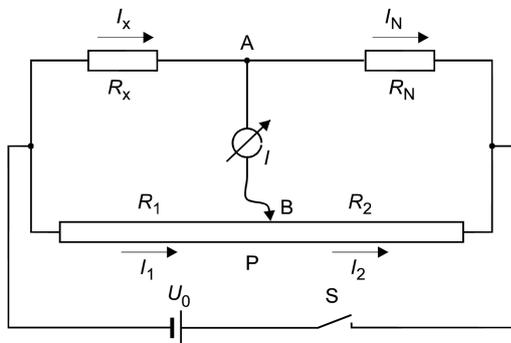


Abbildung 1.4: Brückenschaltung

Sie besteht aus einem unbekanntem Widerstand  $R_x$ , einem Normalwiderstand  $R_N$ , einem Potentiometer  $P$ , einem empfindlichen Anzeigegerät  $I$ , einer Spannungsquelle  $U_0$  und einem Schalter  $S$ . Der Widerstand des Potentiometers wird durch einen verstellbaren Schleifkontakt in die Teilwiderstände  $R_1$  und  $R_2$  geteilt.

Zur Messung wird das Potentiometer so eingestellt, dass das Anzeigegerät bei geschlossenem Schalter keinen Ausschlag zeigt, d.h. zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  keine Potentialdifferenz besteht und damit kein Strom fließt. In diesem Fall spricht man vom Brückengleichgewicht und die Kirchhoffschen Gesetze liefern nach dem Maschensatz (Gl. (1.4)) und nach dem Knotensatz (Gl. (1.3)) die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{array}{lll} I_x R_x = I_1 R_1 & \text{bzw.} & I_N R_N = I_2 R_2 \\ I_x = I_N & \text{bzw.} & I_1 = I_2 \end{array}$$

Zusammengefasst erhält man

$$R_x = R_N \frac{R_1}{R_2}. \quad (1.10)$$

Zur Bestimmung des Widerstandes  $R_x$  ist somit nur die Kenntnis des Normalwiderstandes  $R_N$  sowie des Widerstandsverhältnisses  $R_1/R_2$  notwendig. Das Anzeigegerät wird ausschließlich

als Spannungsindikator zum Abgleichen der Messbrücke benutzt und muss deshalb nicht geeicht sein. Die Betriebsspannung  $U_o$  muss weder bekannt noch besonders konstant sein, eine Verringerung würde aber zu sinkender Empfindlichkeit der Anzeige und damit zur Herabsetzung der Messgenauigkeit führen.

## Aufgaben

1. Es sind drei Widerstände einzeln und in 5 verschiedenen Dreierkombinationen je sechsmal auszumessen.
2. Die Widerstände für die Dreier-Kombinationen sind außerdem aus den Messwerten der Einzelwiderstände zu berechnen (Gl. (1.5) bzw. (Gl. (1.6)) und mit den Messwerten der Dreierkombinationen zu vergleichen.
3. An einem Widerstandswürfel aus 12 gleichgroßen Einzelwiderständen  $R$  sind die jeweiligen Gesamtwiderstände über eine Kante, eine Flächendiagonale und eine Raumdiagonale zu messen und daraus  $R$  zu berechnen (Gl. (1.7),(1.8),(1.9)).

## Versuchsdurchführung

Der Schaltungsaufbau erfolgt nach Abb. 1.4. Das Potentiometer besteht aus einem homogenen Nickeldraht der Länge  $l = 1\text{ m}$  mit einem verschiebbaren Schleifkontakt, welcher den Draht in zwei Abschnitte mit den Teillängen  $x$  und  $l-x$  unterteilt. Dadurch wird das Widerstandsverhältnis  $R_1/R_2$  durch ein Längenverhältnis ausgedrückt und aus der Gleichung für die Wheatstonesche Brücke (Gl. (1.10)) folgt

$$R_x = R_N \frac{x}{l-x} \quad (1.11)$$

Der Normalwiderstand  $R_N$  wird durch Dekadenwiderstände gebildet. Beim Messvorgang wird zunächst der unempfindlichste Messbereich des Anzeigeinstrumentes gewählt, der Schleifkontakt etwa in Mittelstellung geschoben und bei wiederholtem kurzzeitigen Tasten des Schalters das Brückengleichgewicht durch eine passende Wahl des Normalwiderstandes  $R_N$  annähernd herbeigeführt. Die anschließende Feineinstellung erfolgt nur noch mit dem Schleifkontakt des Potentiometers, wobei das Brückengleichgewicht jeweils durch kurze Schalterbetätigung getestet wird. Bei abgeglichener Brücke darf auch im empfindlichsten Messbereich keine Zeigerbewegung bemerkbar sein. Theoretisch könnte bei beliebigem Normalwiderstand  $R_N$  jeder Widerstand  $R_x$  gemessen werden (Gl. (1.10)), da der Quotient  $R_1/R_2$  alle Werte zwischen Null und unendlich annehmen kann. Die Messgenauigkeit wird jedoch am größten für  $R_x = R_N$ , d. h.  $R_1/R_2 = 1$ . Dies lässt sich durch Diskussion der relativen Messunsicherheit von  $R_x$  begründen. Bei Vernachlässigung des Fehlers von  $l$  gilt:

$$\frac{u_{R_x}}{R_x} = \left| \frac{u_{R_N}}{R_N} \right| + \left| \frac{l u_x}{x(l-x)} \right|.$$

Das Minimum der Messunsicherheit liegt vor, wenn der Nenner  $x(l-x)$  maximal wird, d. h. bei  $x = l/2$  bzw.  $R_1 = R_2$ . Der Normalwiderstand sollte also immer dem Messproblem angepasst werden.

## Fragen

1. Was besagen die Kirchhoffschen Gesetze und wie sind sie auf die Wheatstonesche Brücke anzuwenden?
2. Leiten Sie den Gesamtwiderstand für die Reihenschaltung (Gl. (1.5)) und die Parallelschaltung (Gl. (1.6)) von Einzelwiderständen ab.
3. Leiten Sie die Beziehungen Gl. (1.7) bis Gl. (1.9) für den Widerstandswürfel ab.
4. Diskutieren Sie Vor- und Nachteile Ihnen bekannter Methoden zur Widerstandsmessung.
5. Wie verändert man die Messbereiche von Strom- und Spannungsmessern?
6. Was versteht man unter dem spezifischen Widerstand?

---

---

## E2 Innenwiderstand von Messgeräten

---

---

### Physikalische Grundlagen

Grundbegriffe
Elektrische Stromstärke und Spannung
Elektrischer Widerstand
Ohmsches Gesetz
Arbeit und Leistung elektrischer Gleichströme

Legt man an einen elektrischen Leiter eine elektrische Spannung  $U$ , so fließt ein Strom  $I$ , dessen Größe sich bei konstantem Widerstand  $R$  des Leiters nach dem Ohmschen Gesetz

$$I = \frac{U}{R} \quad (2.1)$$

berechnet. Da Strom und Spannung proportional sind, können im Prinzip dieselben Messinstrumente für Strom- und Spannungsmessung verwendet werden, wobei sich in der Praxis im Allgemeinen Einschränkungen ergeben. Zur Messung von Strom oder Spannung in einer elektrischen Schaltung können alle auftretenden Wirkungen (elektrostatische, elektrodynamische, thermische, elektrolytische) benutzt werden. Nimmt man elektrostatische Instrumente aus, dann basieren alle Messverfahren auf der Tatsache, dass während der Messung aufgrund des endlichen Innenwiderstandes  $R$  des Messinstrumentes ein Strom fließt und elektrische Energie verbraucht wird. Die verbrauchte elektrische Leistung (Energie/Zeit) in den Messinstrumenten ist

$$P = I^2 R \quad \text{bzw.} \quad P = \frac{U^2}{R}. \quad (2.2)$$

Der Leistungsverlust ist also gering, wenn der Strommesser einen kleinen und der Spannungsmesser einen großen Innenwiderstand hat. Je besser dies erfüllt werden kann, umso mehr wird der allgemein zu stellenden Forderung entsprochen, durch ein Messgerät möglichst nur eine geringe Störung der ursprünglichen Strom-Spannungs-Verhältnisse zu verursachen. Ein in Reihe in den Stromfluss geschalteter Strommesser bildet einen zusätzlichen Widerstand  $R_A$  (Innenwiderstand des Strommessers) und der parallel zum Messobjekt geschaltete Spannungsmesser führt zu einem zusätzlichen Strom über dessen Innenwiderstand  $R_V$ . Um die Übersichtlichkeit zu verbessern, benutzt man gelegentlich so genannte Ersatzschaltbilder. Man kann den realen Strommesser aus einem idealen Strommesser  $A_{id}$  mit in Reihe geschaltetem Widerstand  $R_A$  (Abb. 2.1a) und den realen Spannungsmesser als Parallelschaltung eines idealen Spannungsmessers  $V_{id}$  und eines endlichen Widerstandes  $R_V$  (Abb. 2.1b) auffassen.

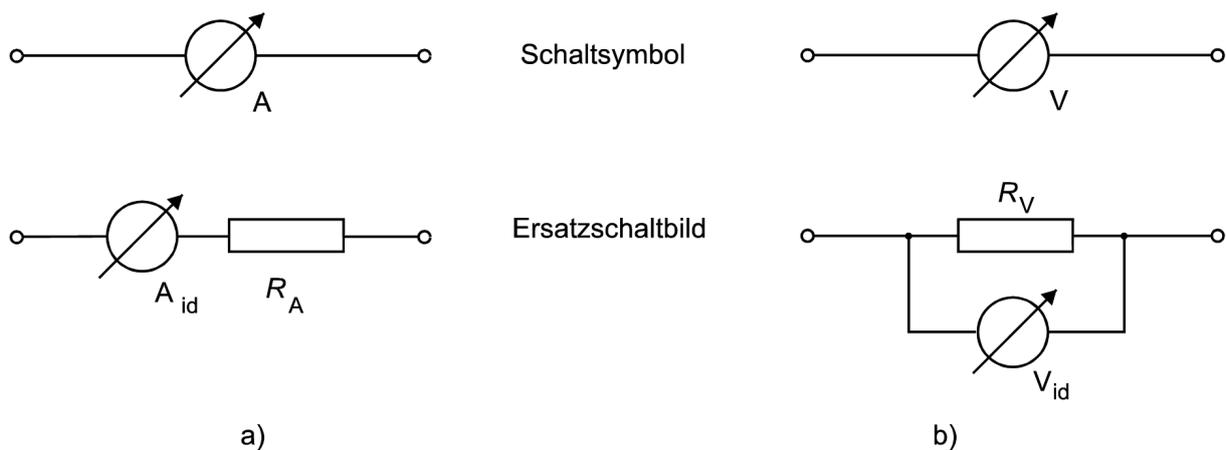


Abbildung 2.1: Schaltbilder für Messgeräte

## Aufgaben

1. Bestimmung des Innenwiderstandes  $R_V$  eines Spannungsmessers aus der grafischen Darstellung  $1/U_V = f(R_x)$  (Gl. (2.3)).
2. Bestimmung des Innenwiderstandes  $R_A$  eines Strommessers aus der grafischen Darstellung  $1/I_A = f(1/R_x)$  (Gl. (2.4)).
3. Bestimmung des Stromes  $I_{\text{so}}$  sowohl aus der grafischen Darstellung nach Aufgabe 2 als auch aus der direkten Messung.
4. Abschätzung der Fehler  $R_V$  und  $R_A$  aus der Differenz des kleinst- und größtmöglichen Anstieges, die sich aufgrund der Messwerte aus der grafischen Darstellung ergibt.
5. Kontrolle der grafischen Auswertung durch rechnerischen Geradenausgleich.

## Versuchsdurchführung

Für Aufgabe 1 schaltet man zum Voltmeter einen variablen Widerstand  $R_x$  in Reihe (Abb. 2.2a) und verwendet ein Netzgerät mit konstanter Betriebsspannung  $U_B$ . Für den vom Spannungsmesser angezeigten Spannungsabfall  $U_V$  an  $R_V$  gilt

$$U_V = U_B \frac{R_V}{R_V + R_x}$$

und nach Umformung

$$\frac{1}{U_V} = \frac{1}{U_B} \cdot \frac{R_x}{R_V} + \frac{1}{U_B}. \quad (2.3)$$

Die Werte  $1/U_V$  werden grafisch als Funktion der  $R_x$ -Werte dargestellt (Gl. (2.3)) und aus dem Anstieg wird der Innenwiderstand  $R$  ermittelt.

Zur Realisierung der verschiedenen  $R_x$ -Werte stehen verschiedene Einzelwiderstände von 0.5 k $\Omega$  bis 50 k $\Omega$  zur Verfügung, die sowohl einzeln als auch in Reihen- oder Parallelschaltung verwendet werden können. Man wähle die Widerstände  $R_x$  so, dass die 10 erforderlichen Messpunkte etwa äquidistant sind.

Für Aufgabe 2 schaltet man zum Strommesser einen variablen Widerstand  $R_x$  parallel (Abb. 2.2b). Durch den Vorwiderstand  $R_0$  wird erreicht, dass das Netzgerät einen nahezu konstanten Strom  $I$  liefert. Im Stromkreis findet eine Stromverzweigung statt und es gilt

$$I_A R_A = I_x R_x \quad \text{und} \quad I_x = I_0 - I_A$$

und nach Umformung

$$\frac{1}{I_A} = \frac{1}{I_0} \cdot \frac{R_A}{R_x} + \frac{1}{I_0} \quad (2.4)$$

Unter der Voraussetzung eines konstanten Stromes  $I_0$  kann  $R_A$  aus dem Anstieg der grafischen Darstellung  $1/I_A = f(1/R_x)$  ermittelt werden. Zur Realisierung der  $R_x$ -Werte verfähre man wie bei Aufgabe 1.

Für Aufgabe 3 wird der Strom  $I_0$  direkt gemessen, indem kein Widerstand  $R_x$  eingeschaltet wird, d. h.  $R_x = \infty$  zu setzen ist (Gl. (2.4)).

Für Aufgabe 5 steht das Rechnerprogramm „GERA“ für die Berechnung der Geradenanstiege  $a_V = 1/R_V U_B$  (Gl. (2.3)) und  $a_A = R_A/I_0$  (Gl. (2.4)) einschließlich der Vertrauensbereiche zur Verfügung.

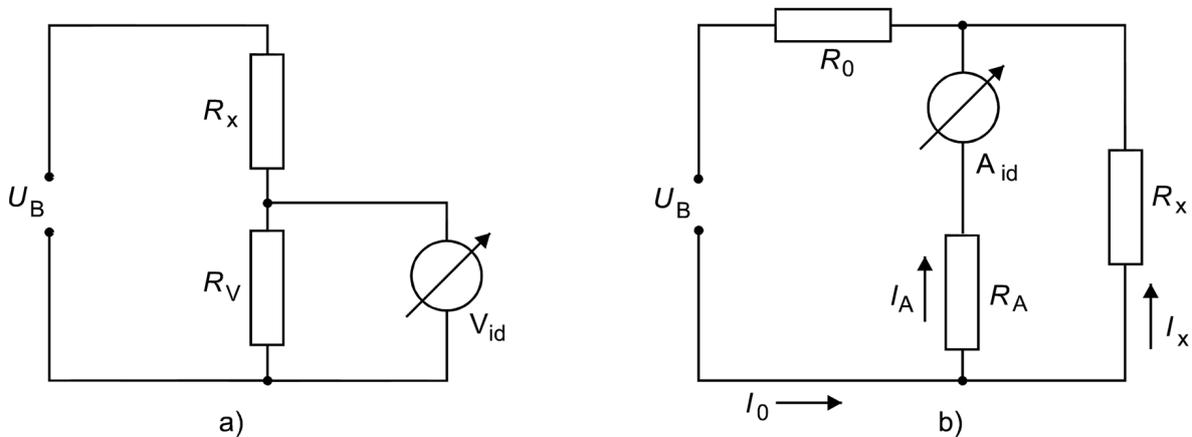


Abbildung 2.2: Bestimmung des Innenwiderstandes

## Fragen

1. Durch welche Maßnahmen kann man die Messbereiche von Volt- und Amperemetern erweitern?
2. Wie groß ist der Innenwiderstand bei elektrostatischen Messgeräten?
3. Begründen Sie die Funktion von  $R_0$  in Schaltung 2b. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Größe von  $R_0$  und der Genauigkeit der  $R_A$ -Bestimmung?

## Physikalische Grundlagen

### Grundbegriffe

Spule im Wechselstromkreis  
magnetische Induktion  
Induktionsfluss  
Induktionsgesetz  
Zeigerdiagramm  
Blindstrom  
Wirkstrom

### 1. Aufbau des Transformators

Der Transformator dient zur verlustarmen Änderung der Amplituden von Wechselspannungen. Die Transformierbarkeit ist ein wesentlicher Vorteil der Wechselspannungen gegenüber Gleichspannungen. Prinzipiell besteht ein Transformator aus zwei räumlich benachbarten Spulen, einer Primärspule (Windungszahl  $n_p$ ), an der die Eingangs- oder Primärspannung  $U_p$  liegt und einer Sekundärspule (Windungszahl  $n_s$ ), an der die veränderte Ausgangs- oder Sekundärspannung  $U_s$

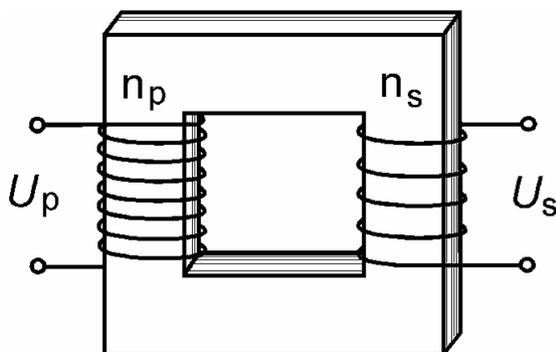


Abbildung 3.1: Transformator

abgegriffen wird. In den meisten Fällen sind die Spulen auf einen gemeinsamen Kern aus einem ferromagnetischen Material gewickelt (Abb. 3.1). Für Niederfrequenztransformatoren und insbesondere Transformatoren für technische Wechselströme benutzt man als Kernmaterial Weicheisen mit geringer Remanenz zur Minimierung von Hystereseverlusten (Versuch E 11) und hoher Permeabilität zur Erzielung einer hohen Induktivität. Zur Vermeidung von Wirbelstromverlusten wird der Kern aus dünnen Blechen geschichtet, zwischen denen sich eine isolierende Papier- oder Lackschicht befindet. Den nicht völlig vermeidbaren Streuverlusten begegnet man, indem der Kern in sich geschlossen ausgeführt wird und

einen in Bezug auf die beabsichtigte Leistungsübertragung ausreichend großen Querschnitt erhält. Die Sekundärspule besitzt häufig mehrere Anzapfungen, so dass der Abgriff unterschiedli-

cher Spannungen möglich ist. Bei Stelltransformatoren erfolgt ein kontinuierlicher Abgriff durch Schleifkontakte. Hochfrequenztransformatoren besitzen anstelle eines Eisenkerns verlustarme Ferritkerne; bei sehr hohen Frequenzen wird auf Kerne ganz verzichtet.

Die weiteren Betrachtungen erfolgen zunächst für einen idealen, d. h. verlustfrei arbeitenden Transformator. Die Auswirkung der am realen Transformator auftretenden Leistungsverluste auf den Wirkungsgrad wird in Abschn. 3 behandelt.

## 2. Wirkprinzip des idealen Transformators

Legt man bei zunächst offener Sekundärspule, d.h. bei einem *unbelasteten Transformator*, an die Primärspule mit dem induktiven Widerstand  $\omega L$  ( $\omega$  ist die Kreisfrequenz) eine Wechselspannung  $U_p = U_m \sin \omega t$ , so fließt der gegenüber  $U_p$  um den Phasenwinkel  $\pi/2$  nacheilende Wechselstrom

$$I_p = \frac{U_m}{\omega L} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (\text{Versuch E4})$$

Im Primärkreis fließt ein sog. Blindstrom, welcher das zuführende Leitungssystem umso weniger belastet, je größer die Induktivität  $L$  ist. Der Wechselstrom  $I_p(t)$  erzeugt im Eisenkern das magnetische Feld  $B(t)$  und den magnetischen Kraftfluss  $\Phi(t)$ , welcher -durch den Eisenkern geführt- sowohl die Primärspule als auch die Sekundärspule in gleicher Weise durchsetzt.

Der sich zeitlich ändernde Induktionsfluss führt nach dem Induktionsgesetz an den Spulenklenden zu den induzierten Spannungen

$$U_p^{\text{ind}} = -n_p \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{und} \quad U_s^{\text{ind}} = -n_s \frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.1)$$

Beachtet man die Forderung des Kirchhoffschen Maschensatzes  $U_p^{\text{ind}} = -U_p$  und bezeichnet  $U_s^{\text{ind}}$  im Weiteren abkürzend mit  $U_s$ , so folgt aus Gl.(3.2)

$$\frac{U_s}{U_p} = -\frac{n_s}{n_p}. \quad (3.2)$$

Das Verhältnis  $n_s/n_p$  bezeichnet man als Übersetzungsverhältnis des Transformators. Es wird in der Praxis aus dem Spannungsverhältnis im Leerlauf bestimmt. Die Phasenbeziehungen zwischen  $U_p$ ,  $I_p$ ,  $U_p^{\text{ind}}$  und  $U_s$  sind in Abb. 3.2 dargestellt.

Veränderte Verhältnisse ergeben sich für den *belasteten Transformator*, d.h. bei Anschluss eines Verbrauchers an die Sekundärspule. Der am einfachsten zu behandelnde Fall liegt vor, wenn ein ohmscher Widerstand angeschlossen wird. Der in diesem Fall phasengleich zur Sekundärspannung  $U_s$  fließende Sekundärstrom  $I_s$  erzeugt einen magnetischen Fluss  $\Phi_s$ , welcher den ursprünglichen Induktionsfluss nach der Lenzschen Regel schwächen würde. Damit dennoch im Primärkreis der Maschensatz erfüllt bleibt, muss weiterhin  $U_p^{\text{ind}} = -U_p$

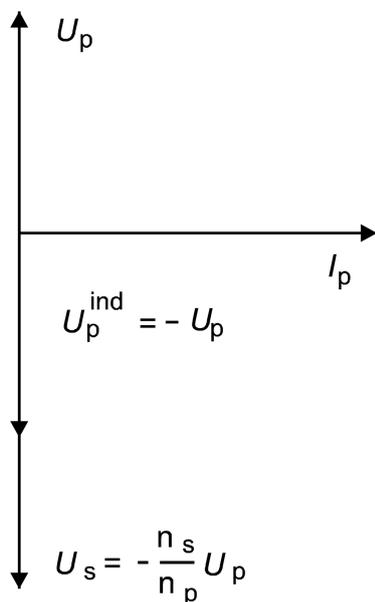


Abbildung 3.2: Unbelasteter Transformator

sein. Deshalb muss in der Primärspule phasengleich mit  $U_p$  zusätzlich ein Strom  $I_p^*$  (siehe unten Gl.(3.3)) fließen, so dass der von  $I_p^*$  erzeugte magnetische Fluss  $\Phi_p^*$  den Fluss  $\Phi_s$  gerade kompensiert (Abb. 3.3). Beim belasteten Transformator setzt sich der fließende Primärstrom  $I_p^{**}$  vektoriell aus den Komponenten Blindstrom  $I_p$  und Wirkstrom  $I_p^*$  zusammen. Zwischen  $I_p^{**}$  und  $U_p$  besteht die Phasendifferenz  $\varphi$ . Der Energieerhaltungssatz verlangt, dass die am ohmschen Widerstand im Sekundärkreis entzogene Energie durch die Stromquelle im Primärkreis aufgebracht werden muss.

Die fundamentale Beziehung  $\Phi_{\text{belastet}} = \Phi_{\text{unbelastet}}$  ist zunächst überraschend aber für das Verständnis des Transformators wesentlich. Sie ist auch für den realen Transformator sehr gut erfüllt. Für den idealen Transformator führt die Leistungsgleichheit in Primär- und Sekundärkreis  $U_s I_s = U_p I_p^*$  und Einsetzen von Gl.(3.2) auf den Primärwirkstrom

$$I_p^* = -\frac{n_s}{n_p} I_s. \quad (3.3)$$

Die Leistung im Primärkreis

$$P_p = U_p I_p^* = U_p I_p^{**} \cos \varphi \quad (3.4)$$

ist Null für den unbelasteten idealen Transformator und steigt mit wachsendem Wirkstrom  $I_p^*$  und damit abnehmender Phasenverschiebung  $\varphi$  bei steigender Belastung.

### 3. Wirkungsgrad des realen Transformators

Als Wirkungsgrad  $\eta$  des realen Transformators definiert man das Verhältnis der Wirkleistungen

$$\eta = \frac{P_s}{P_p} \quad (3.5)$$

im Primär- und Sekundärkreis. Er ist beim realen (im Unterschied zum idealen) Transformator immer kleiner als 1, weil von der Stromquelle im Primärkreis zusätzlich zur im Sekundärkreis entzogenen Arbeit die eingangs erwähnten Energieverluste sowie die Wärmeverluste an den ohmschen Widerständen der Transformatorspulen aufgebracht werden müssen. Der Wirkungsgrad eines nur mit einem ohmschen Widerstand belasteten Transformators beträgt nach Gl.(3.4) und Gl.(3.5)

$$\eta = \frac{U_s I_s}{U_p I_p^{**} \cos \varphi}. \quad (3.6)$$

Transformatoren für technische Wechselströme erreichen Wirkungsgrade über 95%.

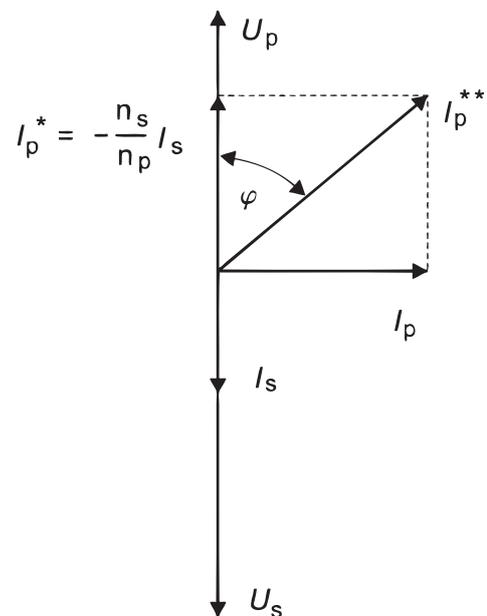


Abbildung 3.3: Belasteter Transformator

## Aufgaben

1. Bestimmung des Übersetzungsverhältnisses eines Transformators aus der grafischen Darstellung  $U_s = f(U_p)$  für den unbelasteten Fall.
2. Bestimmung des Leerlaufstromes und der Leerlaufleistung eines unbelasteten Transformators für ca. 40 V Primärspannung.
3. Messung der Leistungen im Primär- und Sekundärkreis in Abhängigkeit von der ohmschen Belastung.
4. Grafische Darstellungen des Primärstromes  $I_p^{**}$ , des Wirkungsgrades  $\eta$  und der Phasenverschiebung  $\varphi$  als Funktion des Sekundärstroms.

## Versuchsdurchführung

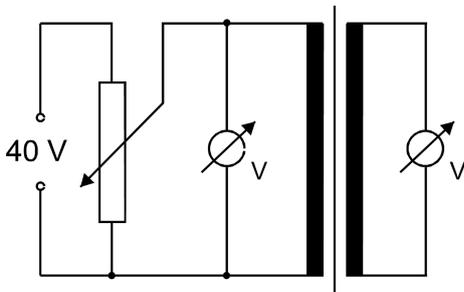


Abbildung 3.4: Übersetzungsverhältnis

Für Aufgabe 1, die Messung des Übersetzungsverhältnisses, wird die in Abb. 3.4 angegebene Schaltung benutzt. Über ein Potentiometer im Primärkreis kann die Spannung im Bereich von 0 V bis ca. 40 V variiert werden. Das Übersetzungsverhältnis wird aus dem Anstieg der grafischen Darstellung  $U_s = f(U_p)$  entnommen (Gl. (3.2)).

Für die Aufgaben 2 und 3 wird die Schaltung nach Abb. 3.5 verwendet. Die Leistung  $P_p$  im Primärkreis wird mit dem Wattmeter  $W$  gemessen, außerdem wird im Primärkreis der Strom  $I_p^{**}$  und die Spannung  $U_p$  mit separaten Instrumenten gemessen. Damit kann aus  $P_p$  unmittelbar die Phasenverschiebung berechnet werden (Gl. (3.4)). Bei der Messung von  $I_p^{**}$  (das ist der Effektivwert des Primärstromes!) ist zu beachten, dass ein so genannter „wahrer“ Effektivwertmesser (True RMS) benutzt werden muss. Messgeräte ohne diese ausdrückliche Kennzeichnung sind in der Regel für harmonische Spannungen bzw. Ströme geeicht. Diese Voraussetzung ist für den Primärstrom wegen der Hystereseverluste im Eisenkern des Trafos nicht erfüllt. Diese Verluste sind der nicht widerstandslosen Ummagnetisierung der vormagnetisierten Bereiche (Weißsche Bezirke) im ferromagnetischen Material geschuldet (siehe Versuch E 11 Magnetische Hysterese).

Im Sekundärkreis wird die Leistung  $P_s = U_s I_s$  ermittelt und anschließend der Wirkungsgrad (Gl. (3.6)) bestimmt. Zur Messung der Leerlaufparameter wird der Sekundärkreis am Transformator unterbrochen.

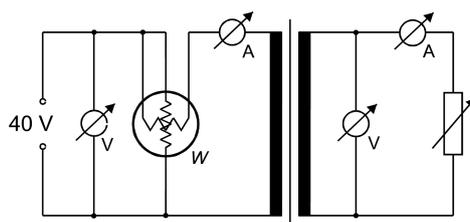


Abbildung 3.5: Belasteter Transformator

## Fragen

1. Wie lautet das Faradaysche Induktionsgesetz?
2. Welche Verluste treten beim Transformator auf?
3. Unter welcher Voraussetzung ist beim Transformator das Verhältnis  $U_s/U_p$  (siehe Gl.(3.2)) unabhängig von der Belastung?
4. Welche Anwendungen für Transformatoren kennen Sie?

---

---

# E4 Wechselstromwiderstände

---

---

## Physikalische Grundlagen

Grundbegriffe
Wechselstromwiderstände (ohmsche, induktive und kapazitive)
Leistung im Wechselstromkreis
Effektivwerte
Zeigerdiagramm
Reihen- und Parallelschwingkreis

### 1. Wechselstromwiderstände

Die Bestimmung von Widerständen in Wechselstromkreisen erfolgt analog zu Gleichstromkreisen durch eine Spannungs- und Strommessung. Im Allgemeinen setzt sich der Widerstand eines Wechselstromkreises aus einer Kombination von ohmschen Widerständen (Wirkwiderständen) sowie induktiven und kapazitiven Widerständen (Blindwiderständen) zusammen. Diese Widerstände können technisch durch Bauteile (Widerstände, Spulen, Kondensatoren) realisiert sein oder sich aus der Anordnung der Bauelemente in der Schaltung ergeben (ohmsche und induktive Widerstände von Zuleitungen, Schaltkapazitäten). Im Unterschied zu ohmschen Widerständen treten bei Wechselstromwiderständen charakteristische Phasenverschiebungen zwischen Spannung und Strom auf, die bei der Berechnung des Gesamtwiderstandes zu berücksichtigen sind und zweckmäßig im Zeigerdiagramm dargestellt werden.

### 2. Ohmscher Widerstand

Der ohmsche Widerstand ist der Leitungswiderstand, der auch bei Gleichstrom vorhanden ist. Liegt an einem Leiter mit rein ohmschem Widerstand  $R$  eine Wechselspannung  $U = U_m \sin \omega t$ , so fließt in ihm ein Wechselstrom  $I = I_m \sin \omega t$ . In jedem Augenblick ist die angelegte Spannung dem Strom proportional

$$U_R = RI = RI_m \sin \omega t.$$

Zwischen Strom und Spannung tritt keine Phasenverschiebung auf. Die umgesetzte Leistung  $P$

wird als Joulesche Wärme frei und ergibt sich über eine Periodendauer  $T$  gemittelt zu

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t \, dt = U_m I_m \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \, dt$$

$$P = U_m I_m \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$$

Messgeräte für Wechselspannungen bzw. -ströme zeigen die Effektivwerte an.

### 3. Induktiver Widerstand

Liegt an einer Spule eine Wechselspannung  $U_L$ , dann fließt in ihr ein Wechselstrom  $I = I_m \sin \omega t$ , und es entsteht ein magnetischer Fluss, der der zeitlich veränderlichen Stromstärke proportional ist. Deshalb wird -entsprechend dem Induktionsgesetz (vgl. Versuch E3)- in der Spule eine Gegenspannung induziert, die der zeitlichen Änderung des Stromes proportional ist. Aus dem Induktionsgesetz folgt:

$$U_L = -U_{\text{ind}} = L \frac{dI}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $L$  (SI-Einheit:  $[L] = 1 \text{ V s A}^{-1} = 1 \text{ Henry} = 1 \text{ H}$ ) heißt *Selbstinduktionskoeffizient* oder *Induktivität* der Spule, er hängt von der Geometrie der Spule, deren Windungszahl und vom Material des Spuleninneren ab.

Setzt man  $U_L = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ , so ergibt sich durch Vergleich für die Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung an einer Spule  $\varphi = \pi/2$  und aus

$$U_m = \omega L I_m = R_L I_m$$

sieht man, dass das Verhältnis  $U_m/I_m = R_L = \omega L$  die Bedeutung eines bei Wechselstrom auftretenden Widerstandes hat. Er heißt induktiver Widerstand der Spule und ist frequenzabhängig. Für die umgesetzte Leistung ergibt sich

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T I_m \sin \omega t \cdot U_L \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \omega L \sin \omega t \cdot \cos \omega t \, dt = 0 \quad (4.1)$$

In der Spule wird im zeitlichen Mittel keine Energie verbraucht, deshalb nennt man  $R_L$  einen „Blindwiderstand“. Die Widerstandswirkung der Spule, d. h. die Begrenzung der Amplitude des Wechselstromes, beruht auf der zeitweiligen Energieaufnahme beim Aufbau des Magnetfeldes; beim Abbau desselben wird diese Energie aber wieder an die Stromquelle zurückgegeben. Der Strom in der Spule ist ein „wattloser“ Strom.

### 4. Kapazitiver Widerstand

Im Gleichstromkreis wird ein Kondensator der Kapazität  $C$  (SI-Einheit:  $[C] = 1 \text{ A s V}^{-1} = 1 \text{ Farad} = 1 \text{ F}$ ) einmal aufgeladen und nach erfolgter Aufladung fließt kein Strom mehr. Der Kondensator

stellt also für Gleichstrom einen unendlich hohen Widerstand dar. Im Wechselstromkreis dagegen muss sich ein Kondensator periodisch auf- und entladen, d. h. es fließt ein sich periodisch ändernder Strom  $I = dQ/dt = I_m \sin \omega t$ . Aus der Kondensatorgleichung  $Q = CU$  folgt dann

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU}{dt}$$

und durch Integration

$$U_C = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{I_m}{C} \int \sin \omega t dt = -\frac{1}{\omega C} \cdot I_m \cos \omega t = \frac{1}{\omega C} I_m \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Setzt man auch hier analog zum obigen Vorgehen  $U_C = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ , so folgt aus dem Vergleich für die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom an einem Kondensator  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  und

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m = R_C I_m.$$

Man sieht, dass das Verhältnis  $U_m/I_m = R_C = 1/\omega C$  die Bedeutung eines bei Wechselstrom auftretenden Widerstandes hat; er heißt kapazitiver Widerstand und ist frequenzabhängig. Die im Kondensator umgesetzte Leistung verschwindet analog zur Spule (Gl. (4.1)). Auch der kapazitive Widerstand ist ein Blindwiderstand, der auf dem sich periodisch auf- und abbauenden elektrischen Feld im Kondensator beruht. Der kapazitive Widerstand ist der Frequenz umgekehrt proportional; er bietet daher einem hochfrequenten Wechselstrom einen kleineren Widerstand als einem niederfrequenten (Anwendung: Hochfrequenzkurzschluss durch Parallelkondensator).

## 5. Zeigerdiagramm

In der Wechselstromlehre fasst man Spannungen, Ströme und Widerstände vorteilhaft als komplexe Größen auf und stellt sie in der komplexen Zahlenebene dar. Setzt man für die Wechselspannung bzw. den Wechselstrom die komplexen Ausdrücke

$$u = U_m e^{j\omega t} = U_m (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

$$i = I_m e^{j(\omega t - \varphi)} = I_m [\cos(\omega t - \varphi) + j \sin(\omega t - \varphi)]$$

mit  $j = \sqrt{-1}$  als imaginärer Einheit und  $\varphi$  als Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung, so gilt das Ohmsche Gesetz in der komplexen Schreibweise

$$u = Zi.$$

Hieraus folgt für den komplexen Wechselstromwiderstand

$$Z = \frac{u}{i} = \frac{U_m}{I_m} e^{j\varphi} = |Z| e^{j\varphi}.$$

Der Betrag des Wechselstromwiderstandes  $|Z|$  wird „Scheinwiderstand“  $R_S$  genannt. Er kann durch die Messung der Scheitel- oder der Effektivwerte von Strom und Spannung bestimmt werden. Entsprechend heißt der Realteil „Wirkwiderstand“ und der Imaginärteil „Blindwiderstand“.

	Widerstandsoperator	Wirkwiderstand	Blindwiderstand
Ohmscher Widerstand	$Z_R = R$	$\Re(Z_R) = R$	-
Induktiver Widerstand	$Z_L = j\omega L$	-	$\Im(Z_L) = \omega L$
Kapazitiver Widerstand	$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$	-	$\Im(Z_C) = \frac{1}{\omega C}$

Tabelle 4.1: Komplexe Widerstände im Wechselstromkreis

Der Wechselstromwiderstand  $Z$  setzt sich im Allgemeinen aus ohmschen, induktiven und kapazitiven Anteilen zusammen, für die man formal folgende komplexe Widerstandsoperatoren  $Z_R$ ,  $Z_L$  und  $Z_C$  einführt (Tabelle 4.1).

Mit den so definierten Widerstandsoperatoren erreicht man eine übersichtliche Beschreibung der Verhältnisse im Wechselstromkreis in Analogie zur Behandlung im Gleichstromkreis, denn es gelten die gleichen Gesetze für die Addition von Widerständen bei Reihen- und Parallelschaltungen wie im Gleichstromkreis. Zur übersichtlichen Darstellung dieser Verhältnisse benutzt man vorteilhaft die Zeigerdiagramme: Den Widerstandsoperatoren sind eineindeutig Punkte in der Gaußschen Zahlenebene zugeordnet, und die „Ortsvektoren“ zu diesen Punkten, die so genannten Zeiger, können wie aus der Vektoralgebra bekannt addiert werden.

## 6. Reihenschwingkreis

Ein ohmscher Widerstand  $R$ , eine Spule der Induktivität  $L$  und ein Kondensator der Kapazität  $C$  seien in Reihe geschaltet. Wird eine Wechselspannung  $U$  angelegt, dann fließt durch alle drei Widerstände ein Strom, und es ergeben sich aufgrund der obigen Überlegungen charakteristische Phasenbeziehungen zwischen Strom und Spannung (Abb. 4.1). Für die Berechnung des Gesamtwiderstandes eines Wechselstromkreises benutzt man zweckmäßig die Widerstandsoperatoren (vgl. Ziffer 5). Für eine Reihenschaltung ergibt sich der Wechselstromwiderstand zu

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

den man in der komplexen Zahlenebene als Zeiger darstellen kann (Abb. 4.2). Für den Betrag des Wechselstromwiderstandes erhält man

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (4.2)$$

und für die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung

$$\tan \varphi = \frac{1}{R} \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

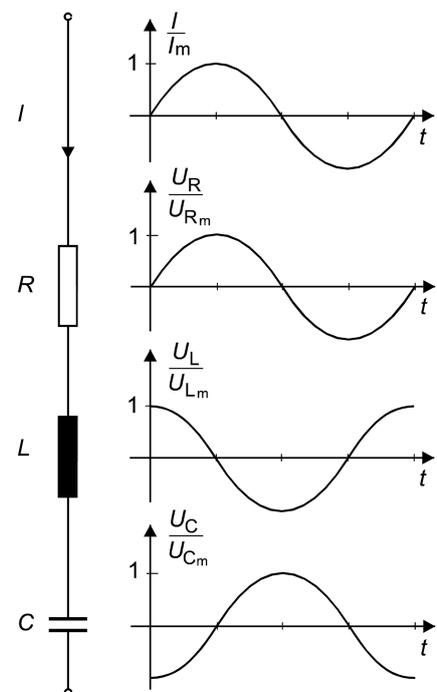


Abbildung 4.1: Phasenbeziehungen im Reihenschwingkreis

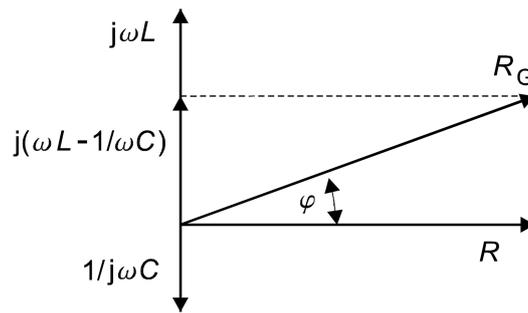


Abbildung 4.2: Zeigerdiagramm für den Reihenschwingkreis

Verändert man  $L$ ,  $C$  oder  $\omega$  kontinuierlich, so erreicht für  $\omega L = 1/\omega C$  der Betrag des Wechselstromwiderstandes ein Minimum  $|Z| = R$ , unabhängig von der Größe der Blindwiderstände. Dieser Fall heißt Resonanzfall und tritt bei der Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (4.3)$$

(Thomsonsche Formel) auf. Da im Resonanzfall der Widerstand minimal wird, nimmt der Strom ein Maximum an. Die an Spule und Kondensator abfallenden Teilspannungen sind im Resonanzfall gleich und heben sich gegenseitig auf. Bei genügend kleinem  $R$  können sie größer als die am Reihenschwingkreis anliegende Gesamtspannung  $U$  werden. Deshalb wird das Verhältnis

$$\begin{aligned} \rho &= (U_L)_{\text{res}}/U = (U_C)_{\text{res}}/U \\ \rho &= \omega L/R = 1/(\omega CR) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Spannungsüberhöhung genannt.

## 7. Parallelschwingkreis

Für den gedämpften Parallelschwingkreis (Abb. 4.3) erhält man

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{1/j\omega C} + \frac{1}{R + j\omega L}$$

und für den Scheinwiderstand:

$$R_S = \frac{L/C\sqrt{1 + (R/\omega L)^2}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \quad (4.5)$$

Oft ist  $R \ll \omega L$ . Dann kann die Wurzel im Zähler weggelassen werden, und im Resonanzfall wird  $R_S$  maximal:  $R_S = L/RC$  (Sperrkreiswirkung). Für die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung erhält man

$$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R}(1 - \omega^2 LC) - \omega RC. \quad (4.6)$$

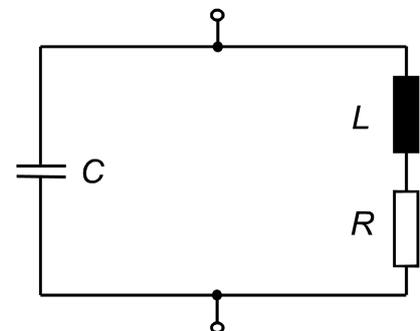


Abbildung 4.3: Parallelschaltung

## Aufgaben

1. Überprüfung der tatsächlichen Ausgangsspannung und der Frequenzskala (für einige ausgewählte Frequenzen) des Tonfrequenz-RC-Generators mit Hilfe des Oszilloskops.
2. Bestimmung der Kapazität eines Kondensators aus der graphischen Darstellung des Kondensatorstromes  $I_C$  als Funktion der Frequenz  $f$  (Gl. (4.9)).
3. Bestimmung der Induktivität  $L$  und des Ohmschen Widerstandes  $R$  einer Spule aus den graphischen Darstellungen: Quadrat des Scheinwiderstandes  $R_S^2$  als Funktion des Quadrates der Frequenz  $f^2$  (Gl. (4.10)).
4. Bestimmung des Resonanzverhaltens eines Reihenschwingkreises bei Frequenzänderung. Graphische Darstellung des Stromes  $I$  und der Spannungsüberhöhung  $U_C/U_G$  als Funktion der Frequenz  $f$  (Gl. (4.4)).
5. Bestimmung des Resonanzverhaltens eines Parallelschwingkreises bei Frequenzänderung. Eintragung der Abhängigkeit des Stromes von der Frequenz in die grafische Darstellung der Aufgabe 4. Man zeichne vor Versuchsbeginn das Schaltbild.
6. Berechnung der Resonanzfrequenz aus den Werten der Aufgaben 2. und 3. (Gl. (4.3)). Vergleich mit dem in Aufgabe 4. und 5. bestimmten Wert.

## Versuchsdurchführung

Zur Erzeugung der harmonischen Wechselspannung dient ein Tonfrequenz-RC-Generator, dessen Ausgangsspannung  $U_G = 1.80 \text{ V}$  fest eingestellt und dessen Frequenz variabel ist. Alle Strom- und Spannungsmessungen werden mit einem Zweikanal-Oszilloskop durchgeführt, dessen Bedienung der Platzanleitung zu entnehmen ist. **Bei allen Messungen schalte man das Oszilloskop zuletzt ein und zuerst aus!** Die Verstärkung der beiden Vertikalverstärker  $Y_A$  bzw.  $Y_B$  des Oszilloskops kann mit dem Stufenschalter (hinterer Drehknopf) in 11 Stufen  $V_j$  von 20 VOLTS/DIV. bis 0.01 VOLTS/DIV. (wobei 1 DIV = 1 cm) und in jeder Stufe kontinuierlich (vorderer Drehknopf) verändert werden. Für alle Messaufgaben werden bei beiden Systemen die vorderen Drehknöpfe bis zum Einrasten (Anschlag) nach rechts gedreht, nur dann stimmt die Kalibrierung der Verstärker. Beim Aufbau der Schaltungen ist zu beachten, dass beide Vertikalverstärker  $Y_A$  bzw.  $Y_B$  des Oszilloskops auf ein und denselben Masseanschluss ( $\perp$ ) geschaltet sind, der jeweils über den BNC-Koaxialkabel-Anschluss (in der Abschirmung) auch nach außen geführt wird.

### Spannungsmessung

Zur Messung einer unbekanntenen Spannung  $U$  wird jeweils die Stufe  $V_j$  gewählt, die innerhalb des Messrasters des Bildschirms das größtmögliche Messsignal bewirkt. Ist  $h$  die Gesamthöhe des Signals in cm, so berechnet sich die Spannung  $U$  nach

$$U = h \cdot V_j. \quad (4.7)$$

### Strommessung

Sie erfolgt durch die Bestimmung des Spannungsabfalls  $U$  an einem Präzisionswiderstand (Dekadenwiderstand) von  $R_p = 10 \Omega$ . Der Strom berechnet sich nach

$$I = U/R_p = hV_j/R_p. \quad (4.8)$$

Der Widerstand  $R_p$  ist in guter Näherung gegenüber den Widerständen von Spule und Kondensator vernachlässigbar.

Für Aufgabe 1 sind zunächst die Feineinstellungen für die Verstärkung in beiden Kanälen und die Zeitbasis des Oszilloskops zu überprüfen; die entsprechenden Einstellregler (markiert mit ►) müssen auf die kalibrierte Position nach rechts bis zum Anschlag bzw. Einrasten eingestellt sein (s. auch oben). Mit einer geeigneten Verstärkung ist das sinusförmige Generatorsignal zu untersuchen: Aus der Spannung  $U_{SS}$  (Spitze-Spitze) des Signals ist sein Effektivwert zu bestimmen. Für verschiedene Generatorfrequenzen ist sowohl die Konstanz der Signalamplitude als auch die Frequenzskala des Generators zu überprüfen. Zur Bestimmung von Signalfrequenzen ist zweckmäßig über mehrere Signalperioden die Periodendauer zu ermitteln. Aus den erhaltenen Ergebnissen sind auch die Fehler für den Effektivwert und die Frequenz des Sinussignals abzuschätzen.

Für Aufgabe 2 (Schaltung nach (Abb. 4.4) wird die Generatorspannung ( $U_G = 1.80\text{ V}$ ) dem Vertikalverstärker  $Y_B$  zugeführt. Mit dem anderen Vertikalverstärker  $Y_A$  wird der Spannungsabfall

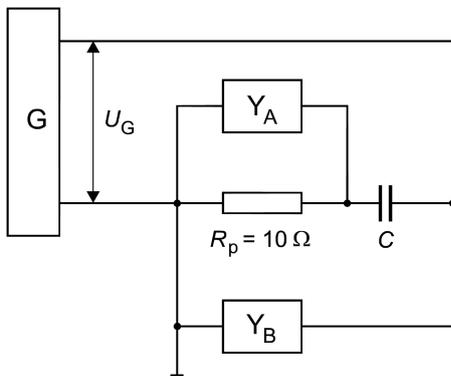


Abbildung 4.4: Kapazitätsbestimmung

über  $R_p$  gemessen und daraus der Kondensatorstrom  $I_C$  berechnet (Gl. 4.8)). Diese Messung muss im empfindlichsten Messbereich ausgeführt werden. Die Generatorfrequenz wird von 1 kHz bis 15 kHz in Schritten von 1 kHz variiert. Für den kapazitiven Widerstand  $R_C$  gilt

$$R_C = \frac{U_G}{I_C} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$$

und daraus folgt

$$I_C = 2\pi C U_G f. \quad (4.9)$$

Aus der graphischen Darstellung von  $I_C$  als Funktion der Frequenz  $f$  bestimme man die Kapazität  $C$  des Kondensators.

Für Aufgabe 3 wird in der Schaltung (Abb. 4.4) der Kondensator durch die Spule ersetzt. Für den Scheinwiderstand  $R_S$  der Reihenschaltung der Spule mit der Induktivität  $L$  und ihres ohmschen Widerstandes  $R$  gilt nach Gl. (4.2)

$$R_S = \frac{U_G}{I_L} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2} \quad \text{bzw.}$$

$$R_S^2 = R^2 + 4\pi^2 L^2 f^2 \quad (4.10)$$

Die Messung des Spulenstromes  $I_L$  erfolgt wie in Aufgabe 1. Die Generatorfrequenz wird im Bereich  $a$  von 10 Hz bis 100 Hz in Schritten von 10 Hz und im Bereich  $b$  von 100 Hz bis 500 Hz in Schritten von 100 Hz variiert. Für beide Frequenzbereiche stelle man grafisch das Quadrat des Scheinwiderstandes  $R_S^2$  als Funktion des Frequenzquadrates  $f^2$  dar und ermittle aus der Darstellung im Bereich  $a$  den ohmschen Widerstand  $R$  (Schnittpunkt mit der  $R_S^2$ -Achse) und aus der im Bereich  $b$  die Induktivität  $L$  aus dem Anstieg. Zweckmäßig ist jeweils ein Geradenausgleich, z.B. mit dem PC-Programm „GERA“.

Für Aufgabe 4 (Schaltung nach Abb. 4.4) wird die Spannung  $U_C$  am Kondensator mit dem Vertikalverstärker  $Y_B$  und der Strom  $I$  im Schwingkreis (Spannungsabfall über  $R_p$ ) mit dem Vertikalverstärker  $Y_A$  gemessen (Gl. (4.7) bzw. (4.8)). Die Generatorfrequenz wird von 100 Hz bis 1200 Hz in Schritten von 100 Hz variiert, wobei im Resonanzgebiet die Schrittweite soweit verringert werden

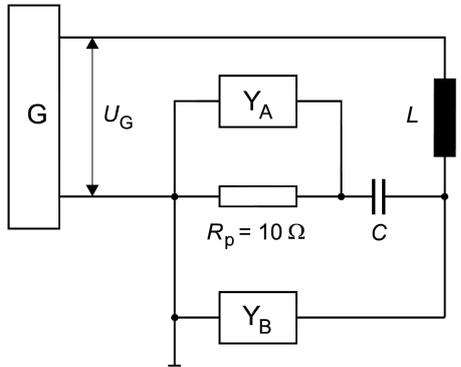


Abbildung 4.5: Reihenschwingkreis

muss, dass das Strommaximum möglichst genau erfasst werden kann. Graphisch trage man den Strom  $I$  und das Spannungsverhältnis  $U_C/U_G$  als Funktion der Frequenz  $f$  auf.

Für die Resonanzfrequenz  $f_{\text{res}}$  bestimmt man die Spannungsüberhöhung  $\rho = U_{C_{\text{res}}}/U_G$  (Gl. (4.4)). Daraus berechne man den ohmschen Widerstand der Spule  $R$  und vergleiche diesen mit dem Wert aus Aufgabe 2. Nach Abschluss aller Messungen stelle man bei der Resonanzfrequenz  $f_{\text{res}}$  unter Benutzung der Stufen- und Feinverstärkung beider Kanäle gleichgroße Signale von Strom und Spannung unter voller Ausnutzung des Bildschirmes ein und bestimme die Phasenverschiebung von Strom und Spannung!

Für Aufgabe 5 überlege man sich eine geeignete Schaltung. Da im Resonanzfall ein sehr kleiner Strom und folglich auch ein sehr geringes Signal gemessen werden muss, ist durch geschickte Leitungsführung und Abschirmung die Einstreuung von Störsignalen (z.B. 50 Hz Netzfrequenz und deren Harmonische) soweit wie möglich zu minimieren. Die Generatorfrequenz wird von 100 Hz bis 1200 Hz in Schritten von 100 Hz variiert, wobei erneut die Schrittweite im Resonanzgebiet soweit verringert werden muss, dass das Stromminimum möglichst gut erfasst wird.

Für Aufgabe 6 benutze man die Thomsonsche Schwingungsgleichung (Gl. (4.3)).

## Fragen

1. Den Definitionsgleichungen für den induktiven und den kapazitiven Widerstand kann man leicht die Additionsgesetze für Induktivitäten und Kapazitäten entnehmen. Wie lauten sie?
2. Mit welchen anderen Verfahren (außer den hier bereits beschriebenen) lassen sich Kapazitäten und Induktivitäten messen?
3. Wie leitet man Gl. (4.5) und Gl. (4.6) her? (Hinweis: Man beachte, dass sich bei Parallelschaltung nicht die Widerstände bzw. Spannungen, sondern die Leitwerte bzw. Ströme addieren.)
4. Wie werden Reihen- und Parallelschwingkreise technisch genutzt?
5. Was versteht man unter den Begriffen *Hochpass*, *Tiefpass*, *Bandpass* und *Bandsperr*? Wie lassen sich entsprechende Filterschaltungen realisieren?

---

---

# E5 Gleichrichterschaltungen

---

---

## Physikalische Grundlagen

Grundbegriffe
Halbleiterdiode
Vakuumdioden
Mittelwerte
Effektivwerte
Drehspulmessgerät für Gleich- und Wechselspannungen
Aufbau eines Oszillografen

### 1. Gleichrichtung

Gleichrichterschaltungen dienen der Umwandlung von Wechselspannungen in Gleichspannungen. Dazu werden als Gleichrichter bezeichnete Bauelemente verwendet, deren elektrischer Widerstand von der Polarität der angelegten Spannung abhängt. Für die eine Halbwelle einer anliegenden Wechselspannung haben sie einen geringen Widerstand (Durchlassrichtung), für die andere Halbwelle einen hohen Widerstand (Sperrrichtung). So können Wechselspannungen durch Gleichrichter in pulsierende Gleichspannungen umgewandelt werden. Technisch von Gleichrichterschaltungen dienen der Umwandlung von Wechselspannungen in Gleichspannungen. Dazu werden als Gleichrichter bezeichnete Bauelemente verwendet, deren elektrischer Widerstand von der Polari-

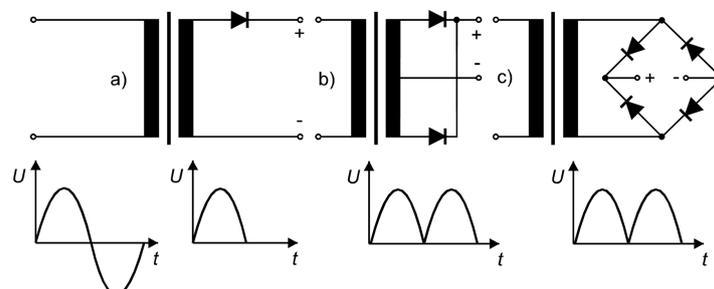


Abbildung 5.1: Gleichrichterschaltungen

tät der angelegten Spannung abhängt. Für die eine Halbwelle einer anliegenden Wechselspannung haben sie einen geringen Widerstand (Durchlassrichtung), für die andere Halbwelle einen hohen Widerstand (Sperrrichtung). So können Wechselspannungen durch Gleichrichter in pulsierende

Gleichspannungen umgewandelt werden. Technisch von Bedeutung sind besonders Gleichrichter auf Halbleiterbasis und in Spezialgebieten weiterhin Vakuumdioden. Die drei wichtigsten Schaltungsarten von Gleichrichtern unterscheiden sich im Bedarf an Bauelementen und in der Qualität der gleichgerichteten Spannung (Abb. 5.1). Bei Anliegen einer harmonischen Wechselspannung  $U = U_m \sin \omega t$  wird bei der Einweggleichrichtung (Abb. 5.1a) nur die positive oder nur die negative Halbwelle ausgenutzt, während bei der Zweiweggleichrichtung (Abb. 5.1b und c) beide Halbwellen zur Gleichrichtung beitragen. Bei der Einweggleichrichtung steht dem Vorteil der geringen Anzahl an Bauelementen der Nachteil eines verhältnismäßig höheren Aufwandes zur nachfolgenden Glättung des besonders stark pulsierenden Signals gegenüber. Die Zweiweggleichrichtung (Abb. 5.1b) erfordert dagegen einen Transformator mit Mittelanzapfung. Um die gleiche Amplitude wie bei der Einweggleichrichtung zu erreichen, muss jede Teilwicklung die gleiche Spannung liefern wie die Wicklung bei der Einweggleichrichtung. Diesen Nachteil vermeidet die Graetzschaltung (Abb. 5.1c); allerdings ist hier gegenüber der Schaltung in Abb. 5.1b die doppelte Anzahl von Dioden.

## 2. Messung von Gleich- und Wechselspannungen

Das Prinzip soll wegen der besseren Anschaulichkeit an Drehspul-Spannungsmessern mit analoger Anzeige dargestellt werden. Sie beruhen auf der Messung geringer Gleichströme, indem die sich in einem Permanentmagneten befindende Drehspule infolge der magnetischen Wirkung des Stromes eine der Stromstärke proportionale Drehung erfährt. Wegen des konstanten Innenwiderstandes (Widerstand der Drehspule und der zur Messbereichseinstellung vorgeschalteten Präzisionswiderstände) ergibt sich eine lineare Skale, welche direkt in Spannungseinheiten geeicht werden kann. Bei genügend schnellen periodischen Spannungsänderungen stellt sich der an der Spule befestigte Zeiger infolge der Trägheit dieses mechanischen Systems auf den zeitlichen Mittelwert

$$\bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T U \, dt \quad (5.1)$$

ein, bei einer Wechselspannung also auf Null. Wechselspannungen können mit einem Drehspulinstrument gemessen werden, wenn dem Instrument ein Gleichrichter vorgeschaltet wird. Wegen der nichtlinearen Kennlinie des Gleichrichters ist die Skale aber nicht mehr streng linear und sie wird in die für praktische Zwecke benötigten Effektivwerte geeicht, gegeben durch

$$U_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U^2 \, dt \quad (5.2)$$

Für die Skalierung der Wechselspannungsgeräte wird ein sinusförmiger Verlauf der Spannung, frei von verfälschenden Oberschwingungen, vorausgesetzt.

## 3. Quantitative Betrachtungen zur Zweiweggleichrichtung

Die sinusförmige Eingangs-Wechselspannung  $U_E = U_m \sin \omega t$  erzeugt in der Zweiweggleichrichterschaltung (Abb. 5.2) einen Stromfluss

$$I(t) = \frac{U_m}{R + R_D} |\sin \omega t|, \quad (5.3)$$

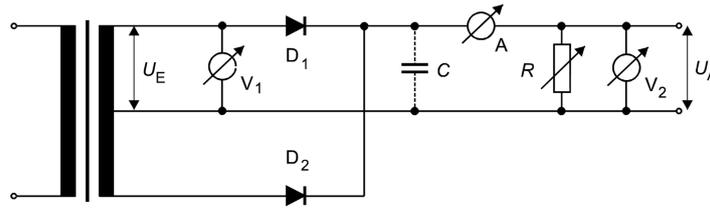


Abbildung 5.2: Zweiweggleichrichtung

wobei  $R_D$  der Innenwiderstand der Diode und  $R$  der Lastwiderstand des Kreises ist. An letzterem entsteht nach dem Ohmschen Gesetz der Spannungsabfall

$$U_A(t) = I(t) \cdot R = \frac{U_m R}{R + R_D} |\sin \omega t|. \quad (5.4)$$

Ist das Messgerät  $V_2$  ein für Gleichspannungen geeichtes Drehspulinstrument, zeigt es infolge der Trägheit des Messsystems den zeitlichen Mittelwert  $\bar{U}_A$  an, der sich wie folgt ergibt:

$$\bar{U}_A = \frac{1}{T} \int_0^T U_A(t) dt = \frac{1}{T} \frac{2U_m R}{R + R_D} \int_0^{T/2} \sin \omega t dt = \frac{2U_m}{\pi} \cdot \frac{R}{R + R_D}. \quad (5.5)$$

Ist das Messgerät  $V_2$  ein für Wechselspannungen geeichtes Drehspulinstrument, zeigt es dagegen den Effektivwert an:

$$U_{\text{Aeff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_A^2(t) dt} = \sqrt{\frac{2}{T} \left( \frac{U_m R}{R + R_D} \right)^2 \int_0^{T/2} \sin^2 \omega t dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{R}{R + R_D}. \quad (5.6)$$

Diese Überlegungen zeigen, dass die Ausgangsspannung  $U_A$  von der Größe des Belastungswiderstandes  $R$  abhängt (Gl. (5.5) bzw. (5.6)), da dieser auch den fließenden Strom (Gl. (5.3)) bestimmt. Nimmt der Strom  $I(t)$  zu (bei fester Eingangsspannung), so fällt am Innenwiderstand der Diode  $R_D$  eine größere Spannung ab und die Ausgangsspannung  $U_A$  muss abnehmen. Wird speziell der Lastwiderstand sehr groß ( $R \rightarrow \infty$ ), dann wird der Strom sehr klein ( $I(t) \rightarrow 0$ ), man sagt die Schaltung arbeitet im Leerlauf, und es ergeben sich die Leerlaufspannungen

$$\bar{U}_{A\text{Leer}} = \frac{2U_m}{\pi} \quad \text{bzw.} \quad U_{\text{AeffLeer}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (5.7)$$

Wird parallel zum Ausgang der Gleichrichterschaltung ein Kondensator  $C$  (Abb. 5.2, gestrichelt) geschaltet, dann lädt sich dieser sowohl für Einweg- als auch für Zweiweggleichrichtung im Leerlauf ( $I(t) = 0$ ) bis auf den Scheitelwert  $U_m$  auf und man misst sowohl mit einem Gleich- wie auch mit einem Wechselspannungsinstrument den Scheitelwert

$$\bar{U}_{A\text{Leer}} = U_{\text{AeffLeer}} = U_m. \quad (5.8)$$

Voraussetzung dabei ist, dass der Innenwiderstand des Messinstruments groß gegenüber dem Innenwiderstand des Gleichrichters ist. Im Fall der Belastung ist  $\bar{U}_A$  mit Kondensator immer

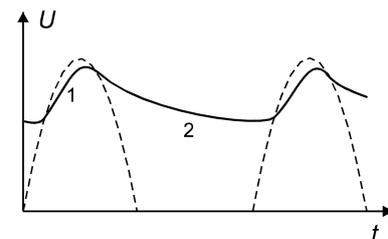


Abbildung 5.3: Glättung

größer als ohne und gleichfalls lastabhängig. Abb. 5.3 zeigt qualitativ den zeitlichen Verlauf einer geglätteten Spannung für den Fall der Einweggleichrichtung.

Der Betrag der Restwelligkeit hängt von der Größe des Kondensators, der Belastung und dem Innenwiderstand des Gleichrichters ab. Die mathematische Beschreibung des Ladevorganges (Teil 1 der Kurve) ist schwierig, da sich die Ladespannung zeitlich ändert und der Innenwiderstand des Gleichrichters (Flusswiderstand) nicht konstant ist. Die Entladungskurve (Teil 2) ist dagegen eine einfache Exponentialfunktion mit negativem Exponenten.

Die unten stehende Tabelle (Tab. 5.1) gibt eine Übersicht über die Mittel- und Effektivwerte nach (Gl. (5.1) bzw. Gl. (5.2)) für eine Wechselspannung sowie für pulsierende Gleichspannungen nach Ein- bzw. Zweiweggleichrichtung ohne Glättung.  $U_m$  ist dabei der jeweilige Scheitelwert. Zusammenfassend folgt, dass pulsierende Gleichspannungen außer mit Gleich- auch mit Wechselspannungsinstrumenten gemessen werden können. Letztere zeigen aber nur dann den Effektivwert an, wenn das Signal während der ganzen Periode sinusförmig ist, was im Beispiel der Tabelle nur bei der Zweiweggleichrichtung der Fall ist. Bei der Einweggleichrichtung wird nicht der Effektivwert  $U_m/2$  (Tab. 5.1) angezeigt, sondern der Mittelwert aus den Effektivwerten für die beiden Halbperioden; die erste Halbperiode mit  $U_{\text{eff}} = U_m/\sqrt{2}$  und die zweite Halbperiode mit  $U_{\text{eff}} = 0$  (Gl. (5.2)) ergeben als Anzeige

$$U^* = \frac{1}{2} \left( \frac{U_m}{\sqrt{2}} + 0 \right) = \frac{U_m}{2\sqrt{2}}. \quad (5.9)$$

Die im vorliegenden Praktikumsversuch eingesetzten Vielfachmessgeräte mit einem zentralen Drehschalter zur Messbereichseinstellung sind Drehspulmessgeräte der oben geschilderten Betriebsarten. Es muss aber darauf hingewiesen werden, dass aus Schaltungsgründen, die hier nicht näher erläutert werden sollen, die Mehrzahl der Vielfachmessgeräte Gleichspannungsmessungen nur in der dafür vorgesehenen Betriebsart zulassen, also nicht in den Wechselspannungsbereichen. Das gilt insbesondere für die elektronischen Vielfachmesser mit digitaler Anzeige. Digitalvielfachmessgeräte enthalten anstelle des mechanischen Messwerkes einen Messverstärker mit nachfolgendem Analog-Digital-Wandler und dekadischer Ziffernanzeige. Hochwertigere Geräte erlauben wegen des relativ hohen Eingangswiderstandes der Messverstärker eine praktisch „leistungslose“ Spannungsmessung (vgl. Versuch E2). Mit entsprechendem Schaltungsaufwand sind auch wesentlich kleinere Gerätefehler (systematische Restfehler) als mit mechanischen Messwerken erreichbar.

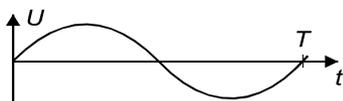
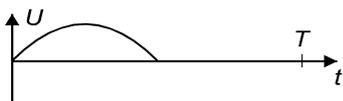
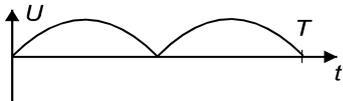
Spannungsart	Spannungsverlauf	Mittelwert $\bar{U}$	Effektivwert $U_{\text{eff}}$
Wechselspannung		0	$\frac{U_m}{\sqrt{2}}$
Gleichspannung (Einweg)		$\frac{U_m}{\pi}$	$\frac{U_m}{2}$
Gleichspannung (Zweiweg)		$\frac{2U_m}{\pi}$	$\frac{U_m}{\sqrt{2}}$

Tabelle 5.1: Mittel- und Effektivwerte

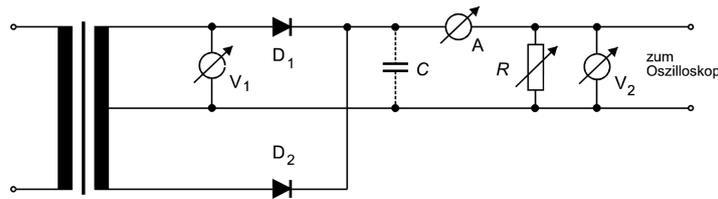


Abbildung 5.4: Schaltung zum Versuch

## Aufgaben

- Messung der zeitlichen Mittelwerte  $\bar{U}$  der Gleichspannungen als Funktion des Laststromes  $I$  für Ein- und Zweiweggleichrichtung jeweils mit und ohne Kondensator ( $10 \mu\text{F}$ ) und grafische Darstellung der Ergebnisse in einem gemeinsamen Diagramm.
- Getrennt für die Einweg- und die Zweiweggleichrichtung sollen in jeweils gemeinsamen Diagrammen die Spannungsverläufe dargestellt werden für die Fälle:
  - keine Belastung, ohne Ladekondensator,
  - keine Belastung, mit Ladekondensator,
  - mittlere Belastung, mit Ladekondensator.
- Messung der Gleichspannung für die Ein- und Zweiweggleichrichtung jeweils im Leerlauf ohne Glättungskondensator
  - mit dem für Gleichspannungen geeichten Drehspulmessinstrument,
  - mit dem für Wechselspannungen geeichten Drehspulinstrument.
- Berechnung der Scheitelspannung  $U_m$  aus den Messwerten von Aufgabe 3 und Vergleich mit
  - dem aus der Wechselspannungsmessung mit  $V_1$  berechneten Wert,
  - den Gleichspannungsmessungen mit Glättungskondensator und ohne Belastung für Ein- und Zweiweggleichrichtung (Gl. (5.8)).

## Versuchsdurchführung

Die Schaltung der Zweiweggleichrichtung (Abb. 5.4) wird unter Verwendung von Halbleiterdioden aufgebaut. Der Laststrom wird mit dem Regelwiderstand  $R$  eingestellt. Aus der aufgebauten Zweiweggleichrichtung erhält man die Einweggleichrichtung durch Unterbrechung des Katoden- oder Anodenanschlusses von  $D_2$ . Für  $V_1$  verwende man ein für Wechselspannungen (Effektivwertanzeige  $U_{\text{eff}}$ ) geeichtetes Messgerät.

Für Aufgabe 2 werden die Spannungsverläufe vom Bildschirm des Oszillografen abgezeichnet.

## Fragen

1. Erläutern Sie das Wirkungsprinzip einer Halbleiterdiode und beschreiben Sie die Strom-Spannungs-Kennlinie.
2. Erläutern Sie die Wirkungsweise eines Oszillographen.
3. Erläutern Sie die Vor- und Nachteile der Einweg- gegenüber der Zweiweggleichrichtung.
4. Was ist eine Kaskadenschaltung von Gleichrichtern und Kondensatoren und wie wirkt sie?
5. Überlegen Sie, wie Sie mit den elektronischen Bauelementen Quadrierer, Radizierer, Tiefpass einen echten Effektivwertmesser realisieren können, der für beliebige periodische Signale korrekt arbeitet.

---

---

# E7 Kompensationsmethode

---

---

## Physikalische Grundlagen

Grundbegriffe
Innenwiderstand von Spannungsquellen
Urspannung
Klemmenspannung
Kirchhoffsche Regeln
Weston-Normalelement

Die Poggendorffsche Kompensationsmethode ist eine Präzisionsmethode zur Messung elektrischer Spannungen. Bei jeder Spannungsquelle muss zwischen der Urspannung  $U_0$  und der Klemmenspannung  $U_K$  unterschieden werden, weil jede Spannungsquelle einen Innenwiderstand  $R_i$  besitzt (Abb. 6.1a). Schließt man an die Klemmen  $KK$  den Außenwiderstand  $R_a$  (Abb. 6.1b) an, so fließt in dem Kreis der Strom  $I$  und erzeugt sowohl am Innen- als auch am Außenwiderstand einen Spannungsabfall. Nach dem Maschensatz (2. Kirchhoffsche Regel) gilt

$$U_0 = IR_a + IR_i \quad (6.1)$$

und weil für die Klemmenspannung  $U_K = IR_a$  gilt, folgt

$$U_K = U_0 - IR_i \quad (6.2)$$

Die Klemmenspannung ist also vom Laststrom abhängig. Sie unterscheidet sich umso weniger von der Urspannung, je kleiner der Laststrom  $I$  und der Innenwiderstand  $R_i$  sind. Deshalb fordert man von einer Messmethode für die Urspannung einen kleinen fließenden Strom, im Idealfall Stromlosigkeit.

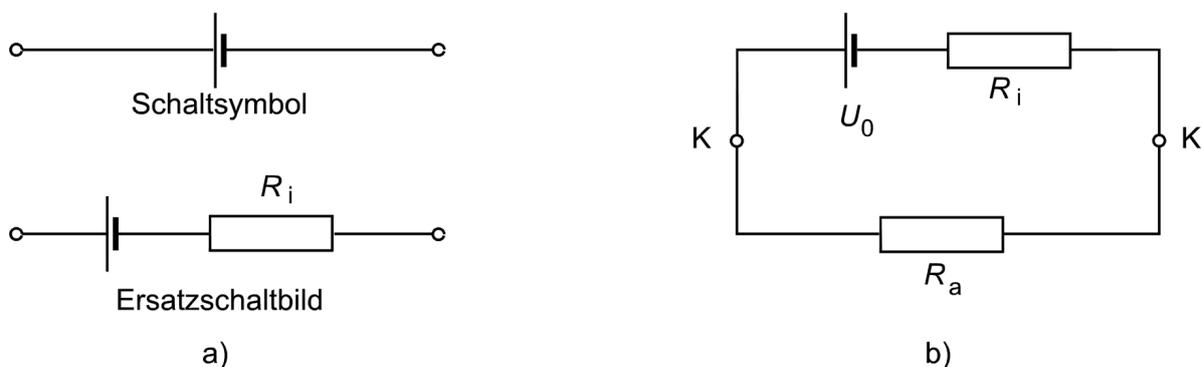


Abbildung 6.1: Innenwiderstand von Spannungsquellen

Bei der Poggendorffschen Kompensationsmethode wird die Forderung der Stromlosigkeit erfüllt, indem man die Urspannung durch eine gleichgroße Spannung kompensiert. Mit Hilfe einer Potentiometerschaltung erzeugt man aus der Spannungsquelle  $U_2$  (Abb. 6.2) die Spannung  $U_x$  als Spannungsabfall über dem Widerstand  $R_x$  und schaltet sie der Spannungsquelle  $U_1$  entgegen. Man variiert den Widerstand  $R_x$ , bis nach Drücken des Tasters  $T$  im Galvanometer  $G$  Stromlosigkeit angezeigt wird. Die Spannung  $U_x$  kompensiert dann die Spannung  $U_1$  und es gilt

$$U_x = U_1, \quad (6.3)$$

wobei  $U_1$  aufgrund der Stromlosigkeit die Urspannung der Spannungsquelle  $U_1$  ist (Gl. (6.2)). Außer zur Messung der Urspannung kann die Kompensationsmethode auch zur Präzisionsbestimmung von Spannungen verwendet werden, z.B. zur Ermittlung der Klemmenspannung einer

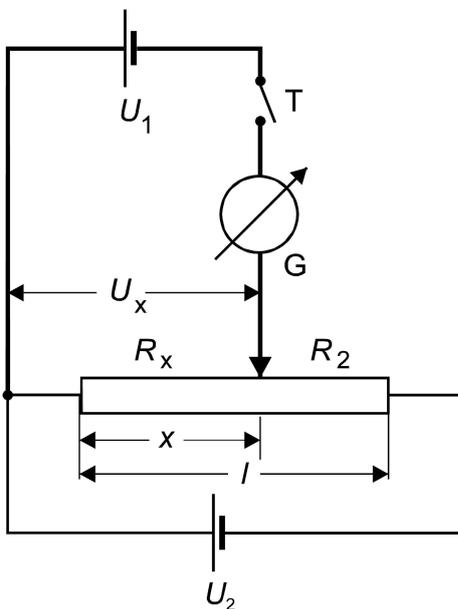


Abbildung 6.2: Poggendorffsche Kompensationsmethode

Spannungsquelle  $U_2$  bei festem Lastwiderstand  $R_x + R_2$ . Für dieses Messproblem wird ein Spannungsnormal hoher Stabilität und Genauigkeit benötigt und konkret im Versuch wird dafür ein Weston-Normalelement verwendet, das sich im stromlosen Zustand durch hohe Spannungs Konstanz auszeichnet. Das Normalelement wird für eine solche Messaufgabe anstelle der Spannungsquelle  $U_1$  (Abb. 6.2) geschaltet. Der Vorteil der Kompensationsmethode liegt vor allem darin, dass die zu messende Spannungsquelle während der Messung nicht zusätzlich belastet wird, im Gegensatz zur Messung mit einem elektrodynamischen Voltmeter, das stets einen Eigenverbrauch besitzt und deshalb die Spannungsquelle (vgl. Versuch E2) belastet. Weiterhin ist sie eine Nullmethode, bei der auf Stromlosigkeit des Anzeigeinstrumentes (Galvanometer) eingestellt wird, so dass zur Messung zwar ein empfindliches, aber kein absolut geeichtes Instrument benötigt wird. Stromlosigkeit wird natürlich nur im Messzweig (Abb. 6.2, dicke Linien) erreicht, unabhängig von den Strömen in anderen Zweigen der Schaltung.

## Aufgaben

1. Bestimmung der Klemmenspannung eines elektronisch stabilisierten Netzgerätes durch Vergleich mit einem Weston-Normalelement.
2. Messung der Klemmenspannung  $U_K$  eines Trockenelementes in Abhängigkeit vom Belastungsstrom  $I$ .
3. Bestimmung der Urspannung  $U_0$  und des Innenwiderstandes  $R_i$  des Trockenelementes sowie Abschätzung der Messunsicherheiten dieser Größen aus der grafischen Darstellung  $U_K = f(I)$  (Gl. (6.2)).
4. Kontrolle der grafischen Auswertung durch rechnerischen Geradenausgleich.

## Versuchsdurchführung

Zur Erzeugung einer variablen Spannung  $U_x$  verwendet man eine Potentiometerschaltung (Abb. 6.2, dünne Linien). Über dem Widerstand  $R_x$  liegt die Spannung

$$U_x = U_2 \frac{R_x}{R_x + R_2}. \quad (6.4)$$

Im Versuchsaufbau wählt man als Widerstand einen homogenen Draht der Länge  $L$  mit konstantem Querschnitt und einem verschiebbaren Schleifkontakt. Steht dieser an der Stelle  $x$ , dann ist

$$U_x = U_2 \frac{x}{L}, \quad (6.5)$$

weil der Widerstand eines Drahtes proportional zur Länge ist.

Für Aufgabe 1 (Schaltung nach Abb. 6.2) entnimmt man die Spannung  $U_2$  einem Netzgerät, die Spannung  $U_1$  einem Weston-Normalelement. Die Normalspannung des Elementes ist für die gemessene Temperatur der beigefügten Tabelle zu entnehmen. Da das Normalelement nicht belastet werden darf, ist der Taster T nur kurzzeitig zu betätigen. Das Galvanometer wird zunächst auf den unempfindlichen Messbereich geschaltet, der Schieber des Schleifkontaktes in die Mitte des Schleifdrahtes gestellt und geprüft, ob die Schaltung ungefähr abgeglichen ist. Dann erst wird der genaue Abgleich der Kompensationsschaltung durch Verschieben des Schleifkontaktes mit dem empfindlichsten Messbereich des Galvanometers durchgeführt und der  $x$ -Wert abgelesen. Aus 10 verschiedenen Einstellungen wird der Mittelwert  $\bar{x}$  bestimmt, die Spannung  $U_2$  berechnet (Gl. (6.5)) und nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz die Messunsicherheit ermittelt. Für die Drahtlänge  $L$  nehme man eine Messunsicherheit von  $\Delta L = \pm 1 \text{ mm}$  an und für die Spannung des Normalelementes ( $U_x = U_1$ ) schätze man aus dem Temperaturfehler die Messunsicherheit ab.

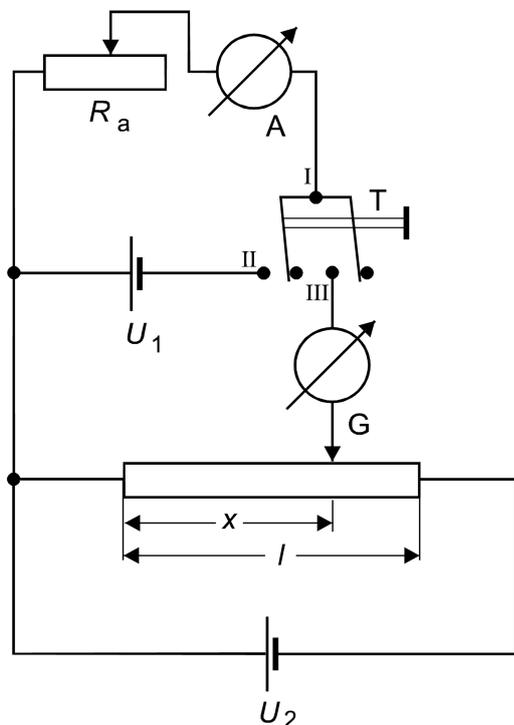


Abbildung 6.3: Schaltung mit Trockenelement

Für Aufgabe 2 wird mit der gleichen, jetzt bekannten Spannung  $U_2$  (Abb. 6.3) des Netzgerätes gemessen. Als Spannungsquelle  $U_1$  verwendet man ein Trockenelement, dessen Innenwiderstand durch einen eingebauten Widerstand erhöht wurde. Man belastete das Trockenelement in Schritten von  $0.05 \text{ mA}$  im Bereich von  $0$  bis  $0.7 \text{ mA}$  mit dem Widerstand  $R_a$  und bestimme die jeweilige Klemmenspannung  $U_K$  durch Kompensation (Gl. (6.5)). Den Doppeltaster T stelle man so ein, dass zunächst das Trockenelement mit dem Widerstand  $R_a$  belastet wird und erst bei erhöhtem Druck auf den Taster dann auch der Galvanometerkreis geschlossen wird.

Für Aufgabe 3 werden die Messunsicherheiten von  $U_0$  und  $R_i$  aus der Differenz des kleinst- und des größtmöglichen Anstieges abgeschätzt, die sich aufgrund der Streuung der Messwerte aus der grafischen Darstellung ergibt.

Für Aufgabe 4 steht das Rechnerprogramm „GERA“ zur Verfügung, das auch die zufälligen Fehler für den Anstieg und den Schnittpunkt mit der  $U_K$ -Achse berechnet.

## Fragen

1. Erläutern Sie die Potentiometerschaltung!
2. Liefert im kompensierten Zustand bei Aufgabe 1 und 2 die Spannungsquelle  $U_1$  (Abb. 6.2 und Abb. 6.3) einen Strom?
3. Ergeben sich bei der Aufgabe 3 für die Bestimmung der Urspannung des Trockenelementes zusätzliche Fehler, wenn sich während der Messung die Hilfsspannung  $U_2$  und/oder die Empfindlichkeit des Galvanometers verändert?
4. Wie berechnet man den Widerstand eines Drahtes mit konstantem Querschnitt aus den Abmessungen des Materials?

---

---

# E11 Magnetische Hysterese

---

---

## Physikalische Grundlagen

Grundbegriffe
Magnetisches Feld
magnetische Induktion
Magnetisierung
Suszeptibilität
Permeabilität
Ferromagnetismus
Hysterese

### 1. Magnetisierung

Das Einbringen eines Stoffes in ein äußeres Magnetfeld  $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$  führt zur Magnetisierung  $\vec{M}$  des Stoffes und hierdurch zu einem geänderten magnetischen Feld  $\vec{B}$  (historisch Induktion) im Medium gegenüber dem Vakuum. Es gilt

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (7.1)$$

mit der magnetischen Feldkonstanten

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \quad (7.2)$$

und der magnetischen Erregung  $\vec{H}$  (historisch Magnetfeld). Die Magnetisierung, definiert als das magnetische Moment pro Volumeneinheit, ist für die meisten Stoffe proportional zum äußeren Magnetfeld, d.h.

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad \text{bzw.} \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \quad (7.3)$$

mit den dimensionslosen Stoffgrößen magnetische Suszeptibilität  $\chi$  und Permeabilität  $\mu = \chi + 1$ . Je nach dem Verhalten der Stoffe im Magnetfeld unterscheidet man sie in Diamagnetika mit  $\chi < 0$ ,  $0 < \mu < 1$  Paramagnetika mit  $\chi > 0$ ,  $\mu > 1$  und Ferromagnetika mit  $\chi \gg 1$ ,  $\mu \gg 1$ .

## 2. Magnetische Hysterese

Ferromagnetische Stoffe (z.B. Eisen, Kobalt, Nickel) haben im Unterschied zu para- oder diamagnetischen Substanzen nicht nur eine sehr große Suszeptibilität bzw. Permeabilität, sondern ihre Magnetisierung bzw. Induktion hängt auch von der Vorgeschichte ab. Dies führt zu einem nicht eindeutigen Zusammenhang zwischen dem  $\vec{M}$ - bzw.  $\vec{B}$ -Feld einerseits und dem  $\vec{H}$ -Feld andererseits, der magnetische Hysterese genannt wird. Die Hysterese wird durch irreversible Vorgänge bei der Magnetisierung verursacht. In ferromagnetischen Stoffen bestehen mikroskopisch kleine Bezirke, die sog. Weißschen Bezirke, die bis zur Sättigung magnetisiert sind. In diesen Bereichen sind die Spins der Elektronen, die als Elementarmagnete aufgefasst werden können, parallel zueinander ausgerichtet. Ohne äußeres Magnetfeld wird diese Magnetisierung nach außen im Allgemeinen nicht wirksam, da sich die Magnetisierungsrichtungen der verschiedenen Weißschen Bezirke im Mittel kompensieren (Abb. 7.1a). Wirkt jedoch ein äußeres Feld, so wachsen diejenigen Weißschen Bezirke, deren magnetisches Moment im äußeren Feld eine geringere potentielle Energie hat, auf Kosten der Nachbarbereiche mit größerer potentieller Energie (Abb. 7.1b). Hierbei verschieben sich die Trennwände zwischen den Bezirken, die so genannten Blochwände, bei kleinen magnetischen Feldstärken reversibel und bei größeren Feldstärken irreversibel (Barkhausensprünge). Bei weiterer Erhöhung des äußeren Magnetfeldes bis zur Sättigungsfeldstärke werden die Spins vollständig in die Feldrichtung gedreht. Diese Magnetisierungsvorgänge spiegeln sich in der Kurve wider, die man bei einer Messung von  $\vec{B}$  in Abhängigkeit  $\vec{H}$  von erhält (Abb. 7.2).

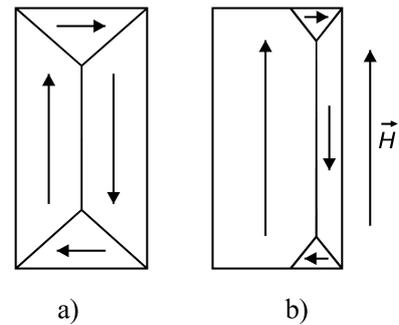


Abbildung 7.1: Weißsche Bezirke

Die Messung an einem unmagnetisierten Stoff ergibt die sog. Neukurve (Abb. 7.2 gestrichelt), wobei die oben beschriebenen reversiblen und irreversiblen Wandverschiebungen und Drehungen den Teilstücken *a* bzw. *b* der Neukurve entsprechen. Bei einem vollen Magnetisierungszyklus ergibt sich die Hysteresekurve (Abb. 7.2 ausgezogen), weil die irreversiblen Wandverschiebungen eine Entmagnetisierung entlang der Neukurve unmöglich machen. So verbleibt nach Abschalten des äußeren Feldes eine als Remanenz bezeichnete Restfeldstärke  $B_R$ . Erst nach Anlegen eines Gegenfeldes mit der Koerzitivfeldstärke  $-H_C$  erreicht die magnetische Feldstärke den Wert Null.

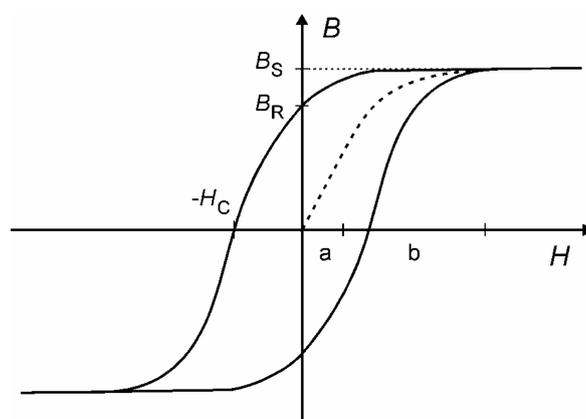


Abbildung 7.2: Hysteresekurve

Bei sehr hohen Feldstärken  $H$  gehen  $M$  bzw.  $B$  (Gl. (7.3)) mit  $\chi = \chi(H)$ ,  $\mu = \mu(H)$  in die Sättigung, bei der alle Spins vollends in die Feldrichtung gedreht sind. Der Sättigungswert der magnetischen Feldstärke wurde in Abb. 7.2 mit  $B_S$  bezeichnet. Bei weiterer Erhöhung von  $H$  ändert sich  $M$  nicht mehr während  $B$  über  $B_S$  hinaus relativ schwach weiter linear ansteigt mit dem Anstieg  $\mu_0 \cdot B_R$ .  $B_S$  und  $H_C$  sind materialspezifische magnetische Kenngrößen und die von der Hysteresekurve eingeschlossene Fläche ist ein Maß für die zur Ummagnetisierung erforderliche Arbeit pro Volumeneinheit bei einem Magnetisierungszyklus.

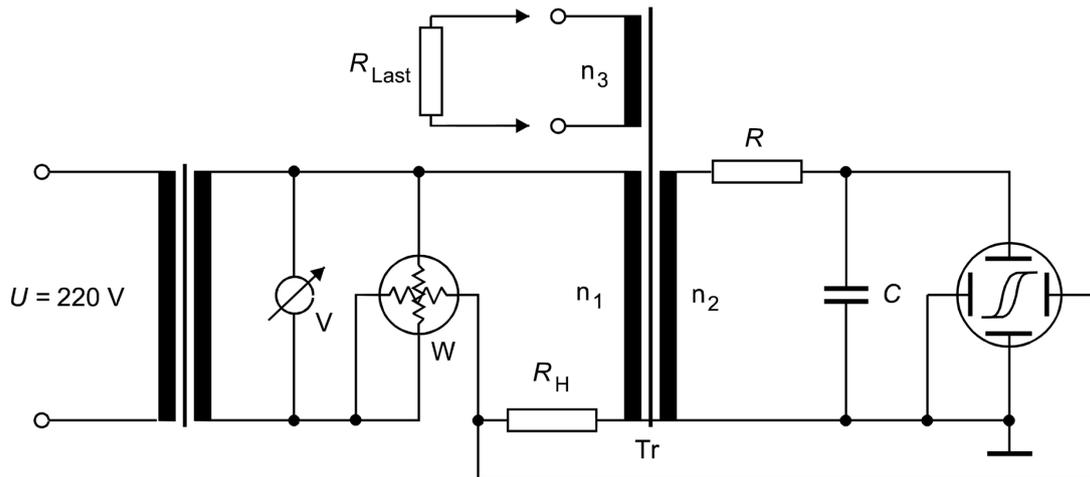


Abbildung 7.3: Ferrograf

Hysteresekurven lassen sich mit einem Ferrografen, dessen Schaltbild Abb. 7.3 zeigt, darstellen. Fließt durch die Spule mit der Windungszahl  $n_1$  des Transformators Tr, dessen Spulenkern (Länge  $l$ ) aus dem Probenmaterial besteht, ein Wechselstrom  $I_1(t)$ , so entsteht ein  $\vec{H}$ -Wechselfeld der Stärke

$$H(t) = \frac{n_1}{l} I_1(t). \quad (7.4)$$

Am Widerstand  $R_H$  liegt dann die Spannung

$$U_R(t) = R_H I_1(t) = \frac{R_H H(t) l}{n_1}, \quad (7.5)$$

die der magnetischen Erregung proportional ist. In der Sekundärspule des Transformators (Windungszahl  $n_2$ , Querschnitt  $A$ ) wird die Spannung

$$U_{\text{ind}}(t) = -n_2 A \frac{dB(t)}{dt} \quad (7.6)$$

induziert, aus der sich die magnetische Feldstärke

$$B(t) = -\frac{1}{n_2 A} \int U_{\text{ind}}(t) dt \quad (7.7)$$

ergibt. Um ein zur magnetischen Feldstärke proportionales Signal zu erhalten, muss nach Gl. (7.7) die induzierte Spannung integriert werden, wofür eine entsprechende elektronische Schaltung (Integrator) verwendet wird: Ein RC-Glied (Abb. 7.3) wird so dimensioniert, dass der Widerstand  $R$

groß gegen den kapazitiven Widerstand  $1/\omega C$  und den induktiven Widerstand  $\omega L$  der Sekundärspule ist. Dann ist die am Kondensator abfallende Spannung gegeben durch

$$U_C = \frac{1}{C} \int I_2(t) dt \quad (7.8)$$

mit

$$I_2(t) \approx \frac{U_{\text{ind}}}{R}. \quad (7.9)$$

Aus Gl. (7.8) ergibt sich unter Verwendung von Gl. (7.7) und (7.9)

$$U_C(t) = -\frac{n_2 A}{RC} B(t). \quad (7.10)$$

Werden die Spannungen  $U_R$  und  $U_C$  an den  $X$ - bzw. den  $Y$ -Anschluss eines Oszillografen gelegt, entsteht auf dem Schirm eine Hysteresekurve gemäß Abb. 7.2. Aus dem Flächeninhalt dieser Hysteresekurve

$$A_H = \oint U_R dU_C \quad (7.11)$$

kann am unbelasteten Transformator die Arbeit

$$W = V \oint H dB \quad \text{mit } V = l \cdot A = \text{Volumen des Transformator-kerns} \quad (7.12)$$

berechnet werden, welche für Ummagnetisierung und Kompensierung der Wirbelstromverluste im Eisenkern während eines Zyklus aufgewendet werden muss. Beide Anteile werden in der Literatur oft als sog. Eisenverluste des Transformators zusammengefasst. Mit den Gl. (7.5) und (7.10) erhält man

$$A_H = -\frac{R_H / A n_2}{RC n_1} \oint H dB \quad (7.13)$$

und durch Einsetzen von Gl. (7.13) in Gl. (7.12)

$$W = -\frac{RC n_1}{R_H n_2} A_H. \quad (7.14)$$

Belastet man den Transformator durch den Anschluss eines ohmschen Widerstandes an die Wicklung  $n_3$ , so liefert Gl.(7.14) die Gesamtarbeit  $W$  während eines vollständigen Zyklus. Sie setzt sich zusammen aus der Arbeit am Verbraucher im Sekundärkreis sowie den Verlusten des realen Transformators: Eisenverluste, Streufeld, ohmscher Verlust an der Sekundärspule (siehe auch Versuch E3 Transformator).

## Aufgaben

1. Bestimmung der Sättigungsfeldstärke  $B_S$ , der Remanenz  $B_R$  und der Koerzitivfeldstärke  $H_C$  eines Transformator-kerns aus der Hysteresekurve bei einer Frequenz von 50 Hz und 150 V. Die Werte werden in die ausgedruckte grafische Darstellung der Kurve eingetragen.

- Bestimmung der Arbeit  $W$  während eines vollständigen Zyklus (Gl.(7.14)) aus den Flächen der Hysteresekurven ohne Belastung und für 7 verschiedene Belastungen des Transformator-kerns bei einer Aussteuerung von 110 V. In einer gemeinsamen grafischen Darstellung sind als Funktion des Laststromes an der Wicklung  $n_3$  aufzutragen
  - Leistung  $P_{\text{Fläche}}$ , bestimmt aus Flächen der Hysteresekurven
  - Leistung  $P_{\text{Wattm}}$ , abgelesen am Wattmeter im Primärkreis
  - Leistung  $P_{\text{Sek}}$  am ohmschen Widerstand im Sekundärkreis (Wicklung  $n_3$ )
  - ohmsche Leistung im Primärkreis (an Wicklung  $n_1$  und Widerstand  $R_H$ )
  - Wirkungsgrad des Transformators  $\eta = P_{\text{Sek}}/P_{\text{Wattm}}$ .
- Zu jeder aufgenommenen Hysteresekurve können die zugehörigen Zeitabhängigkeiten  $H(t)$  und  $B(t)$  in einer gemeinsamen Darstellung ausgedrückt werden. Drucken Sie diese Darstellungen für  $U_{\text{Prim}} = 150 \text{ V}$  für die Fälle keine und maximale Belastung des Trafokerns aus und diskutieren Sie den Verlauf der Kurven.
- Bestimmen Sie aus der Parameterdarstellung  $B(t)$ ,  $H(t)$  der Hysteresekurve (Aufg. 3) für den unbelasteten Fall die Größen  $B_S$ ,  $B_R$  und  $H_C$  und vergleichen Sie diese Werte mit den Ergebnissen aus Aufg. 1.

## Versuchsdurchführung

Die Versuchsschaltung mit allen Buchsen für die anzuschließenden Messgeräte zeigt Abb. 7.4. Das Wattmeter wird an die Buchsen V1, V2 und A1 und das Multimeter für die Messung der Sekundärspannung  $U_{\text{Sek}}$  an der Lastspule mit der Windungszahl  $n_3$  an die Buchsen U1 und U2 angeschlossen. Das Voltmeter V zur Messung der Primärspannung kann erst oberhalb von 50 V abgelesen werden. Deshalb wird zur Messung bis 50 V das Multimeter parallel zum Spannungseingang des Wattmeters auf die Buchsen V1 und V2 geschaltet.

**Achtung: Für alle äußeren Anschlüsse dürfen nur die am Versuchsplatz vorhandenen Schnüre mit Sicherheitssteckern verwendet werden, da Spannungen von bis zu 420 V auftreten können. Deshalb dürfen keinesfalls Bananenstecker ohne Berührungsschutz zum Einsatz kommen.**

Das am Versuchsplatz befindliche Zweikanal-Oszilloskop kann umschaltbar als Analog- oder als Digitaloszilloskop mit Speicherfunktion betrieben werden. Die Aufgaben 1 und 2 müssen im Digitalbetrieb ausgeführt werden. Das  $x$ -Signal wird über den Eingang von Kanal II und das  $y$ -Signal über den Eingang von Kanal I zugeführt. Eine Kurzbeschreibung der Bedienelemente des Oszilloskops und ihrer Funktion befindet sich am Versuchsplatz. In der Betriebsart als Digitaloszilloskop können die gespeicherten Daten über ein angeschlossenes Interface von einem zum Versuchsplatz gehörenden PC aufgenommen und weiterverarbeitet werden. Das PC-Programm `hyst.exe` liefert die aufgenommene Hysteresekurve, ihren Flächeninhalt in  $V^2$ , die zugehörigen Kurven  $H(t)$  und  $B(t)$  über eine Periode und den Effektivwert des Primärstromes  $I_{\text{Prim}}$ .

Zur Arbeit mit dem Oszilloskop unter Einbeziehung des PC und zur Ausgabe der Kurven auf dem angeschlossenen Drucker sind folgende Schritte erforderlich:

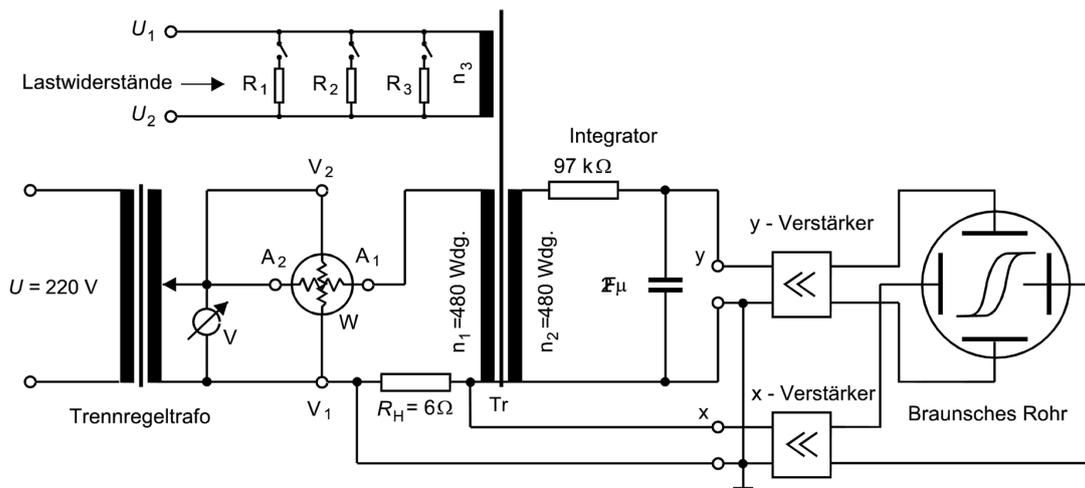


Abbildung 7.4: Versuchsschaltung

1. Für alle Messungen wird die  $x$ - $y$ -Betriebsart (Taste  $x$ - $y$  gedrückt) und für beide Kanäle die *direkte Eingangssignalankopplung* (Tasten AC/DC gedrückt!) gewählt. Alle anderen Tasten sollen zu Beginn sicherheitshalber nicht gedrückt sein (genau hinsehen, Tasten und Hub sind recht klein). Der Zeitbasisdreheschalter TIME/DIV. wird auf 2 ms eingestellt (Feineinstellung auf Rechtsanschlag, d.h. Pfeil nach rechts zeigend).
2. Umschaltung auf Digitalbetrieb durch Drücken der Taste STOR.
3. Bei anliegendem  $x$ - und  $y$ -Eingangssignal werden die geeigneten Messbereiche mit den Drehschaltern VOLTS/DIV. eingestellt. Die Kalibrierung stimmt nur bei Rechtsanschlag der Feineinstellungen (Pfeile nach rechts zeigend).
4. Nullpunktjustierung, d.h. symmetrische Positionierung der Kurven zum Achsenkreuz mit den Drehknöpfen Y-POS.1 für Kanal I ( $y$ -Eingang) und Y-POS.2 für Kanal II ( $x$ -Eingang).
5. Papier in den Drucker einlegen und anschließend zuerst den Drucker und danach den PC einschalten. Geben Sie am DOS-Prompt den Befehl `hyst` ein und quittieren Sie mit ENTER. Folgen Sie den Hinweisen auf dem Bildschirm.
6. Wählen Sie am Ende des Programms zwischen den 3 Ausgabeoptionen:
  - Hysteresekurve mit Flächenangabe  $A_H$  in  $V^2$
  - Darstellungen  $H(t)$  und  $B(t)$  über eine Periode
  - Effektivwert des Primärstromes.

Die Kurven können durch Betätigen der DRUCK-Taste ausgedruckt werden. Das Programm kann an jeder Stelle durch Drücken der F9-Taste abgebrochen werden.

Für Aufgabe 1 wird zunächst die vollständige Hysteresekurve zur Bestimmung der Sättigungsinduktion ausgedruckt. Die Remanenz und insbesondere die Koerzitivfeldstärke hingegen lassen sich aus dieser Darstellung nur sehr ungenau bestimmen. Deshalb wird durch Wahl geeigneter Messbereiche am Oszilloskop nur der Ausschnitt der Hysteresekurve (entsprechend vergrößert)

dargestellt, welcher für die Bestimmung dieser Größen relevant ist. Es werden also zwei Darstellungen ausgedrückt: die ganze Kurve und der vergrößerte Ausschnitt. Die Auswertung des vergrößerten Ausschnittes erfordert eine präzise Nullpunktjustierung mit den Drehknöpfen Y-POS.1 und Y-POS.2. Die Justierung kann durch Drücken der GD-Tasten erleichtert werden.

Für Aufgabe 2 werden an die Transformatorwicklung  $n_3$  verschiedene Lastwiderstände  $R_{\text{Sek}}$  angeschlossen. In Abhängigkeit von den Kippschalterstellungen sind 7 Kombinationen einstellbar. Zu messen sind

- Leistung mit dem Wattmeter im Primärkreis
- Spannung  $U_{\text{Sek}}$  an der Wicklung  $n_3$ .

Zu notieren sind die PC-Rechenergebnisse für

- Kurvenfläche  $A_H$
- Effektivstrom  $I_{\text{Prim}}$  im Primärkreis.

Die Flächen  $A_H$  der Hysteresekurven können auch mit einem Planimeter am Versuchsplatz bestimmt werden. Messen Sie zwei Kurven mit dem Planimeter aus und vergleichen Sie die Werte mit den PC-Ergebnissen.

Aus den  $H(t)$ -Kurven (Aufgabe 3) erkennt man u.a., dass der Primärstrom besonders bei geringer Belastung deutliche Abweichungen von einem sinusförmigen Verlauf aufweist. Deshalb kann der Effektivwert dieses Stromes nicht mit einem gewöhnlichen Drehspulamperemeter oder dem am Versuchsplatz vorhandenen Digitalmultimeter gemessen werden, obwohl diese für die Effektivwertmessung (für sinusförmige Signale!) geeicht sind. Sie können das leicht überprüfen, indem Sie das Multimeter (bei Wechselstrommessung **blaue Taste** drücken!) mit dem Strompfad des Wattmeters in Reihe schalten und das Ergebnis mit dem PC-Wert vergleichen. Die Abweichungen sinken mit steigender Belastung. Warum?

Folgende Angaben sind für die Berechnungen erforderlich:

- Lastwiderstände/k $\Omega$ :

Platz	$R_1$	$R_2$	$R_3$
1	4.66	10.02	17.81
2	4.60	9.99	17.66
3	4.64	10.00	18.08
4	4.66	10.02	17.86

- Ohmscher Widerstand der Primärspule:  $R_{\text{Prim}} = 12 \Omega$
- Trafokern: Fläche  $A = 8 \text{ cm}^2$ , Länge  $l = 20 \text{ cm}$

Die übrigen benötigten Zahlenangaben befinden sich in Abb. 7.4.

## Fragen

1. Welchen Magnetisierungszustand nimmt eine magnetische Probe an, wenn das magnetische Wechselfeld allmählich heruntergeregelt wird?

2. Man zeige, dass

$$\oint H \, dB = \frac{W}{V}$$

ist. (Man benutze dazu die Gleichungen (7.4) und (7.6)).

3. Welche Form muss die Hysteresekurve haben

- (a) bei Trafoblechen,
- (b) bei Stahl für Dauermagnete?

4. Welchen Verlauf hat die Kurve  $B(H)$  in Abb. 7.2 für große Feldstärken  $H$ ?

5. Was muss bei der Strommessung beachtet werden, wenn das Signal nicht sinusförmig ist?

---

---

# E12 Elektronen in Feldern

---

---

## Physikalische Grundlagen

Grundbegriffe
Oszillograf
spezifische Ladung
elektrisches und magnetisches Feld
Lorentzkraft
Coulombkraft

Die spezifische Ladung  $e/m$  geladener Teilchen mit der Masse  $m$  und der Ladung  $e$  kann aus der Untersuchung ihrer Ablenkung beim Durchlaufen elektrischer und magnetischer Felder  $\vec{E}$  bzw.  $\vec{B}$  bestimmt werden. Bei diesem Versuch wird die Ablenkung von Elektronen in einer Oszillografenröhre untersucht. Die elektrischen Felder werden durch die üblicherweise eingebauten X- bzw. Y-Plattenpaare und die magnetischen Felder durch zusätzliche Spulen außerhalb der Röhre

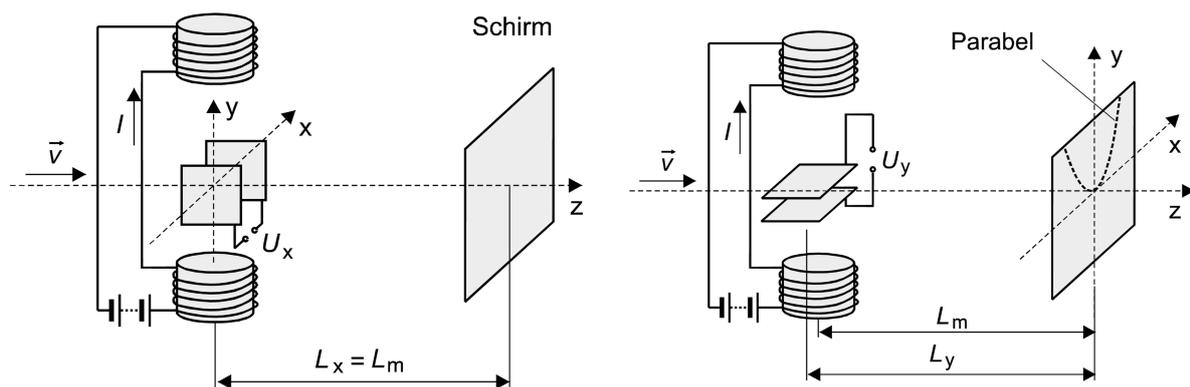


Abbildung 8.1: Wien-Filter (links) und Thomsonsche Parabelmethode (rechts)

erzeugt (Abb. 8.3). Untersucht wird die Ablenkung von Elektronen, welche mit der Geschwindigkeit  $\vec{v} = \{0, 0, v\}$  entweder senkrecht in  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Felder eintreten, welche zueinander senkrecht (Wien-Filter, Abb. 8.1 links) oder parallel (Thomsonsche Parabelmethode, Abb. 8.1 rechts) gerichtet sind oder welche beim Durchlaufen eines in  $z$ -Richtung verlaufenden  $\vec{B}$ -Feldes eine dazu senkrechte Geschwindigkeitskomponente besitzen (Methode nach Busch).

### 1. Ablenkung durch ein elektrisches oder magnetisches Querfeld

Vor der Untersuchung der Ablenkung in den kombinierten Feldern soll die Ablenkung in elektrischen und magnetischen Querfeldern getrennt betrachtet werden. Dabei werden die Felder zunächst vereinfachend als homogen angenommen. Die realen (d.h. apparativ bedingten) Inhomogenitäten werden anschließend durch die Einführung experimentell bestimmbarer Effektivgrößen berücksichtigt.

**Ablenkung durch ein elektrisches Querfeld.** Ein Elektron tritt nach Durchlaufen der Beschleunigungsspannung  $U_b$  mit der Geschwindigkeit  $v = (2eU_b/m)^{1/2}$  senkrecht zu den Feldlinien in das homogene elektrische Feld eines Plattenkondensators (Plattenabstand  $d$ , Platten­spannung  $U$ , Feldlänge in Flugrichtung  $l$ ) ein. Im durch  $U$  hervorgerufenen elektrischen Feld  $E = U/d$  erfährt das Elektron die konstante Beschleunigung  $a = eE/m$  längs der Feldlinien und in deren Folge am Feldende die Ablenkung  $s = Ul^2/4dU_b$ . Hieraus ergibt sich für die Ablenkung auf dem Leuchtschirm in  $x$ - und  $y$ -Richtung

$$x = \frac{U_x l_x L_x}{2d_x U_b}, \quad (8.1)$$

$$y = \frac{U_y l_y L_y}{2d_y U_b} \quad (8.2)$$

Dabei sind  $U_x, U_y$  die Ablenkspannungen,  $l_x, l_y$  die Feldlängen und  $L_x, L_y$  die Abstände zwischen den Feldmitten und dem Schirm. Aus der Messung der so genannten Ablenkempfindlichkeiten  $x/U_x$  und  $y/U_y$  können experimentell die effektiven Feldlängen  $l_x$  und  $l_y$  bestimmt werden, welche die Inhomogenität der Felder berücksichtigen und in die folgenden Formeln einzusetzen sind.

**Ablenkung durch ein magnetisches Querfeld.** Tritt ein Elektron nach Durchlaufen einer Beschleunigungsspannung  $U_b$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v} = \{0, 0, v\}$  in ein homogenes magnetisches Feld  $\vec{B} = \{0, B, 0\}$ , so wird es durch die Lorentzkraft  $\vec{F} = e(\vec{v} \times \vec{B})$  auf eine Kreisbahn mit der Radialbeschleunigung  $a = evB/m$  abgelenkt. Für kleine Ablenkungen gilt für die transversale Ablenkung in  $x$ -Richtung am Ende des Magnetfeldes der Länge  $l_m$  die Näherung  $s = (e/2U_b m)^{1/2} \cdot Bl_m^2/2$  und für die Auslenkung auf dem Leuchtschirm

$$x = \sqrt{\frac{e}{2U_b m}} L_m B l_m$$

mit  $L_m$  als Abstand der Feldmitte vom Leuchtschirm. Mit der Ersetzung  $B \cdot l_m = K \cdot I$  (mit der Apparatekonstanten  $K = 1/I \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} B(z) dz$  wird die Inhomogenität des  $\vec{B}$ -Feldes berücksichtigt) erhält man für die Auslenkung auf dem Schirm

$$x = \sqrt{\frac{e}{2U_b m}} L_m K I \quad (8.3)$$

mit  $I$  als Strom durch die Spule. Die Apparatekonstante  $K$  wird für jeden Versuchsplatz angegeben.

2. Ablenkung durch ein elektrisches *und* magnetisches Querfeld

**Felder senkrecht zueinander (Wien-Filter).** Tritt ein Elektron mit der Geschwindigkeit  $\vec{v} = \{0, 0, v\}$  in die gleichzeitig wirkenden Felder  $\vec{E} = \{E, 0, 0\}$  und  $\vec{B} = \{0, B, 0\}$  ein, so bewirken beide Felder eine entgegengesetzte Ablenkung in  $x$ -Richtung (Gl.(8.1) und Gl.(8.3)). Durch geeignete Wahl des Spulenstromes  $I$  kann bei gegebenem  $U_x$  die Auslenkung des Leuchtfleckes auf dem Schirm kompensiert werden:

$$\frac{U_x l_x L_x}{2d_x U_b} = \sqrt{\frac{e}{2U_b m}} L_m K I \quad \Rightarrow \quad U_x = \sqrt{\frac{2eU_b}{m}} \frac{d_x}{l_x} K I. \quad (8.4)$$

Die grafische Darstellung von  $U_x = f(I)$  liefert bei konstantem  $U_b$  eine Gerade, aus deren Anstieg die spezifische Ladung  $e/m$  bestimmt werden kann.

**Felder parallel zueinander (Thomsonsche Parabelmethode).** Tritt ein Elektron mit der Geschwindigkeit  $\vec{v} = \{0, 0, v\}$  in die gleichzeitig wirkenden Felder  $\vec{E} = \{0, E, 0\}$  und  $\vec{B} = \{0, B, 0\}$ , so bewirken die Felder eine Ablenkung sowohl in  $x$ -Richtung (Gl.(8.3)) als auch in  $y$ -Richtung (Gl.(8.2)). Folglich durchläuft der Leuchtfleck auf dem Schirm bei Variieren der Beschleunigungsspannung  $U_b$  Teile der Parabel

$$y = \frac{U_y l_y L_y}{d_y L_m^2} \cdot \frac{m}{e} \cdot \frac{1}{K^2 \cdot I^2} \cdot x^2. \quad (8.5)$$

Die grafische Darstellung  $y = f(x^2)$  liefert (für  $U_y, I = \text{konst.}$ ) eine Gerade, aus deren Anstieg  $e/m$  berechnet werden kann.

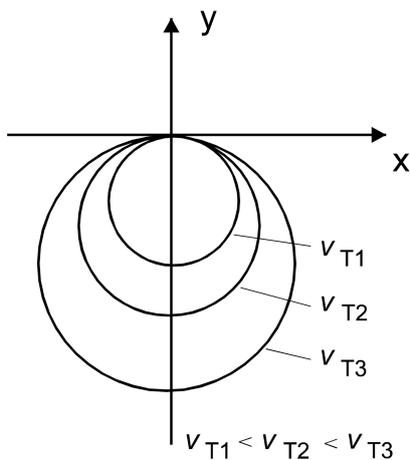


Abbildung 8.2: Kreisbahnen im Magnetischen Längsfeld (Projektion auf  $x$ - $y$ -Ebene)

**Bewegung im magnetischen Längsfeld (Methode nach Busch)** Solange sich Elektronen mit der Geschwindigkeit  $\vec{v} = \{0, 0, v\}$  parallel zu einem magnetischen Längsfeld bewegen, wirkt keine magnetische Kraft. Erhalten sie aber eine Geschwindigkeitskomponente  $v_T$  transversal zum magnetischen Längsfeld, so wirkt auf sie die Lorentzkraft senkrecht zur momentanen Flugrichtung und sie werden abgelenkt. Bewirkt man die Auslenkung durch ein (in  $z$ -Richtung kurzes) elektrisches Wechselfeld, dass z.B. durch Anlegen einer Wechselfeldspannung an das  $x$ -Plattenpaar erzeugt wird, so bewegen sich die Elektronen auf unterschiedlichen Schraubenbahnen bis zum Schirm, weil der Translationsbewegung infolge der Wirkung der Lorentzkraft eine Kreisbewegung überlagert wird (Abb. 8.2). Da die Umlaufzeit auf der Kreisbahn  $T = 2\pi/\omega = 2\pi m/eB$  (im Unterschied zum Radius!) unabhängig von der Größe der Transversalkomponente  $v_T$  der Geschwindigkeit ist, treffen sich (bei kleinen Auslenkungen, denn nur dann kann die Geschwindigkeit  $v$  in  $z$ -Richtung näherungsweise als unverändert angenommen werden) alle

Bahnen in periodisch wiederkehrenden Schnittpunkten im Abstand der sog. Fokussierungslänge

$$L_f = v \cdot T = \frac{\pi}{B} \cdot \sqrt{\frac{8U_b m}{e}}. \quad (8.6)$$

Erzeugt man das Längsfeld mit einer langen Spule (Windungszahl  $N$ , Länge  $l$ , Strom  $I$ ) und wählt die Beschleunigungsspannung  $U_b$  so, dass der durch das  $x$ -Wechselfeld aufgeweitete Elektronenstrahl auf dem Leuchtschirm fokussiert erscheint, dann ist  $L_f$  gerade gleich  $L_x$  und es folgt mit  $B = \mu_0 NI/l$  für eine lange gerade Spule die Beziehung

$$U_b = \frac{\mu_0^2}{8\pi^2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{L_x^2 N^2}{l^2} I^2. \quad (8.7)$$

Die grafische Darstellung  $U_b = f(I^2)$  liefert eine Gerade, aus deren Anstieg  $e/m$  berechnet werden kann.

## Aufgaben

1. Bestimmung der effektiven Feldlängen  $l_x$  und  $l_y$  der Plattenkondensatoren.
2. Bestimmung der spezifischen Ladung des Elektrons  $e/m$  mit dem Wien-Filter für Beschleunigungsspannungen  $U_b = 1.2 \text{ kV}, 1.6 \text{ kV}$  und  $2 \text{ kV}$  durch Geradenausgleich des gemessenen Zusammenhanges  $U_x = f(I)$  (Gl. (8.4)).
3. Bestimmung von  $e/m$  nach der Thomsonschen Parabelmethode durch Geradenausgleich der aus 3 gemessenen Parabeln entnommenen Zusammenhänge  $y = f(x^2)$  (Gl. (8.5)).
4. Bestimmung von  $e/m$  mit der Methode nach Busch durch Geradenausgleich des gemessenen Zusammenhanges  $U_b = f(I^2)$  (Gl. (8.7)) für Werte der Beschleunigungsspannungen von  $U_b = (1-2) \text{ kV}$  in Schritten von  $0.1 \text{ kV}$ .
5. Bildung des gewichteten Mittels für die nach den Aufgaben 2-4 bestimmte spezifische Ladung  $e/m$ .

## Versuchsdurchführung

Die Versuchsanordnung (Abb. 8.3) besteht aus einer Oszillografenröhre mit hintereinander angeordneten Plattenkondensatoren zur elektrischen  $x$ - und  $y$ -Ablenkung, welche sich verschiebbar in einer langen Spule  $S_L$  zur Erzeugung des magnetischen Längsfeldes befindet. Zur Erzeugung des magnetischen Querfeldes dient das Spulenpaar  $S_Q$ , welches in Höhe der  $x$ -Ablenkplatten fest angeordnet ist. Die Gesamtanordnung ist durch einen weichmagnetischen Blechzylinder aus einer Nickel-Eisen-Legierung gegen das magnetische Feld der Erde abgeschirmt. Tabelle 8.1 zeigt die technische Daten die für die Auswertung benötigt werden.

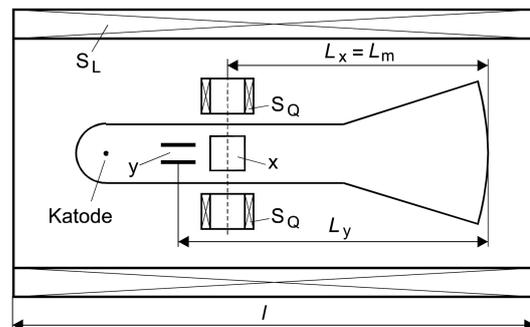


Abbildung 8.3: Versuchsanordnung

mittlerer Plattenabstand	$d_x = (3.9 \pm 0.1) \text{ mm}$
	$d_y = (3.5 \pm 0.1) \text{ mm}$
Abstand Feldmitte $x$ -Platten bis zum Schirm	$L_x = (216 \pm 1) \text{ mm}$
Abstand Feldmitte $y$ -Platten bis zum Schirm	$L_y = (253 \pm 1) \text{ mm}$
Abstand Mitte magnetisches Querfeld bis zum Schirm	$L_m = (216 \pm 1) \text{ mm}$
Länge der langen Spule	$l = (743 \pm 1) \text{ mm}$

Tabelle 8.1: Technische Daten zum Versuch

Die Apparatekonstante  $K$  des magnetischen Querfeldes und die Windungszahl  $N$  der langen Spule werden am Versuchsplatz angegeben. Für die digitalen elektrischen Messgeräte wird ein systematischer Fehler von  $\pm(1\% + 1)$  angenommen. Alle Versuche sollen mit möglichst geringer Strahlheligkeit ausgeführt werden, um die Leuchtschicht der Oszillografenröhre zu schonen.

Zur Bestimmung der effektiven Feldlängen  $l_x$  und  $l_y$  (Aufgabe 1) werden die Ablenkempfindlichkeiten  $x/U_x$  und  $y/U_y$  für  $U_b = 1.8 \text{ kV}$  und für  $U_x$  und  $U_y$  im Bereich von 0 bis etwa 100 V in Schritten von 10 V gemessen. Werden die experimentellen Ablenkempfindlichkeiten in Gl.(8.1) bzw. Gl.(8.2) eingesetzt, so können aus den Anstiegen der Geraden  $x = f(U_x)$  bzw.  $y = f(U_y)$  zunächst die Verhältnisse  $l_x/d_x$  bzw.  $l_y/d_y$  (zur späteren Verwendung bei der Auswertung der Gleichungen (8.4) und (8.5)) und daraus die effektiven Feldlängen gewonnen werden.

Für Aufgabe 2 wird die Position des unabgelenkten Leuchtflecks mit einem Filzstift auf dem Bildschirm markiert.

Für Aufgabe 3 sollen die zu den Parabeln gehörenden Wertepaare  $I, U_y$  so gewählt werden, dass die sich beim Durchlaufen der Beschleunigungsspannung ergebenden Parabeläste weder zu steil noch zu flach verlaufen. Als ungefähre Orientierung diene z. B. das Wertepaar  $I = 90 \text{ mA}$ ,  $U_y = 18 \text{ V}$ . Zum Abzeichnen der Parabeläste wird ein Stück Klarsichtfolie mit schmalen Klebstreifen auf den Bildschirm geheftet.

Für Aufgabe 4 müssen die Ablenkspannungen  $U_x$  und  $U_y$  auf 0 V gestellt werden. Anschließend wird die Röhre so in der langen Spule positioniert, dass der Abstand  $D$  des Bildschirmes vom vorderen Spulenrand etwa  $D = 1/2(l - L_x)$  beträgt und die elektronenoptische Achse der Röhre parallel zum magnetischen Längsfeld verläuft. Bei richtiger Positionierung darf sich der Leuchtfleck bei Änderung des Spulenstromes nicht mehr verschieben. Für den Messvorgang wird durch Betätigen des „Kipp“-Schalters am Bedienteil eine positive Sägezahnspannung an die  $x$ -Platten der Röhre gelegt und der Spulenstrom solange vergrößert, bis der durch das  $x$ -Wechselfeld aufgefächerte Elektronenstrahl auf dem Leuchtschirm fokussiert erscheint.

## Fragen

1. Erläutern Sie Aufbau und Wirkungsweise einer Oszillografenröhre.
2. Welche Kräfte wirken auf geladene Teilchen in elektrischen und magnetischen Feldern?

3. Wann läuft ein Elektron in einem homogenen Magnetfeld auf einer Kreisbahn und wie groß sind Bahnradius und Umlaufzeit?
4. Warum verlaufen die Kreisbahnen in Abb. 8.2 nicht konzentrisch zum Nullpunkt der  $x$ - $y$ -Ebene?
5. Warum unterscheidet man zwischen effektiven Feldlängen und Länge Kondensatorplatten?
6. Warum muss in Gl.(8.3), Gl.(8.4) und Gl.(8.5)  $I_m \cdot B$  durch  $K \cdot I$  ersetzt werden? Wie könnte  $K$  experimentell bestimmt werden?
7. Welche Bedeutung hat in Aufgabe 4 die Positionierung der Röhre in der langen Spule?

---

---

# O1 Dünne Linsen

---

---

## Physikalische Grundlagen

### Grundbegriffe

Brechungsgesetz  
Abbildungsgleichung  
Brechung an gekrümmten Flächen  
Sammel- und Zerstreuungslinsen  
Besselmethode

Linsen sind durchsichtige Körper, die von zwei im Allgemeinen sphärischen Flächen begrenzt sind. Die Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte bildet die sog. optische Achse. Die Linsenwirkung beruht auf der Brechung der einfallenden Lichtstrahlen an den Grenzflächen zwischen dem Linsenmaterial und dem umgebenden Medium. Sieht man von Linsenfehlern und Beugungserscheinungen an den Linsenfassungen (s. Versuch O8) ab, so führt eine Linse alle von einem Gegenstandspunkt  $G$  ausgehenden Lichtstrahlen in einem Bildpunkt  $B$  zusammen (Abb. 9.1). Schneiden sich die Strahlen wirklich, so spricht man von einem reellen Bild bzw. von einer reellen Abbildung. Schneiden sich hingegen nur die rückwärtigen Verlängerungen der Strahlen, so nennt man die Abbildung virtuell.

### 1. Brennweite dünner Linsen

Von dünnen Linsen spricht man, wenn ihre Dicke klein gegenüber den Krümmungsradien der Kugelflächen ist. In diesem Fall kann anstelle der zweimaligen Brechung an den Oberflächen eine einmalige Brechung an einer Fläche - im weiteren „Mittlebene“ genannt - angenommen werden, welche senkrecht zur optischen Achse durch die Linse gelegt wird (Abb. 9.1). Bei dünnen Linsen können die Gegenstandsweite  $g$ , die Bildweite  $b$  und die Brennweiten  $f$  und  $f'$  von der Mittlebene aus gemessen werden (Abb. 9.1). Die Brennpunkte  $F$  bzw.  $F'$  liegen an der Stelle, an der parallel zur optischen Achse einfallendes Licht von einer *Sammellinse* vereinigt wird. *Zerstreuungslinsen* hingegen brechen

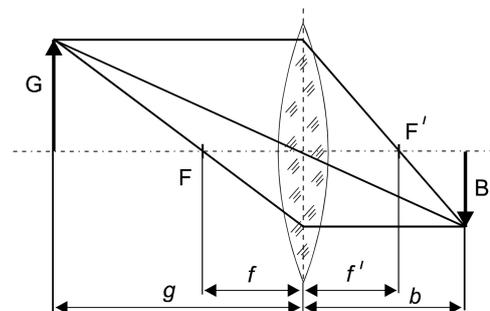


Abbildung 9.1: Sammellinse

dieses Licht so, als käme es von  $F$  bzw.  $F'$  (Abb. 9.2c)). Die Brennweiten  $f$  und  $f'$  sind gleich, wenn sich auf beiden Seiten der Linse das gleiche optische Medium befindet. Die Brennweite  $f$  lässt sich aus den Krümmungsradien  $R_1$  und  $R_2$  und der Brechzahl  $n$  des Linsenglases berechnen. Die Krümmungsradien  $R_i$  werden für konvexe Flächen positiv, für konkave negativ gewertet. Für dünne Linsen gilt näherungsweise

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (9.1)$$

Die Größe  $D = 1/f$  wird als Brechkraft oder Stärke der Linse bezeichnet. Ihre Einheit ist 1 Dioptrie =  $\frac{1}{\text{m}}$ . Zerstreuungslinsen haben negative Brechkräfte.

## 2. Linsenkombinationen

Durch eine Anordnung von einzelnen dünnen Linsen mit gemeinsamer optischer Achse lassen sich Linsensysteme (s. Versuch O 10) aufbauen. Die Brennweite einer Kombination aus zwei dünnen Linsen im Abstand  $d$  mit den Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  beträgt

$$f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d}. \quad (9.2)$$

Ist der Abstand  $d$  klein gegen die Einzelbrennweiten, so kann man die Näherungsformel

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (9.3)$$

benutzen.

## 3. Bildkonstruktion

Man kann das von einer Linse erzeugte Bild eines Gegenstandes konstruieren, wenn man die Brennweite  $f$  und die Gegenstandsweite  $g$  kennt. Die Konstruktion wird einfach, wenn man wahlweise zwei der drei sog. Hauptstrahlen -Parallel-, Mittelpunkt- und Brennpunktstrahl- verwendet. In Abb. 9.2 werden Brennpunkt- und Parallelstrahl für zwei Abbildungen mit einer Sammellinse und eine mit einer

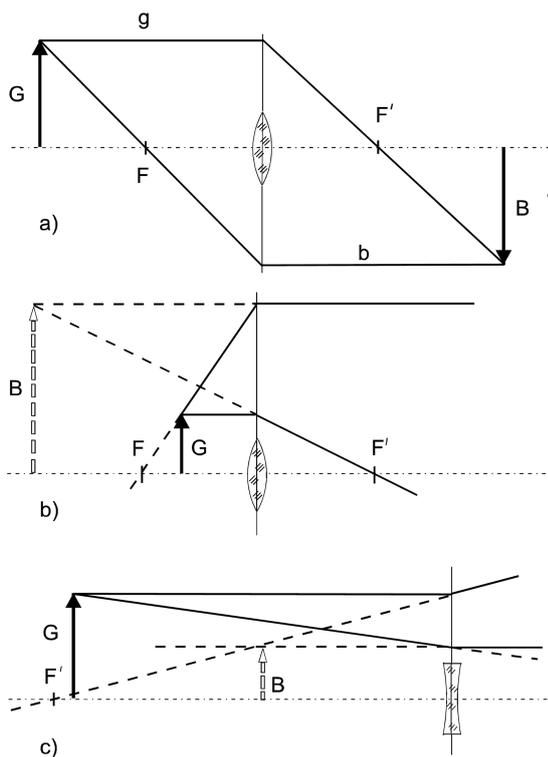


Abbildung 9.2: Bildkonstruktion

Zerstreuungslinse benutzt. Die Sammellinse erzeugt „auf dem Kopf stehende“ reelle Bilder, wenn sich  $G$  außerhalb von  $f$  befindet (Abb. 9.2a)) und aufrechtstehende virtuelle Bilder auf der Seite des Gegenstandes (d.h.  $b$  ist negativ), wenn  $G$  innerhalb von  $f$  liegt (Abb. 9.2b)). Zerstreuungslinsen erzeugen ausschließlich virtuelle Bilder auf der Seite des Gegenstandes (Abb. 9.2c)), hier ist  $b$  immer negativ.

#### 4. Abbildungsgleichung

Für dünne Linsen gilt mit den auf die Lage der Mittelebene bezogenen Größen Brennweite  $f$ , Gegenstandsweite  $g$ , und Bildweite  $b$  die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}. \quad (9.4)$$

Bei der Anwendung ist zu beachten, dass  $g$  stets ein positives Vorzeichen erhält,  $b$  positiv bei reeller und negativ bei virtueller Abbildung wird und  $f$  für Sammellinsen positiv und für Zerstreuungslinsen negativ gezählt wird. Gl. (9.4) einschließlich der Vorzeichenregeln ist durch eine einfache geometrische Überlegung anhand von Abb. 9.2 zu gewinnen.

#### 5. Methoden zur Brennweitenmessung

##### a) Benutzung der Abbildungsgleichung

Die Brennweite von Sammellinsen kann nach der Abbildungsgleichung (Gl. (9.4)) aus der Gegenstandsweite  $g$  und der Bildweite  $b$  bestimmt werden. Ein lichtaussendender Gegenstand  $G$ , die auszumessende Linse und ein Schirm  $S$  werden auf einer optischen Bank verschiebbar angeordnet. Bildet die Linse den Gegenstand scharf auf dem Schirm ab, können  $b$  und  $g$  gemessen werden. Da die Lage der Hauptebene bezüglich der Linsenhalterung nicht genau anzugeben ist, sind die so gemessenen Größen  $b$  und  $g$  mit systematischen Fehlern von der Größe der halben Linsendicke behaftet.

##### b) Methode von Bessel

Statt der direkten Messung von  $b$  und  $g$  wird der genauer bestimmbare Unterschied  $e$  (Abb. 9.3) zwischen zwei Linsenpositionen gemessen, die bei fester Entfernung  $l > 4f$  des Gegenstandes vom Schirm ein scharfes Bild des Gegenstandes ergeben. Mit  $l = b + g$  erhält man nämlich  $f = bg/l$  und die beiden Bildweiten

$$b_{1,2} = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - fl},$$

die für  $l > 4f$  reelle Werte annehmen. Die Differenz  $e$  der Bildweiten ist dann

$$e = b_1 - b_2 = 2\sqrt{\frac{l^2}{4} - fl}$$

und  $f$  ergibt sich aus

$$f = \frac{l^2 - e^2}{4l}. \quad (9.5)$$

Die Gegenstands- und die Bildweiten sind in den beiden Stellungen der Linse  $(l - e)/2$  bzw.  $(l + e)/2$ , woraus sich durch Einsetzen in Gl. (9.4) Gl. (9.5) ergibt.

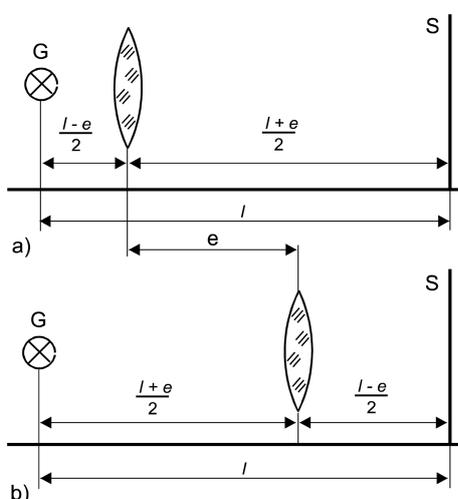


Abbildung 9.3: Besselmethode

### c) Sphärometer

Die Brennweite kann mit Gl. (9.1) berechnet werden, wenn die Brechzahl  $n$  und die Krümmungsradien  $R_1$  und  $R_2$  der Linsenoberflächen bekannt sind. Für die Messung des Krümmungsradius kann ein mechanisches Sphärometer (Abb. 9.4) benutzt werden. Dies besteht aus einem Ring vom Radius  $r$ , der auf die Linse aufgesetzt wird und in dessen Mitte sich eine höhenverstellbare Tastschraube befindet. Mit der Tastschraube wird die Pfeilhöhe  $h$  des Kugelsegmentes gemessen und der Krümmungsradius  $R$  nach

$$R_i = \frac{r^2}{2h_i} + \frac{h_i}{2} \quad (i = 1, 2) \quad (9.6)$$

berechnet. Die Pfeilhöhe findet man aus der Höhendifferenz zwischen den Skalenteilwerten, die sich bei der Berührung der Tastschraube mit der Unterlage für eine ebene Bezugsfläche (Planfläche benutzen!) und für die jeweilige Linsenfläche ergeben.

## Aufgaben

1. Bestimmung der Brennweiten der Sammellinsen nach der Abbildungsgleichung (Gl. (9.4)).
2. Bestimmung der Brennweiten der Sammellinsen nach der Methode von Bessel (Gl. (9.5)).
3. Bestimmung der Brennweiten aller Linsen mit dem Sphärometer (Gl. (9.1)).
4. Bestimmung der Brennweiten der möglichen Linsenkombinationen nach der Besselmethode.
5. Vergleich der Ergebnisse für die Kombinationen der Sammellinsen mit den nach Gl. (9.3) berechneten Werten und Berechnung der Brennweite der Zerstreuungslinse mit Gl. (9.3).
6. Vergleich der Genauigkeit der drei Methoden zur Bestimmung von  $f$ .

## Versuchsdurchführung

Für den Versuch stehen drei Sammellinsen und eine Zerstreuungslinse zur Verfügung. Eine Sammellinse hat eine spezielle Halterung, um die Linsen miteinander kombinieren zu können. Der Abstand der Linsen ist dabei so gering, dass der Abstand der Mittelebenen  $d$  (Gl. (9.2)) vernachlässigt werden kann.

Für Aufgabe 1 führe man die Messung für jede Sammellinse bei 6 unterschiedlichen Abständen Gegenstand und Schirm durch.

Für Aufgabe 2 führe man die Messung für jede Sammellinse bei 10 verschiedenen Abständen Gegenstand und Schirm durch.

Für Aufgabe 3 messe man die Pfeilhöhe jeweils 6 mal für jede gekrümmte Fläche. Besonders sorgfältig ist die Nullstellung des Sphärometers zu prüfen.

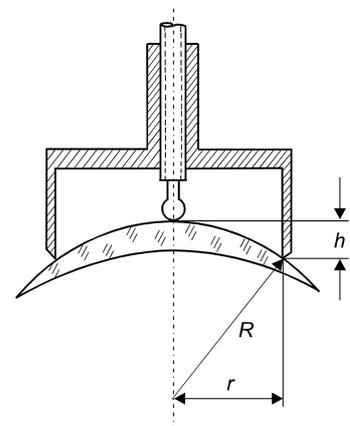


Abbildung 9.4: Sphärometer

Für Aufgabe 4 führe man die Messungen für die drei möglichen Linsenkombinationen bei 10 verschiedenen Abständen Gegenstand und Schirm durch.

Für Aufgabe 5 werden bei Verwendung von Gl. (9.3) die nach Aufgabe 2 ermittelten Brennweiten der Sammellinsen eingesetzt.

## Fragen

1. Wie würden in den Bildkonstruktionen der Abb. 9.2 die jeweiligen Mittelpunktstrahlen verlaufen?
2. Wie konstruiert man den Strahlengang eines beliebig auf eine Linse auftreffenden Lichtstrahls?
3. Was passiert, wenn man in den in Abb. 9.2 dargestellten Fällen eine Hälfte der Linse abdeckt?
4. Warum benutzt man beim Tauchen zweckmäßigerweise eine Taucherbrille?

### Physikalische Grundlagen

Grundbegriffe
Abbildung mit Linsen
Vergrößerung
Auflösungsvermögen
Abbesche Abbildungstheorie

Die Auflösung kleiner Strukturen durch das menschliche Auge ist durch die Lichtbeugung an den Rändern der Pupille (siehe hierzu „Auflösungsvermögen des menschlichen Auges“ z.B. im Gerthsen oder Bergmann-Schaefer Bd. III) und die Akkomodationsfähigkeit der Augenlinse begrenzt. Durch Benutzung optischer Hilfsmittel wie z.B. Lupe oder Mikroskop gelingt es Objekte sichtbar zu machen, die mit dem bloßen Auge im Detail nicht mehr erkannt werden können.

#### 1. Aufbau und Funktion eines Mikroskops

Das Mikroskop besteht im Wesentlichen aus zwei Linsen, Objektiv und Okular, die die Abbildung und Vergrößerung bewirken. Eine weitere Linse, der Kondensor, dient zur gleichmäßigen Ausleuchtung des Objektes. Zum prinzipiellen Verständnis des Strahlenganges im Mikroskop ist es ausreichend, Objektiv und Okular als dünne Sammellinsen anzunehmen (vgl. Versuch O1) und geometrisch-optisch das Bild zu konstruieren (Abb. 10.1). Der Gegenstand  $G$  befindet sich in der Gegenstandsweite  $g$  etwas außerhalb der Brennweite  $f_{Ob}$  des Objektivs  $Ob$ , deshalb entsteht auf der anderen Seite des Objektivs im Abstand  $b$  ein umgekehrtes, vergrößertes und reelles Zwischenbild  $B_1$ . In einem zweiten Schritt wird  $B_1$  mit dem als Lupe wirkenden Okular  $Ok$  betrachtet.

Legt man  $B_1$  in die Brennebene von  $Ok$ , so erscheint das vergrößerte virtuelle Bild  $B_2$  von  $B_1$  im Unendlichen. Das Auge kann sich in dem Fall mit entspannter Augenlinse auf unendliche Entfernungen einstellen. Dieser Fall wird im Folgenden behandelt. Es soll aber darauf hingewiesen werden, dass in der Literatur zuweilen auch der Fall behandelt wird, bei dem das Zwischenbild in Bezug auf das Okular in eine Gegenstandsweite  $g_{Ok} < f_{Ok}$  derart gelegt wird, dass das virtuelle Bild von  $B_1$  in der deutlichen Sehweite erscheint. In diesem Fall wird die Vergrößerung des Mikroskops unwesentlich größer, und die Augenlinse muss stärker gekrümmt werden, um die hier divergenten Lichtstrahlen hinter dem Okular auf die Netzhaut zu fokussieren. Hinsichtlich der praktischen Benutzung des Mikroskops sind die unterschiedlichen Betrachtungsweisen aber nicht wesentlich. Die Annahme je einer dünnen Linse für Objektiv und Okular ist für die Überlegungen zum Strah-

lengang ausreichend. In der Praxis müssen aber Linsenfehler korrigiert werden, weshalb Objektiv und Okular aus komplizierten Linsensystemen bestehen.

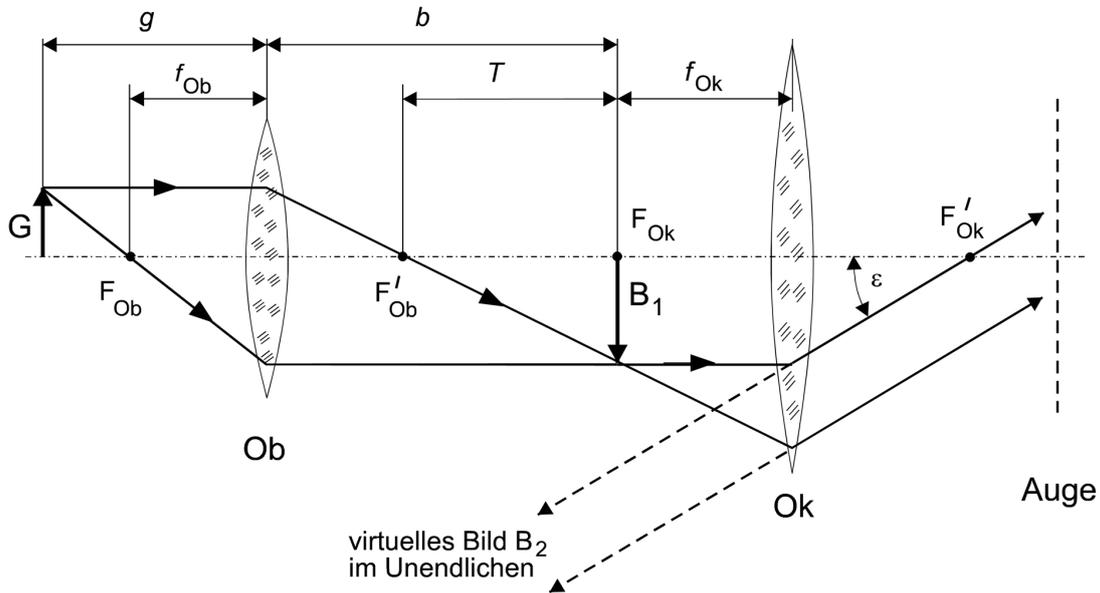
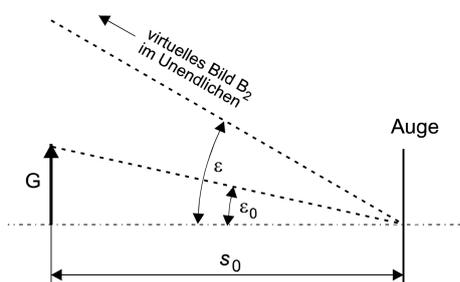


Abbildung 10.1: Geometrisch-optische Bildkonstruktion beim Mikroskop

## 2. Vergrößerung des Mikroskops

Der subjektive Eindruck der Größe eines Gegenstandes bei der Betrachtung mit dem Auge hängt von dem Winkel ab, unter dem der Gegenstand vom Auge aus erscheint. Man kann ihn durch Annäherung des Gegenstandes an das Auge vergrößern. Den kürzesten Abstand, in dem man den

Gegenstand noch ohne Anstrengung des Auges deutlich erkennen kann, bezeichnet man als deutliche Sehweite. Sie liegt beim normalsichtigen Menschen zwischen 20 und 30 cm und ist für die Vergrößerungsbestimmung von optischen Geräten auf  $s_0 = 25$  cm festgesetzt. Als Winkelvergrößerung eines optischen Instruments definiert man



$$V = \frac{\text{Schwinkel } \epsilon \text{ mit Instrument}}{\text{Schwinkel } \epsilon_0 \text{ ohne Instrument}} \quad (10.1)$$

Abbildung 10.2: Vergrößerung des Mikroskops

Betrachtet man einen Gegenstand  $G$  mit dem Mikroskop, so erscheint sein virtuelles Bild dem Auge unter dem Schwinkel  $\epsilon$ . Ohne Mikroskop und im Abstand  $s_0$  würde  $G$  unter dem Schwinkel  $\epsilon_0$  erscheinen (Abb. 10.2).

Die Winkel  $\epsilon$  und  $\epsilon_0$  können in guter Näherung für kleine Winkel mit den Größen aus Abb. 10.1 berechnet werden:

$$\tan \epsilon = \frac{B_1}{f_{Ok}} \approx \epsilon \quad \text{und} \quad \tan \epsilon_0 = \frac{G}{s_0} \approx \epsilon_0.$$

Die Annahme kleiner Winkel ist berechtigt, der Übersichtlichkeit wegen wurden die Abb. 10.1 und Abb. 10.2 nicht maßstabsgerecht ausgeführt. Damit folgt für die Winkelvergrößerung des Mikroskops (Gl. (10.1))

$$V = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{B_1}{G} \cdot \frac{s_0}{f_{Ok}} \quad (10.2)$$

und mit  $B_1/G = T/f_{Ob}$  (siehe Abb. 10.1) schließlich

$$V = \frac{T \cdot s_0}{f_{Ob} \cdot f_{Ok}} \quad (10.3)$$

Den Abstand  $T$  der Brennpunkte  $F'_{Ob}$  und  $F_{Ok}$  bezeichnet man als optische Tubuslänge. Bei maßstabsgerechter Ausführung von Abb. 10.1 ließe sich erkennen, dass  $T$  in guter Näherung der technischen Tubuslänge entspricht, da dieser Abstand viel größer ist als die Brennweiten  $f_{Ob}$  und  $f_{Ok}$ . Gl.(10.2) kann in einer Form geschrieben werden, welche in der Praxis oft nützlich ist:

$$V = \beta_{Ob} \cdot V_{Ok} \quad (10.4)$$

mit dem Abbildungsmaßstab des Objektivs  $\beta_{Ob} = B_1/G$  und der Winkelvergrößerung  $V_{Ok} = s_0/f_{Ok}$  des als Lupe betriebenen Okulars. Gerätespezifische Nennwerte für Abbildungsmaßstab und Vergrößerung sind in der Regel auf Objektiv bzw. Okular aufgedruckt, nicht aber die Brennweiten. Bringt man in die Ebene des reellen Zwischenbildes einen durchsichtigen Gegenstand, z. B. eine Glasplatte mit eingeritzter Teilung (Okularmikrometer), so sieht man das vergrößerte Zwischenbild und das Okularmikrometer gleichzeitig scharf. Das Okularmikrometer dient zur Ausmessung kleiner Strukturen.

### 3. Auflösungsvermögen eines Mikroskops

Nach den geometrisch-optischen Überlegungen könnte man mit einem Mikroskop nach Gl. (10.3) beliebig kleine Strukturen sichtbar machen, z. B. durch Vergrößerung der Tubuslänge  $T$ . Aufgrund der Wellennatur des Lichtes ist aber die Größenordnung gerade noch nachweisbarer Strukturen begrenzt. Damit überhaupt eine gute Abbildung durch ein Mikroskop zustande kommen kann, müssen nach Abbe möglichst viele Beugungsmaxima des an der Objektstruktur gebeugten Lichtes in das Mikroskop gelangen. Würde kein gebeugtes sondern nur das parallele Licht, welches z.B. im Beugungsmaximum 0. Ordnung (Abb. 10.3) enthalten ist, in das Objektiv eintreten, dann wäre das Gesichtsfeld zwar gleichmäßig hell aber völlig strukturlos (siehe auch Versuch O8). Denn zur Bildentstehung müssen in der Zwischenbildebene die Lichtstrahlen interferieren, die von einem Objektpunkt divergent ausgehen.

Zur Abschätzung des Auflösungsvermögens auf der Grundlage dieses Bildes diene nach Abbe ein optisches

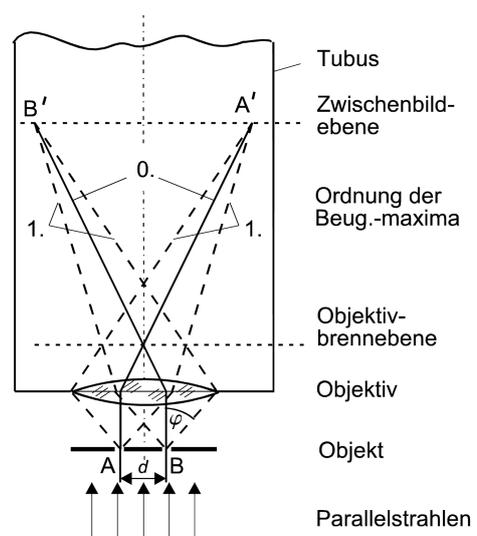


Abbildung 10.3: Auflösungsvermögen

Gitter, von welchem in Abb. 10.3 vereinfachend nur die Spalte  $A$  und  $B$  eingezeichnet sind. Auf das Gitter sei senkrecht von unten paralleles Licht gerichtet, welches an den Spalten gebeugt wird. Bei ausreichend großem Durchmesser des Objektivs können auch die Strahlen erfasst werden, welche in der Objektivbrennebene zusätzlich zum Beugungsmaximum 0. Ordnung die Maxima erster Ordnung erzeugen. Die von den Maxima ausgehenden Strahlen schneiden sich in der Zwischenbildebene und erzeugen somit durch Interferenz das Bild der Gitterspalte. Hieraus ergibt sich: Für eine Abbildung im Mikroskop müssen mindestens die Lichtbündel zweier unterschiedlicher Beugungsmaxima in das Mikroskopobjektiv gelangen (Abbesche Abbildungstheorie).

Für die Abbildung eines Gegenstandes der Größe  $d$  darf deshalb der Beugungswinkel 1. Ordnung (Winkel  $\varphi$  in Abb. 10.3) nicht größer werden als der so genannte halbe Öffnungswinkel des Objektivs  $\varphi_{\text{Ob}}$ , den die ins Objektiv eintretenden Randstrahlen mit der Mikroskopachse bilden. Wie aus der Theorie des Strichgitters bekannt (vgl. Versuch O8), ist der Beugungswinkel  $\varphi$  der 1. Ordnung durch

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{nd}$$

gegeben, wobei  $\lambda$  die Wellenlänge des Lichtes und  $n$  der Brechungsindex des Mediums zwischen Objekt und Objektiv ist. Hieraus ergibt sich, dass bei einem gegebenen Mikroskop mit dem Öffnungswinkel  $2\varphi_{\text{Ob}}$  der Abstand zweier aufzulösender Gegenstandspunkte nicht kleiner sein darf als

$$d = \frac{\lambda}{n \cdot \sin \varphi_{\text{Ob}}} \quad (10.5)$$

Für die Berechnung des Auflösungsvermögens setzt man bei Verwendung von weißem Licht  $\lambda = 550 \text{ nm}$ , weil für diese Wellenlänge die Empfindlichkeit des Auges am größten ist.

## Aufgaben

1. Bestimmung der Vergrößerung des Mikroskops für alle Kombinationen der zwei Objektive und zwei Okulare.
2. Eichung der Okularmikrometerskala für beide Objektive.
3. Messung der Durchmesser zweier Drähte.
4. Messung des Öffnungswinkels beider Objektive und Berechnung der jeweiligen Auflösungsgrenze (Gl. (10.5)).

## Versuchsdurchführung

Das Mikroskop ist ein empfindliches Präzisionsgerät, deshalb beachte man für die Versuchsdurchführung die am Versuchsplatz aufgeführten allgemeinen Regeln. Für die Scharfeinstellung des Objektes dient ein Triebknopf, mit dem sowohl die Grob- als auch die Feinverstellung des Objektisches vorgenommen wird. Mit dem Triebknopf wird der Objektisch verschoben, bis das Objekt in Umrissen sichtbar wird (Grobeinstellung). Ändert man den Drehsinn des Triebknopfes, dann wird in jeder beliebigen Stellung des Objektisches der Feintrieb wirksam und die Scharfeinstellung des Objektes ist möglich.

Für Aufgabe 1 wird als Objekt eine geeichte Skale (Objektmikrometer) benutzt. Sie wird mit einer in 250 mm Abstand (deutliche Sehweite) aufgestellten mm-Skale verglichen. Durch einen auf das Okular aufgesetzten Winkelspiegel können beide Skalen gleichzeitig betrachtet werden. Die Vergrößerung ergibt sich aus dem Verhältnis der auf den Skalen abgelesenen Längen. Zur gleichzeitigen Beobachtung der beiden Skalen müssen sie etwa gleich hell sein. Über einen Widerstand kann die Helligkeit der Mikroskopleuchte geregelt werden, bis eine gute Sichtbarkeit beider Skalen erreicht ist.

Für Aufgabe 2 erfolgt die Eichung der Okularskale durch Vergleich mit dem Objektmikrometer. Diese Eichung muss für jedes Objektiv separat durchgeführt werden.

Für Aufgabe 3 wird der Drahtdurchmesser mittels der geeichten Okularskale für beide Objektive ermittelt.

Für Aufgabe 4 muss der Öffnungswinkel des Objektivs bestimmt werden. Für diese Messung wird die Mikroskopleuchte aus der Stiftführung herausgenommen. Dann muss der Kondensator, nach Lösen der Klemmschraube, nach unten herausgenommen werden. An die Stelle der Leuchte wird eine Winkelteilung mit Lichtquelle eingesetzt. Die Lichtquelle bewegt sich auf einem Kreisbogen, in dessen Mittelpunkt der Brennpunkt des Objektivs liegt (Abb. 10.4). Der Objektisch muss sich für diese Messung so nah wie möglich am Objektiv befinden. Aus der schematischen Darstellung (Abb. 10.4) sieht man, dass das Bild  $L'$  der Lichtquelle verschwindet, wenn  $L$  um größere Winkel als  $2\varphi_{\text{Ob}}$  geschwenkt wird, das Gesichtsfeld wird dunkler. Der Winkelbereich  $2\varphi_{\text{Ob}}$  der Lampe ist gleich dem Öffnungswinkel des Objektivs.

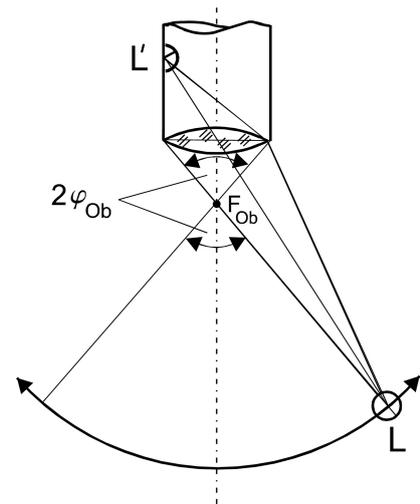


Abbildung 10.4: Öffnungswinkel

## Fragen

1. Wie leitet man die in Gl. (10.4) benutzte Winkelvergrößerung der Lupe her?
2. Warum kann man mit dem Mikroskop nur Strukturen in der Größenordnung der Wellenlänge des Lichtes auflösen?
3. Welche Linsenfehler gibt es und wie können sie korrigiert werden?
4. Was versteht man unter dem Begriff numerische Apertur?
5. Was ist ein Immersionssystem?

---

---

# 03/04 Prismen- und Gitterspektrometer

---

---

## Physikalische Grundlagen

Grundbegriffe
Brechung am Prisma
Dispersion
Fresnel-Huygensches-Prinzip
Beugung am Gitter
Spektrometer
Kohärenz
Auflösungsvermögen

Prismen- und Gitterspektrometer dienen der Wellenlängenmessung im sichtbaren Spektralbereich sowie in den angrenzenden Spektralbereichen (UV, IR), wobei die Wellenlängenabhängigkeit der Brechung (Prisma) bzw. der Beugung (Gitter) ausgenutzt wird. Qualitativ kennzeichnend für ein Spektrometer ist sein Auflösungsvermögen  $\lambda/\Delta\lambda$ , wobei  $\Delta\lambda$  die kleinste bei der Wellenlänge  $\lambda$  gerade noch nachweisbare Wellenlängendifferenz ist.

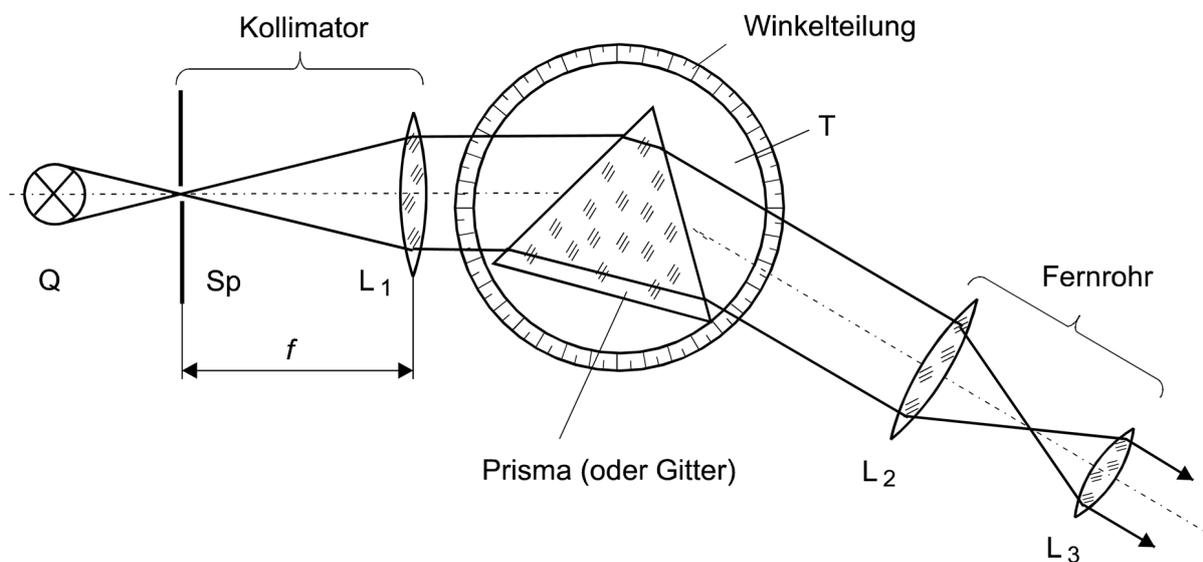


Abbildung 11.1: Aufbau des Spektrometers

## 1. Aufbau des Spektrometers

Den Aufbau des Spektrometers zeigt schematisch Abb. 11.1 mit aufgelegtem Prisma, welches leicht gegen ein Gitter ausgetauscht werden kann. Das Licht aus der Quelle Q fällt auf einen Spalt Sp veränderlicher Breite in der Brennebene der Kollimatorlinse  $L_1$ . In der Skizze wurde monochromatisches Licht vorausgesetzt, um den Strahlengang zu verdeutlichen. Die Linse  $L_1$  erzeugt aus dem divergenten Lichtbündel, welches den Spalt verlässt, ein Bündel paralleler Lichtstrahlen, welches auf das Prisma bzw. Gitter fällt. Das aus dem Prisma bzw. Gitter austretende Parallellichtbündel wird mit einem auf unendlich eingestellten Fernrohr betrachtet. Das Fernrohr ist um die Mittelachse des Tisches T schwenkbar und seine Stellung kann an einer Winkelteilung abgelesen werden.

## 2. Brechung am Prisma

Ein monochromatisches Parallellichtbündel erfährt beim Durchgang durch ein Prisma (Abb. 11.2) eine Gesamtablenkung um den Winkel

$$\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma. \quad (11.1)$$

Für den brechenden Winkel  $\gamma$  des Prismas gilt  $\gamma = \beta_1 + \beta_2$ , denn er ist auch Außenwinkel in dem Dreieck ABD. Bei symmetrischem Durchgang des Lichtbündels durch das Prisma, d.h. für  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  und  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$  wird die Gesamtablenkung minimal und es gilt

$$\alpha = \frac{1}{2}(\delta_{\min} + \gamma) \quad \text{und} \quad \beta = \frac{1}{2}\gamma \quad (11.2)$$

und aus dem Brechungsgesetz folgt

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta_{\min} + \gamma)}{\sin \frac{1}{2}\gamma} \quad (11.3)$$

zur Berechnung der Brechzahl des Prismas aus dem brechenden Winkel  $\gamma$  und dem Winkel der minimalen Ablenkung  $\delta_{\min}$ . Da die Brechzahl von der Lichtwellenlänge abhängt, ist natürlich auch der Winkel der minimalen Ablenkung wellenlängenabhängig.

Emittiert die Lichtquelle Strahlung unterschiedlicher Wellenlängen, dann beobachtet man in der Brennebene des Fernrohrobjektivs  $L_2$  die spektral zerlegte Strahlung - das Spektrum - der Lichtquelle. Leuchtende Gase oder Metaldämpfe emittieren nur Strahlung diskreter Wellenlängen, so dass man im Fernrohr einfarbige Spektrallinien beobachtet. Bestimmt man für verschiedene Spektrallinien mit bekannter Wellenlänge jeweils die Brechzahl  $n$  eines Prismas, kann die so genannte Dispersionskurve  $n = n(\lambda)$  gezeichnet werden. Aus der Dispersionskurve kann dann umgekehrt für eine unbekannte Strahlung mit Hilfe der gemessenen Brechzahl die Wellenlänge ermittelt werden. Zur numerischen Näherung des Verlaufs der Dispersion  $n = n(\lambda)$  in optisch

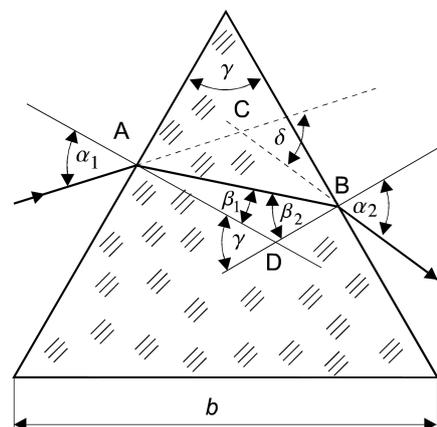


Abbildung 11.2: Brechung am Prisma

transparenten Materialien werden in der Optik die so genannten Sellmeier-Gleichungen verwendet. Die allgemeine Formulierung ist

$$n(\lambda) = \sqrt{A + \sum_{i=1}^n \frac{B_i \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - C_i}}, \quad (11.4)$$

wobei man in Abhängigkeit von der Anzahl  $n$  der Terme in  $\lambda^2$  von einer Sellmeier-Gleichung vom Typ  $n$  spricht. Diese zunächst rein empirisch erscheinende Abhängigkeit hat einen realen physikalischen Hintergrund: Allgemein sind die Dispersion und die Absorption von elektromagnetischer Strahlung, also auch von Licht, in Medien miteinander verknüpft. Die Absorption kann durch Ersatzoszillatoren beschrieben werden, deren Resonanzwellenlängen implizit in Gl. (11.4) enthalten sind (Polstellen der Terme in  $\lambda^2$ ). Eine ausführlichere Darstellung dieser Zusammenhänge würde den Rahmen dieser Versuchsbeschreibung im Praktikum sprengen.

Auch die Hersteller von technischen Glassorten, die z. B. für Prismen oder Linsen verwendet werden, beschreiben die Dispersion ihrer Produkte mit einer Sellmeier-Gleichung. Meist ist der Typ 2 (also insgesamt 5 Parameter) hinreichend, um den Brechungsindex mit einem (absoluten) Größtfehler von  $\pm 10^{-5}$  innerhalb eines spezifizierten Intervalls annähern zu können.

### 3. Auflösungsvermögen des Prismas

Es sind zwei Betriebsarten zu unterscheiden.

**a) Bei niedrigauflösenden Spektrometern** ist die Spaltbreite groß gegen die Wellenlänge. Es kann eine optische Abbildung des Spaltes erfolgen, die umso besser ist, je mehr Beugungsordnungen zur Abbildung beitragen. Das reelle Bild des Spaltes, welches in der Brennebene des Fernrohrobjektivs  $L_2$  entsteht, kann mit dem Okular  $L_3$  betrachtet werden. Der Beobachter sieht ein virtuelles Bild des Spaltes im Unendlichen. Zwei unterschiedliche Wellenlängen  $\lambda$  und  $\lambda + \Delta\lambda$  ergeben aufgrund der Dispersion des Prismas unterschiedliche Austrittswinkel  $\delta$  und damit in der Brennebene zwei getrennte Spaltbilder. Das Auflösungsvermögen wird in diesem Fall durch die Breite des Spaltes bestimmt, es kann durch Verringerung der Spaltbreite erhöht werden.

**b) Bei hochauflösenden Geräten** wählt man eine Spaltbreite in der Größenordnung der Lichtwellenlänge. Hier kann nur noch die 0. Ordnung des am Spalt gebeugten Lichtes von der Kollimatorlinse erfasst werden und eine Abbildung des Spaltes ist in diesem Fall nicht mehr möglich (vgl. Vers. O2). In der Brennebene des Fernrohrobjektivs wird nur noch eine Beugungsfigur erzeugt, die durch die geometrische Lichtbündelbegrenzung (Prismenkanten) entsteht. Abb. 11.3 zeigt für zwei Wellenlängen  $\lambda$  bzw.  $\lambda + \Delta\lambda$  die Beugungsfiguren, welche aufgrund der Dispersion des Prismas gegeneinander verschoben sind. Eine Trennung der beiden Wellenlängen ist gerade noch möglich, wenn das Hauptmaximum der einen Beugungsfigur in das 1. Min. der anderen fällt (sog. Raleigh-Kriterium).

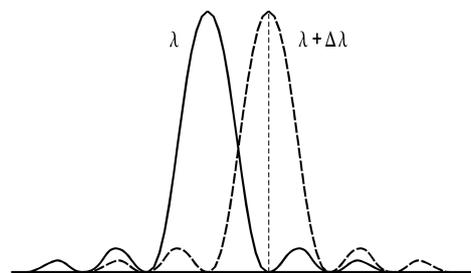


Abbildung 11.3: Beugungsfiguren

Die Hauptmaxima werden umso schmaler und damit das Auflösungsvermögen umso größer, je breiter die verwendeten Lichtbündel sind, d.h. je größer der Abstand der beugenden Kanten (hier des Prismas!) ist. Eine weitere Verengung des Spaltes ist dann sinnlos, da sie nur die Lichtintensität verringern würde. Die quantitative Behandlung der aufgeführten Zusammenhänge (siehe z.B. Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band Optik) liefert für das theoretische Auflösungsvermögen des Prismenspektrometers

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = -b \frac{dn}{d\lambda}. \quad (11.5)$$

Hierbei ist  $b$  die Basislänge des Prismas (Abb. 11.2) und  $n$  der Brechungsindex des Prismenmaterials. Der Differentialquotient  $dn/d\lambda$  heißt Dispersion des Prismenmaterials. Im Falle der sog. *normalen* Dispersion ist der Differentialquotient negativ. Entscheidend für das Auflösungsvermögen ist also neben der Dispersion  $dn/d\lambda$  die Basislänge  $b$  des Prismas.

#### 4. Beugung am Gitter

Beim Gitterspektrometer wird anstelle des Prismas ein optisches Gitter auf den Spektrometerschirm T aufgesetzt (Abb. 11.1). Trifft ein Parallelbündel kohärenten Lichtes senkrecht auf das Gitter, so können in der Brennebene der Linse  $L_2$  charakteristische Fraunhofersche Beugungserscheinungen beobachtet werden. Diese Beugungserscheinungen entstehen durch die Überlagerung der Beugungserscheinungen an den Einzelspalten. Zur Erläuterung des Prinzips der Überlagerung der von den Einzelspalten herrührenden Beugungserscheinungen dient das Beispiel für 2 Spalte in Abb. 11.4. Betrachtet werden Strahlen unter dem Beugungswinkel  $\alpha$ . Zwischen den Randstrahlen des linken Spaltes der Breite  $s$  beträgt der Gangunterschied  $\Delta_1 = s \cdot \sin \alpha$  und folglich die Phasendifferenz

$$\varphi_1 = \frac{2\pi s \sin \alpha}{\lambda}. \quad (11.6)$$

Das gleiche gilt auch für den rechten Spalt (bzw. im Falle des Gitters für alle  $N$  Spalte). Die Interferenz dieser Strahlen führt in der Brennebene von  $L_2$  unter dem Winkel  $\alpha$  zu einer Lichterregung mit der Intensität

$$I_{\text{Spalt}}(\alpha) \sim \frac{\sin^2(\varphi_1/2)}{(\varphi_1/2)^2}. \quad (11.7)$$

Die besondere Wirkung des Gitters beruht nun darauf, dass zusätzlich auch die Strahlen aus allen  $N$  beleuchteten Spalten, welche voneinander den gleichen Abstand  $g$  (Gitterkonstante) haben, miteinander interferieren. Nach Abb. 11.4 haben sie einen Gangunterschied von  $\Delta_2 = g \sin \alpha$  und eine Phasendifferenz von

$$\varphi_2 = \frac{2\pi g \sin \alpha}{\lambda}. \quad (11.8)$$

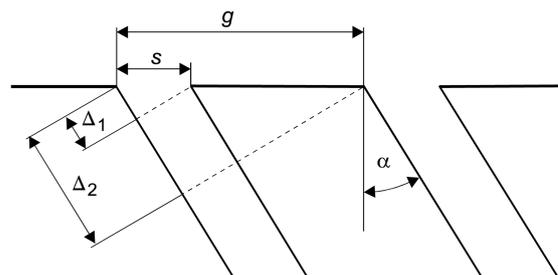


Abbildung 11.4: Beugung an zwei Spalten

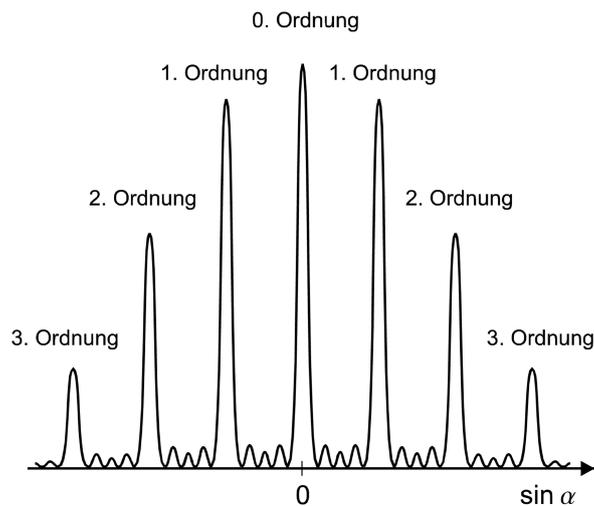


Abbildung 11.5: Beugungsfigur am Gitter

Die Vielstrahlinterferenz aller unter dem Winkel  $\alpha$  gebeugten Strahlenbündel führt zur Beugungsintensität für das gesamte Gitter

$$I(\alpha) \sim I_{\text{Spalt}}(\alpha) \frac{\sin^2(N\varphi_2/2)}{(\sin^2 \varphi_2/2)}. \quad (11.9)$$

Abb. 11.5 zeigt als Beispiel die Beugungsfigur eines Gitters mit 5 Spalten. Die Lage der Hauptmaxima (Abb. 11.5 zeigt das Hauptmaximum 0. Ordnung und symmetrisch dazu die Hauptmaxima 1. bis 3. Ordnung) folgt daraus, dass der zweite Faktor in Gl. (11.9) für die Phasendifferenzen  $\varphi_2 = 0, 2\pi, 4\pi \dots$ , also allgemein für  $\varphi_k = 2k\pi$ , seine Maximalwerte  $N^2$  annimmt. Daraus folgt mit Gl. (11.8) für die Winkel, unter denen die Hauptmaxima auftreten,

$$\sin \alpha_k = \frac{k\lambda}{g} \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.10)$$

Zwischen den Hauptmaxima befinden sich  $N-2$  Nebenmaxima. Daraus folgt, dass mit steigendem  $N$  die Hauptmaxima immer schmaler und (wegen  $I \sim N^2$ ) immer höher werden müssen. Dass die Intensität der Hauptmaxima mit steigender Ordnung abnimmt, liegt an der modulierenden Wirkung des Einzelspaltanteils in Gl.(11.9). Aus Gl.(11.9) folgt eine weitere Schlussfolgerung von sehr praktischem Interesse: Steht die Gitterkonstante  $g$  zur Einzelspaltbreite  $s$  in einem rationalen Verhältnis, so fallen gewisse der durch Gl.(11.10) gegebenen Hauptmaxima aus. Der Grund hierfür sind die Nullstellen (Minima) des Einzelspaltterms für die Winkel  $\sin \alpha_k = k\lambda/s$  ( $k = 1, 2, 3 \dots$ ).

## 5. Auflösungsvermögen des Gitters

Zwei Wellenlängen  $\lambda$  und  $\lambda + \Delta\lambda$  werden in der  $k$ -ten Ordnung getrennt (Abb. 11.6), wenn in dieser Ordnung der Abstand  $l_1$  ihrer Hauptmaxima nicht kleiner wird als der Abstand  $l_2$  zwischen dem Haupt- und dem ersten Nebenminimum von  $\lambda$ . Da, wie oben ausgeführt, zwischen zwei Hauptmaxima von  $\lambda$  immer  $N-2$  Nebenmaxima und folglich  $N-1$  Nebenminima liegen, folgt für den

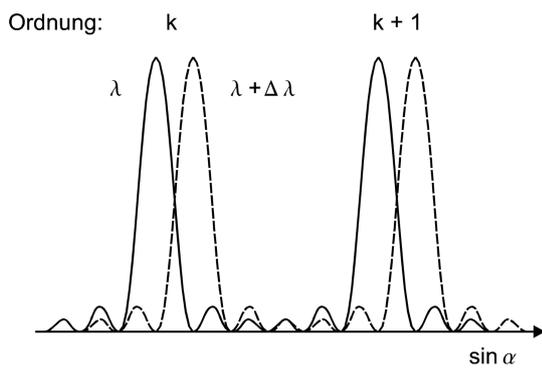


Abbildung 11.6: Auflösungsvermögen

Abstand  $l_2$  nach Gl. (11.10)

$$l_2 = \frac{1}{N} (\sin \alpha_{k+1} - \sin \alpha_k) = \frac{1}{N} \frac{\lambda}{g}$$

Für  $l_1$  gilt nach Gl. (11.9)

$$l_1 = \sin \alpha_{\lambda+\Delta\lambda} - \sin \alpha_\lambda = k \frac{\Delta\lambda}{g}$$

Damit folgt aus der Bedingung  $l_1 \geq l_2$  für die Auflösungs-grenze in der  $k$ -ten Ordnung

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq kN. \quad (11.11)$$

## Aufgaben

1. Man bestimme die Brechzahl  $n$  eines Glasprismas (Gl. (11.3)) für fünf Spektrallinien des Hg-Spektrums und stelle die Dispersionskurve  $n = n(\lambda)$  grafisch dar.
2. Man bestimme die Brechzahl  $n$  des Glasprismas (Gl. (11.3)) für die Natriumlinie und bestimme aus der Dispersionskurve ihre Wellenlänge.
3. Man schätze das Auflösungsvermögen des Prismas (Gl. (11.5)) für  $\lambda = 590 \text{ nm}$  aus der Dispersionskurve ab.
4. Für ein Beugungsgitter bestimme man mit Hilfe der grünen Hg-Linie die Gitterkonstante  $g$ , (Gl. (11.10)).
5. Mit Hilfe des Beugungsgitters ermittle man die Wellenlängen zweier weiterer Hg-Linien und die mittlere Wellenlänge des Na-Dubletts.
6. Man berechne das Auflösungsvermögen des Gitters (Gl. (11.11)) für verschiedene Ordnungen  $k$  und vergleiche die Werte mit den Beobachtungen bei der Auflösung des Na-Dubletts.

## Versuchsdurchführung

**(1) Justierung des Spektrometers:** Zunächst löst man das Fernrohr aus der Halterung und visiert einen fernen Gegenstand außerhalb des Praktikumsraumes an. Durch Drehen des Okulars erreicht man die gleichzeitige Scharfeinstellung des Fadenkreuzes im Okular und des fernen Gegenstandes. Die Justierung des Fernrohrs muss während der gesamten Versuchsdurchführung erhalten bleiben. Anschließend erfolgt die Scharfeinstellung des Spaltes durch Justierung des Kollimators. Auch diese Einstellung darf dann nicht mehr verändert werden.

**(2) Einstellung des Winkels  $\delta_{\min}$ :** Man drehe das Prisma auf dem Prismentisch in einem bestimmten Drehsinn und beobachte die Bewegung des gebrochenen Strahlenbündels zunächst auf einem in den Strahlengang gehaltenen Blatt Papier. Es gibt eine Stellung des Prismas, von der ab unter Beibehaltung des Prismendrehsinns sich die Bewegungsrichtung des Lichtbündels umkehrt. Die Umkehrstelle ist der Winkel minimaler Ablenkung. Zur genauen Messung benutzt man das Fernrohr und bringt das Fadenkreuz mit der Umkehrstelle der jeweiligen Spektrallinien zur Deckung und liest die zugehörigen Fernrohrstellungen am Teilkreis mit dem Nonius ab.

Der zweite Schenkel des zu messenden Winkels  $\delta_{\min}$  ist durch die Einfallrichtung des unabgelenkten Lichtbündels gegeben. Eine höhere Messgenauigkeit erzielt man, wenn man das Prisma auf dem Prismentisch dreht und das gleiche Verfahren zur Auffindung der Umkehrstelle auf der anderen Seite in Bezug auf die Richtung des einfallenden Lichtbündels anwendet. Man erhält also für jede Spektrallinie zwei Fernrohrstellungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ . Die Hälfte der Differenz der beiden Winkelstellungen ist gleich dem Ablenkwinkel  $\delta_{\min}$ . Der brechende Winkel  $\gamma$  des Prismas beträgt  $60^\circ$ . Man beachte, dass die Spektrallampen nur über eine Drossel an die Netzspannung angeschlossen werden dürfen.

Für Aufgabe 1 verwende man die folgenden Hg-Linien:

violett	$\lambda_1 = 404.656 \text{ nm}$
blau	$\lambda_2 = 435.833 \text{ nm}$
blau/grün	$\lambda_3 = 491.607 \text{ nm}$
grün	$\lambda_4 = 546.074 \text{ nm}$
rot	$\lambda_5 = 623.440 \text{ nm}$

Für Aufgabe 2 verwendet man die gelbe Linie der Na-Lampe. Den Messwert vergleiche man mit dem Tabellenwert des aus zwei dichtbenachbarten Spektrallinien bestehenden Na-Dubletts:  $\lambda_1 = 588.9950 \text{ nm}$  bzw.  $\lambda_2 = 589.5924 \text{ nm}$ .

Für Aufgabe 3 kann zur Ermittlung von  $d n / d \lambda$  ein am Versuchsort vorhandenes Spiegellinial benutzt werden. Wesentlich eleganter ist aber die numerische Näherung der Dispersionsbeziehung  $n(\lambda)$  gemäß Gl. (11.4),  $d n / d \lambda$  kann dann durch Differentiation ermittelt werden.

Für Aufgabe 4 wähle man die grüne Hg-Linie ( $\lambda = 546.074 \text{ nm}$ ) und für Aufgabe 5 die blaue und die gelbe Hg-Linie sowie die gelbe Natriumlinie.

für Aufgabe 6 ermittle man experimentell, ab welcher Ordnung das Na-Dublett als zwei getrennte Linien beobachtet werden kann und vergleiche mit dem theoretischen Wert (Gl. (11.11)). Dazu bestimme man  $N$  aus der Größe der ausgeleuchteten Gitterfläche und der Gitterkonstanten  $g$  (Aufgabe 4).

## Fragen

1. Was versteht man unter normaler bzw. anomaler Dispersion?
2. Unter welchen Bedingungen tritt nach dem Brechungsgesetz Totalreflexion ein?
3. Wie kann das Reflexions- und das Brechungsgesetz mit dem Huygens-Fresnel-Prinzip erklärt werden?
4. Was ist kohärentes Licht?
5. Welche Besonderheiten weist das Gitterspektrum auf, wenn das Verhältnis von Gitterkonstante  $g$  zu Spaltbreite  $s$  gerade 2:1 beträgt?

## Physikalische Grundlagen

Grundbegriffe
Interferenz
Kohärenz
Gangunterschied
Phasendifferenz

### 1. Interferenz

Neben der Beugung gelten die Interferenzerscheinungen als überzeugender Beweis für die Wellennatur des Lichtes. Als Interferenz bezeichnet man die Überlagerung kohärenter Wellenzüge gleicher Frequenz. Ob die Lichtintensitäten am Ort der Beobachtung Verstärkung oder Schwächung bis hin zur Auslöschung aufweisen, hängt von der Phasendifferenz  $\varphi$  der Schwingungen bzw. dem Gangunterschied  $\Delta\lambda$  der interferierenden Wellenzüge ab, wie folgende Überlegung zeigt: Am Ort der Interferenz der Wellen 1 und 2 addieren sich die elektrischen Feldstärken  $E_1 = E_{01} \cos \omega t$  und  $E_2 = E_{02} \cos(\omega t + \varphi)$ . Für die Addition der beiden Kosinusfunktionen kann die Zeigerdarstellung in Abb. 12.1 benutzt werden. Die Vektoren  $\vec{E}_1$  und  $\vec{E}_2$  haben die Längen  $E_{01}$  bzw.  $E_{02}$  und der Betrag ihrer Vektorsumme ist  $\vec{E}_{1+2}$  die Amplitude des resultierenden Feldes. Mit dem Kosinussatz findet man

$$E_{1+2}^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos \varphi.$$

Damit gilt für die Intensitäten, welche proportional zum Quadrat der Feldstärken sind,

$$I_{1+2} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi. \quad (12.1)$$

Der letzte Summand wird Interferenzglied genannt. Die Intensität kann somit je nach der Phasenverschiebung  $\varphi$  alle Werte zwischen  $I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$  (Interferenzminimum) und  $I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$  (Interferenzmaximum) annehmen. Bei gleichen Intensitäten der beiden Teilwellen liegt  $I_{1+2}$  zwischen 0 und  $4I$ .

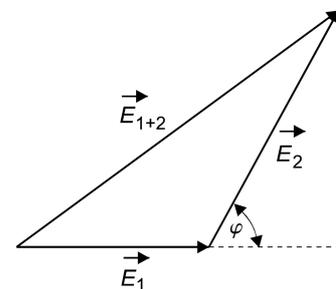


Abbildung 12.1:  
Zeigerdiagramm

## 2. Newtonsche Ringe

Als Newtonsche Ringe bezeichnet man Interferenzbilder, die bei folgender Anordnung entstehen: Eine Plankonvexlinse mit großem Krümmungsradius  $R$  liegt mit der gekrümmten Fläche auf einer ebenen Glasplatte (Abb. 12.2). Zwischen diesen beiden Flächen besteht ein Luftkeil mit veränderlicher Dicke  $d$ . Beleuchtet man die Anordnung senkrecht von oben mit parallelem monochromatischem Licht, dann beobachtet man sowohl in Reflexion als auch in Durchsicht konzentrische helle und dunkle Ringe um den Berührungspunkt von Linse und Glasplatte.

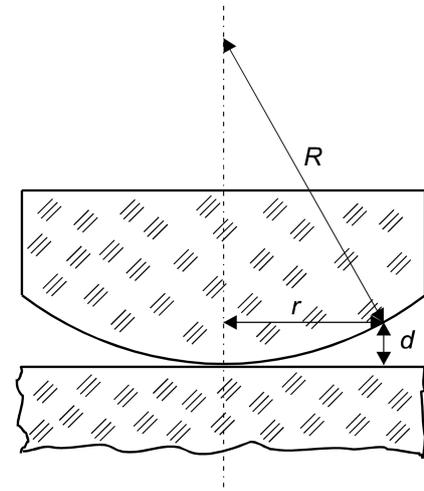


Abbildung 12.2: Versuchsaufbau

Die Ringe entstehen durch Interferenz der an der oberen und unteren Grenzfläche des Luftkeils reflektierten Lichtwellen und heißen Newtonsche Ringe. Zur Berechnung der Newtonschen Ringe betrachten wir einen vergrößerten Ausschnitt aus der Anordnung Linse/Glasplatte (Abb. 12.3). Die erste für die Betrachtungen wichtige Reflexion, die zur Bildung des Teilstrahls 1 führt, erfolgt an der Unterseite der Linse, d. h. beim Übergang des Lichts in das optisch dünnere Medium des Luftkeils. Ein Teil des Lichts durchquert den Luftkeil, wobei am optisch dichteren Medium (Glasplatte) dann eine erneute Reflexion erfolgt, die zur Bildung des Teilstrahls 2 führt. Die beiden Teilstrahlen 1 und 2 sind kohärent und überlagern sich im Punkt A. Betrachtet man alle reflektierten Teilstrahlen, dann ergibt sich oberhalb des Luftkeils eine Fläche, in der sich die entsprechenden Teilstrahlen überlagern. Diese Fläche rückt bei sehr kleinem Keilwinkel und senkrechtem Lichteinfall auf die obere Seite des Luftkeils.

Man kann diese Fläche und damit das Interferenzbild entweder mit dem Auge direkt beobachten, indem das Auge auf die Fläche akkommodiert, oder mit einem Mikroskop z.B. zum Ausmessen der Ringdurchmesser. Der geometrische Gangunterschied zwischen den Teilstrahlen 1 und 2

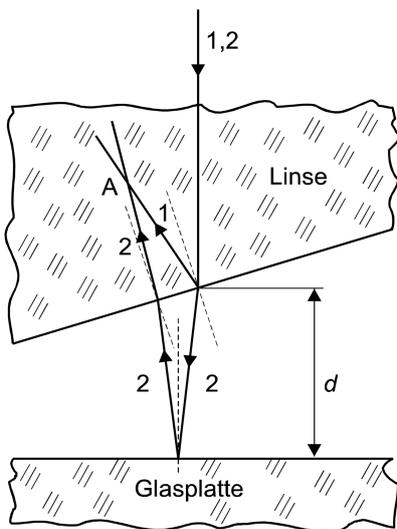


Abbildung 12.3: Strahlenverlauf

beträgt näherungsweise  $2d$  und dies ist wegen  $n_{\text{Luft}} \approx 1$  auch der optische Gangunterschied. Dieser ist aber für die Phasenverschiebung  $\varphi$  in Gl. (12.1) nicht allein maßgebend, da der Teilstrahl 2 bei der Reflexion am optisch dichteren Medium noch einen Phasensprung von  $\pi$  (das entspricht  $\lambda/2$ ) erfährt. Die Phasenverschiebung ergibt sich dann zu

$$\varphi = 2\pi \frac{2d}{\lambda} + \pi. \quad (12.2)$$

Die Intensität bei Überlagerung wird nach Gl. (12.1) minimal für  $\cos \varphi = -1$ , d.h. für  $\varphi_k = (2k + 1)\pi$  mit  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Aus Gl. (12.2) ergibt sich dann als Bedingung für minimale Intensität

$$d_k = \frac{\lambda}{2} k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (12.3)$$

$d_k$  ist somit die Dicke des Luftspaltes, die zum  $k$ -ten dunklen Ring gehört. Ein Interferenzminimum tritt auch im Berührungspunkt von Linse und Glasplatte auf ( $k = 0, d_0 = 0$ ), hier

ist die Phasendifferenz allein durch den Phasensprung von  $\pi$  bedingt. Aus Abb. 12.2 entnimmt man die geometrische Beziehung

$$\begin{aligned} R^2 &= (R - d)^2 + r^2 && \text{bzw.} \\ r^2 &= 2Rd - d^2. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Da  $d$  sehr klein gegen  $R$  ist, kann man  $d^2$  gegenüber  $2Rd$  vernachlässigen und mit Gl. (12.3) folgt dann

$$r_k = \sqrt{R\lambda k} \tag{12.5}$$

für die Radien der (dunklen) Newtonschen Ringe. Je größer  $k$  ist, desto kleiner ist der Unterschied zwischen den Radien benachbarter Ringe, d.h. desto dichter liegen die Ringe. Durch Messung der Radien bzw. der Durchmesser der Newtonschen Ringe lassen sich entweder der Krümmungsradius  $R$  der Linse oder die Wellenlänge des verwendeten Lichtes bestimmen, je nachdem, welche der beiden Größen bereits bekannt ist.

## Aufgaben

1. Bestimmung des Krümmungsradius  $R$  einer Plankonvexlinse mit dem grünen Licht einer Hg-Spektrallampe ( $\lambda = 546.074 \text{ nm}$ ) aus der grafischen Darstellung  $r_k^2 = f(k)$ .
2. Bestimmung der Wellenlänge einer weiteren sichtbaren und möglichst isolierten Spektrallinie des Hg-Spektrums und der Na-D-Linie aus den grafischen Darstellungen  $r_k^2 = f(k)$ .

## Versuchsdurchführung

Zur Beobachtung der Newtonschen Ringe dient ein lateral verschiebbares Mikroskop mit Fadenkreuz. Die Ablesung der Mikroskopstellung erfolgt an einer Messschraube (1 Skalenteil = 0.01 mm). Um Fehler infolge des toten Ganges auszuschalten, ist es notwendig, das Mikroskop nur in einer Richtung über das Ringsystem zu bewegen und die Durchmesser  $2r_k$  zu messen. Die Beleuchtung der Messanordnung mit monochromatischem Licht erfolgt von der Seite durch eine Spektrallampe mit Spektralfiltern. Mittels einer unter  $45^\circ$  zur Beobachtungsrichtung geneigten Glasplatte wird das Licht eingespiegelt. Die Spektrallampen dürfen nicht direkt an das Wechselstromnetz angeschlossen werden, sondern müssen in Reihe mit einer Drossel geschaltet werden. Aus dem Anstieg der Geraden  $r_k^2 = f(k)$  werden  $R$  bzw.  $\lambda$  nach Gl. (12.5) bestimmt.

## Fragen

1. Was versteht man unter kohärentem Licht und wie kann man es erzeugen?
2. Mit welchen Experimenten kann man den Teilchencharakter des Lichtes nachweisen?
3. Die Newtonschen Ringe sind nicht nur bei Reflexion sondern auch in Durchsicht zu beobachten. Wie muss Abb. 12.3 ergänzt werden, um diese Erscheinung zu erklären?
4. Wie sehen Newtonsche Ringe bei Beleuchtung der Anordnung mit weißem Licht aus?

5. Welche Bedingung gilt für die Radien der hellen Newtonschen Ringe? Warum werden im Versuch die Radien der dunklen Ringe ausgewertet?
6. Wie ändern sich die grafischen Darstellungen  $r_k^2 = f(k)$ , wenn die Linse die Glasplatte nicht einwandfrei berührt?

## Physikalische Grundlagen

### Grundbegriffe

Brechungsgesetz  
Totalreflexion  
absolute und relative Brechzahl  
Dispersion  
Refraktometer

Das Abbe-Refraktometer dient zur Messung der Brechzahl flüssiger oder fester Stoffe durch Anwendung des Brechungsgesetzes (Abb. 13.1)

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \quad (13.1)$$

mit dem Einfallswinkel  $\alpha_1$ , dem Brechungswinkel  $\alpha_2$  und den Brechzahlen  $n_1$  bzw.  $n_2$  der Stoffe. Beim Übergang vom optisch dünneren zum optisch dichteren Stoff ( $n_1 < n_2$ ) ist der Brechungswinkel  $\alpha_1 < \alpha_2$ . Für den maximalen Einfallswinkel  $\alpha_1 = 90^\circ$  folgt aus dem Brechungsgesetz

$$\sin \alpha_g = \frac{n_1}{n_2}. \quad (13.2)$$

Auch wenn im Stoff 1 im gesamten punktierten Winkelbereich Licht einfällt, wird im Stoff 2 nur bis zum Grenzwinkel  $\alpha_g$  der Totalreflexion der schraffierte Winkelbereich ausgeleuchtet (Abb. 13.1). Dieser Grenzwinkel wird beim Abbe-Refraktometer zur Bestimmung der Brechzahl verwendet.

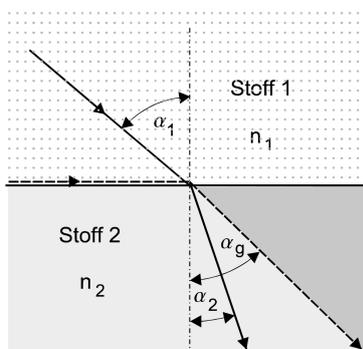


Abbildung 13.1: Brechungsgesetz

Im Prismenkörper (Abb. 13.2) sind das Messprisma und das Beleuchtungsprisma so angeordnet, dass zwischen ihren Grundflächen ein Hohlraum zur Aufnahme der flüssigen Probe entsteht. Er ist in der Abbildung stark vergrößert gezeichnet. Das in das Beleuchtungsprisma einfallende Licht wird an der matten Grundfläche gestreut und durchsetzt die Probe in allen Richtungen; insbesondere trifft es auch streifend auf die Grundfläche des Messprismas, die für die Messung entscheidende Grenzfläche. Das streifend einfallende Licht (Abb. 13.2, dicke Pfeile) führt im Messprisma zum Grenzwinkel  $\alpha_g$ , wenn die Brechzahl der Probe  $n_{\text{Probe}}$  kleiner als die Brechzahl des Messprismas  $n_{\text{Prisma}}$  ist. An jedem Punkt dieser Grenzfläche wird das Licht gebrochen; gezeichnet sind für zwei beliebige Punkte jeweils zwei gebrochene Strahlen. Die beiden Strahlen 1 und 1', wie

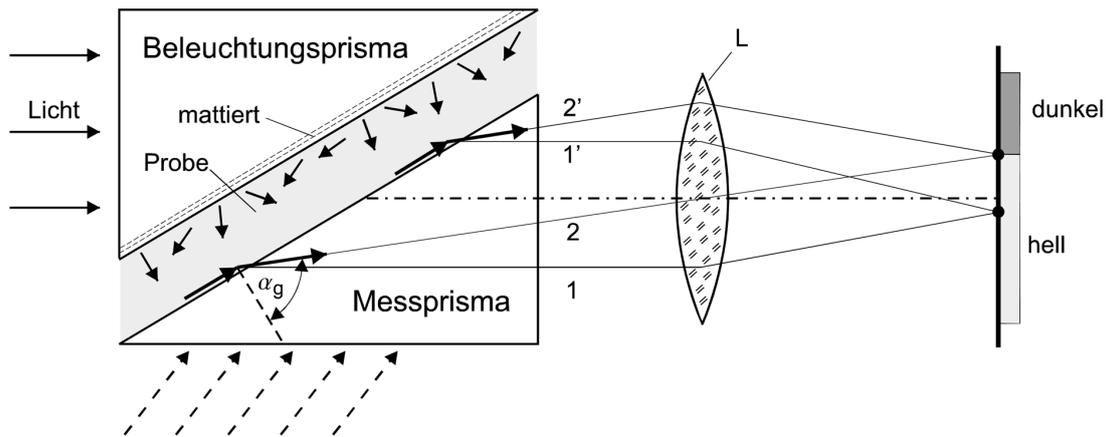


Abbildung 13.2: Prismenkörper

auch alle anderen an der Grenzfläche unter diesem Winkel gebrochenen Strahlen ergeben in der Brennebene der Linse L das Bild B1. Die beiden Strahlen 2 und 2' ergeben das Bild B2. Es können keine größeren Brechungswinkel auftreten als die der Strahlen 2 und 2', weil sie dem Grenzwinkel  $\alpha_g$  der Totalreflexion entsprechen. Beim Abbe-Refraktometer wird das aus dem Messprisma austretende Licht mit einem Fernrohr beobachtet und es entsteht im Gesichtsfeld des Fernrohres eine scharfe Grenzlinie zwischen einem hellen und einem dunklen Bereich. Gemessen wird aber nicht der Grenzwinkel der Totalreflexion, sondern auf einer mit dem Messprisma konstruktiv verbundenen Skale kann direkt die Brechzahl für die Wellenlänge der gelben Na-D-Linie ( $\lambda = 589 \text{ nm}$ ) abgelesen werden.

### Aufbau des Refraktometers

Das Abbe-Refraktometer (Abb. 13.3) besteht im wesentlichen aus dem Messprisma ①, dem Beleuchtungsprisma ②, dem Beobachtungsfernrohr ③ mit integriertem Ablesemikroskop für die Brechzahlskale und den Stellrädern ④ und ⑤. Das Stellrad ④ dient nach der Beschickung des Prismenkörpers mit der Probe zur Einstellung der Hell-Dunkel-Grenzlinie auf das Strickkreuz im Okular. Mit dem Stellrad ⑤ kann der dispersionsbedingte Farbsaum der Grenzlinie zum Verschwinden gebracht werden. An beiden Prismen befinden sich verschließbare Beleuchtungsfenster ⑥ und ⑦ und auf der in Abb. 13.3 verdeckten Seite des Gerätes eine drehbare Beleuchtungsvorrichtung für die Brechzahlskale. Das Abbe-Refraktometer gestattet mehrere Messverfahren:

- Im durchfallenden Licht - wie oben beschrieben - ist der Hell-Dunkel-Kontrast besonders groß, aber diese Methode ist nur für durchsichtige Flüssigkeiten geeignet (Aufgabe 1).
- Im streifenden Licht, anwendbar für durchsichtige feste Stoffe, wird das Beleuchtungsprisma weggeklappt und das Licht fällt durch eine mattierte Seitenfläche des Messobjektes parallel zum Messprisma ein (Aufgabe 2).
- Im reflektierten Licht, anwendbar für alle festen und flüssigen Substanzen, wird das Beleuchtungsfenster ⑦ geöffnet, so dass das Licht dann schräg von unten (Abb. 13.2, gestrichelte dicke Pfeile) in das Messprisma eintritt (Aufgabe 2). Dieses Messverfahren ist auch für stark

gefärbte Flüssigkeiten und undurchsichtige feste Stoffe anwendbar, im Gegensatz zu den beiden vorstehenden.

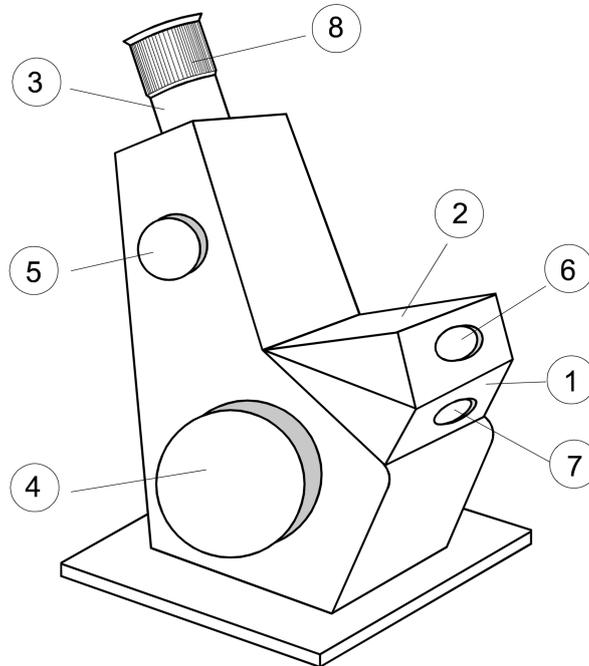


Abbildung 13.3: Refraktometer

## Aufgaben

1. Die Brechzahl von destilliertem Wasser wird zehnmal gemessen und der Mittelwert sowie die Standardabweichung bestimmt.
2. Messung der Brechzahl von Plexiglas mit streifendem und reflektiertem Licht (jeweils 6 mal) und Bestimmung des Mittelwertes.
3. Messung der Brechzahl von Äthylenglykol-Wasser-Gemischen für 10 verschiedene Volumenkonzentrationen und grafische Darstellung der Brechzahlen als Funktion der Volumenkonzentration.
4. Abschätzung des Fehlers für die Konzentrationsangabe und Eintragung der Fehler in die grafische Darstellung.
5. Rechnerische Ermittlung der Eichkurve durch lineare Regression.
6. Bestimmung der Konzentration eines unbekanntes Gemisches unter Verwendung der Eichkurve.

## Versuchsdurchführung

Das Abbe-Refraktometer bedarf als empfindliches Präzisionsinstrument einer besonders pfleglichen Behandlung. Zur Probenbeschickung wird das Beleuchtungsprisma nach vorn geklappt. Flüssige Proben werden nach Reinigung beider Prismenflächen mit einem weichen Lappen und destilliertem Wasser mit einem Kunststoffstab (Gefahr des Zerkratzens!) auf das Messprisma gegeben. Ein Tropfen Messflüssigkeit genügt. Anschließend wird das Beleuchtungsprisma wieder angeklappt und das Fenster ⑥ geöffnet. Feste durchsichtige Proben werden mit einer polierten ebenen Fläche unter Verwendung einer Immersionsflüssigkeit auf das Messprisma gedrückt. Nach Öffnung des Beleuchtungsfensters ⑦ kann im reflektierten Licht gemessen werden. Für die Messung im streifenden Licht muss die Seitenkante der Probe, durch die das Licht einfällt, mattiert sein. Zur Beobachtung mit dem Fernrohr wird der Rändelring ⑧ so verstellt, dass Strichkreuz und Grenzlinie gleichzeitig scharf gesehen werden. Die Einstellung der Hell-Dunkel-Grenzlinie auf das Strichkreuz mit dem Stellrad ④ muss evtl. nach der Korrektur des Farbsaumes wiederholt werden. Danach kann die Brechzahl abgelesen werden.

Für Aufgabe 1 übe man mit destilliertem Wasser die Handgriffe zur Messung der Brechzahl. Man führe 10 Messungen durch und bestimme Mittelwert und Standardabweichung.

Für Aufgabe 2 verwende man den Plexiglaskörper und benutze als Immersionsflüssigkeit Monobromnaphthalin ( $n = 1.65 \dots$ ). Das Beleuchtungsfenster ⑦ wird nur bei Beobachtung im reflektierten Licht geöffnet.

Für Aufgabe 3 stehen 10 Glasröhrchen und 2 Messpipetten zur Herstellung von 10 Gemischen mit unterschiedlicher Konzentration zur Verfügung. Die eine Pipette soll nur für Wasser, die andere nur für Äthylenglykol verwendet werden, um die Konzentrationsfehler gering zu halten. Die Messergebnisse werden graphisch dargestellt.

Für Aufgabe 4 berechne man den Fehler der Konzentrationsangaben, indem die Toleranzangaben der Pipetten und ihre Ablesegenauigkeit berücksichtigt werden. In die grafische Darstellung zeichne man den Fehler bezüglich der Brechzahl (Aufgabe 1, Standardabweichung) und bezüglich der Konzentrationsangabe (Aufgabe 4) ein und lege eine Gerade als Eichkurve durch die Messpunkte.

Für Aufgabe 5 berechne man die Eichkurve durch lineare Regression, wozu das Rechnerprogramm Geradenausgleich „GERA“ benutzt werden kann; das Programm berechnet auch die zufälligen Fehler. Man zeichne die rechnerisch ermittelte Gerade in das Diagramm der Aufgabe 3 ein, einschließlich der Fehlerangabe. Für Aufgabe 6 benutze man das am Versuchsplatz vorhandene Äthylenglykol-Wasser-Gemisch.

## Fragen

1. Wodurch wird der messbare Wertebereich des Refraktometers begrenzt?
2. Warum heißt der Winkel  $\alpha_g$  (Abb. 13.1) der Grenzwinkel der Totalreflexion?
3. Warum lässt sich auch der an der Grenzfläche zur Probe reflektierte Strahl zur Messung ausnutzen (Untersuchung stark absorbierender bzw. undurchsichtiger Substanzen)?

---

---

# O8 Fraunhofersche Beugung

---

---

## Physikalische Grundlagen

Grundbegriffe
Huygens-Fresnelsches Prinzip
Interferenz
Beugungsordnungen
Auflösungsvermögen
Laser

Zum Verständnis des Entstehens optischer Abbildungen ist die geometrische Optik (Versuche O1 und O10) allein nicht ausreichend. Erst unter Hinzunahme von Beugung und Interferenz auf der Grundlage des Wellenbildes für die Lichtausbreitung können die Bildentstehung und für die Praxis so wichtige Fragen wie das Auflösungsvermögen optischer Geräte richtig erklärt werden. Wesentlich für die Deutung der Beugungserscheinungen ist das Huygens-Fresnelsche Prinzip. Zum näheren Studium der Beugung eignen sich speziell geformte Hindernisse, welche zu besonders eindrucksvollen Beugungsbildern führen.

### 1. Einfachspalt

Trifft paralleles Licht senkrecht auf einen Schirm, in dem sich ein Spalt der Breite  $b$  befindet, so findet man hinter dem Schirm in einer zu Schirm und Spalt parallelen Ebene eine Intensitätsverteilung des gebeugten Lichtes  $I_S(\alpha)$  gemäß

$$I_S(\alpha) \sim \left[ \frac{\sin(\varphi_S/2)}{\varphi_S/2} \right]^2 \quad \text{mit} \quad \varphi_S = \frac{2\pi b \sin \alpha}{\lambda}. \quad (14.1)$$

Hierbei ist  $\alpha$  der Beobachtungswinkel gegen die Geradeausrichtung und  $\lambda$  die Lichtwellenlänge. Abb. 14.1a zeigt diese Verteilung. Symmetrisch zum Hauptmaximum in Geradeausrichtung liegen in der Intensität stark abnehmende Nebenmaxima. Die dazwischenliegenden Minima sind deutlich schmaler und deshalb leichter zu lokalisieren als die benachbarten Maxima. Zählt man diese Minima von der Mitte beginnend fortlaufend ( $k = 1, 2, \dots$ ), so erhält man aus den Nullstellen von Gl. (14.1) für die Winkel  $\alpha_k$ , unter denen die Minima in Bezug auf die Geradeausrichtung auftreten,

$$\sin \alpha_k = k \cdot \frac{\lambda}{b} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (14.2)$$

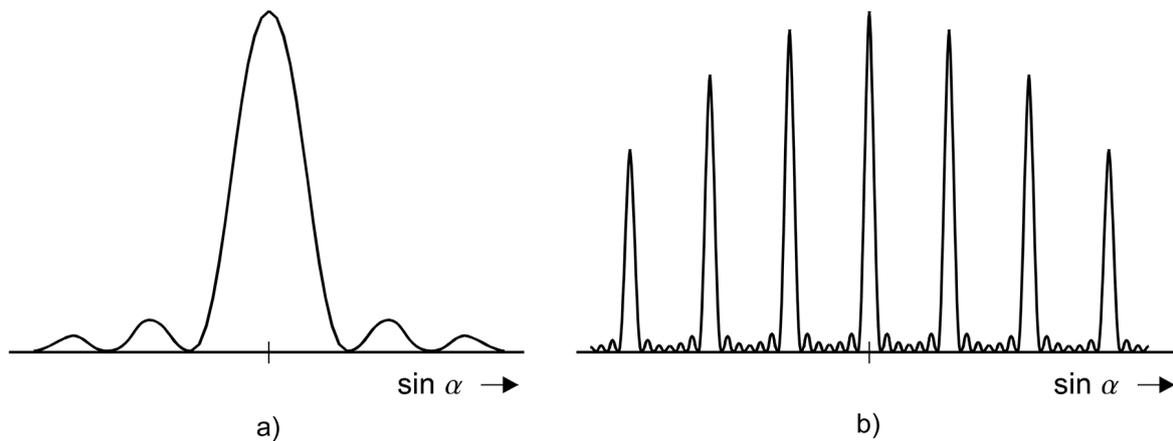


Abbildung 14.1: Beugungsfiguren an a) Spalt und b) Gitter

## 2. Gitter

Lässt man paralleles Licht senkrecht auf ein optisches Gitter auffallen, so beobachtet man Beugungserscheinungen, welche durch Überlagerung der Beugungserscheinungen an den Einzelspalten entstehen. Die Vielstrahlinterferenz der Strahlen aus allen  $N$  beleuchteten Spalten, welche voneinander den gleichen Abstand  $g$  (Gitterkonstante) haben, führt zur Intensitätsverteilung

$$I \sim I_S(\alpha) \cdot \left[ \frac{\sin(N\varphi_G/2)}{\sin(\varphi_G/2)} \right]^2 \quad \text{mit} \quad \varphi_G = \frac{2\pi g \sin \alpha}{\lambda}. \quad (14.3)$$

Abb. 14.1b zeigt diese Verteilung für ein Gitter mit 7 Spalten. Die Lage der Hauptmaxima folgt aus den Maximalwerten  $N^2$  des zweiten Faktors in Gl. (14.3) für die Beugungswinkel

$$\sin \alpha_k = k \cdot \frac{\lambda}{g} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (14.4)$$

Zwischen den Hauptmaxima befinden sich  $N - 2$  Nebenmaxima, welche mit wachsendem  $N$  immer flacher werden und bei den in der Optik benutzten Gittern praktisch unsichtbar sind. Die Hauptmaxima hingegen werden wegen  $I \sim N^2$  (nach Gl. (14.3)) mit wachsendem  $N$  immer höher und schmaler.

## 3. Lochblende

Fällt paralleles Licht senkrecht auf eine Lochblende, so entsteht als Beugungsfigur eine Anordnung konzentrischer Ringe mit einem ausgeprägten zentralen Maximum. Bezeichnet man mit  $I_0$  die Maximalintensität und mit  $\alpha$  wieder den Beobachtungswinkel gegen die Geradeausrichtung, so ergibt sich die Intensitätsverteilung nach der Formel

$$I = I_0 \left[ \frac{J_1(\theta/2)}{\theta/4} \right]^2 \quad \text{mit} \quad \theta = \frac{2\pi B \sin \alpha}{\lambda}. \quad (14.5)$$

Hierbei ist  $J_1$  die Besselfunktion 1. Ordnung und  $B$  der Blendendurchmesser. Aus den Nullstellen der Besselfunktion 3.832, 7.016, 10.173, 13.324, 16.471, ... erhält man die Lage der Minima. Für den Winkelabstand  $\alpha$  zwischen der Geradeausrichtung und dem 1. Minimum, welcher wesentlich für das Auflösungsvermögen optischer Geräte ist, folgt daraus

$$\sin \alpha = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{B}. \quad (14.6)$$

#### 4. Auflösungsvermögen optischer Geräte

Das Auflösungsvermögen vergrößernder optischer Geräte wie z. B. Fernrohr und Mikroskop wird grundsätzlich durch die Beugung des einfallenden Lichtes an den kreisförmigen Objektivrändern begrenzt. Die Abbildung eines selbstleuchtenden Punktes erfolgt nicht als Punkt, sondern als ein helles Beugungsscheibchen, welches von Beugungsringen umgeben ist, deren Intensität in radialer Richtung stark abnimmt. Zwei Objektpunkte können getrennt wahrgenommen werden, wenn ihre Beugungsscheibchen mit dem Durchmesser  $D$  in der Bildebene einen Mindestabstand vom halben Scheibchendurchmesser haben (Abb. 14.2).

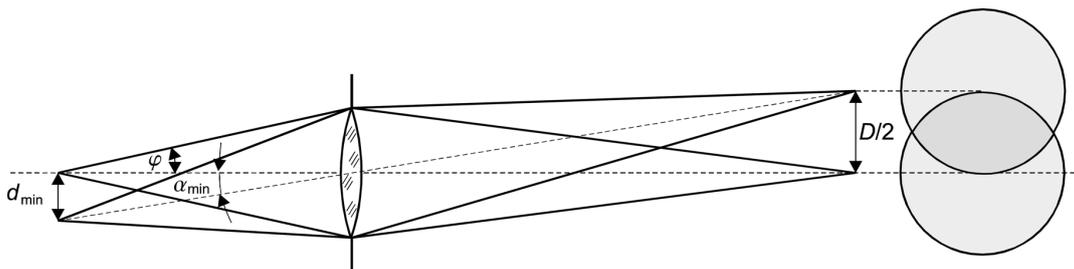


Abbildung 14.2: Zum Auflösungsvermögen optischer Geräte

Nimmt man für den Scheibchenradius den Abstand zwischen dem Intensitätsmaximum der zu einem Objektpunkt gehörenden Beugungsfigur und dem ersten Intensitätsminimum an, so folgt für den kleinsten auflösbaren Winkelabstand der Objektpunkte nach Gl. (14.6) näherungsweise  $\alpha_{\min} = 1.22\lambda/B$  ( $B$  ist der Objektivdurchmesser). Für das Mikroskop, bei welchem das Objekt näherungsweise in der vorderen Brennebene des Objektivs liegt, folgt aus diesen Überlegungen ein Mindestabstand der Punkte in der Objektebene von

$$d_{\min} \approx f \cdot \alpha_{\min} \approx 1.22f \frac{\lambda}{B}. \quad (14.7)$$

Hieraus lässt sich abschätzen, dass man Objektstrukturen nicht mehr auflösen kann, wenn die Abstände kleiner als die Wellenlänge des benutzten Lichtes werden. Eine Berechnung des Auflösungsvermögens des Mikroskops auf dieser Grundlage wurde zuerst von H. v. Helmholtz angegeben.

Zu einem quantitativ sehr ähnlichen Ergebnis für das Mikroskop, bei welchem das Objekt normalerweise nicht selbst leuchtet, gelangte E. Abbe im Rahmen seiner Theorie der Bildentstehung für periodische Objekte. Danach ist die notwendige Voraussetzung für die Ähnlichkeit von Bild und Objekt, dass bei der Annahme senkrechter Beleuchtung des Objektes mit parallelem Licht außer der 0. mindestens die 1. Ordnung des am Objekt gebeugten Lichtes in das Objektiv gelangt.

Die Abbildung wird umso getreuer, je mehr Ordnungen zu ihr beitragen. Benutzt man nach Abbe als Objekt ein Gitter (Versuch O4) mit der Gitterkonstanten  $g$ , so folgt bei Nutzung der 0. und 1. Ordnung aus Gl. (14.4) als kleinster auflösbarer Spaltabstand

$$g_{\min} = \frac{\lambda}{n \sin \varphi}. \quad (14.8)$$

Hierbei ist  $n \sin \varphi$  die numerische Apertur mit  $n$  als Brechungsindex des Mediums zwischen Objekt und Objektiv und  $\varphi$  als halber Öffnungswinkel des Objektivs in Bezug auf einen Objektpunkt (Abb. 14.2).

## Aufgaben

1. Justierung des Laserstrahls
2. Bestimmung der Wellenlänge des Laserlichtes mit einem Strichgitter aus der Lage der Beugungsmaxima nach Gl. (14.4).
3. Ausmessen der Breite eines Spaltes aus dem Abstand der Beugungsminima nach Gl. (14.2).
4. Überprüfung der Abbeschen Formel für das Auflösungsvermögen des Mikroskops nach Gl. (14.8).
5. Messung der relativen Intensitätsverteilung des Beugungsbildes hinter einer Lochblende und Vergleich mit der Theorie nach Gl. (14.5).

## Versuchsdurchführung

**ACHTUNG ! Da der Laser auf Grund seiner hohen Leistungsdichte eine intensive Strahlungsquelle darstellt, sollten Sie es unbedingt vermeiden, in den ungeschwächten Laserstrahl bzw. in gerichtete Reflexionen direkt hineinzuschauen.**

Am Versuchsplatz stehen ein Helium-Neon-Laser, ein Strichgitter (Gitterkonstante  $g = 10^{-5}$  m), ein Spalt, eine Lochblende, eine Sammellinse (Brennweite  $f = 7.8$  cm) mit Abblendschiebern, eine verstellbare Spaltblende, ein Fotodetektor, eine Zylinderlinse und ein Beobachtungsschirm zur Verfügung. Für alle Aufgaben soll die Länge von 2 m der optischen Bank sinnvoll ausgenutzt werden. Da der Laser für eine ausreichend stabile Leistungsabgabe eine Einlaufzeit von mindestens 2 Stunden benötigt, muss Aufgabe 5 zuletzt ausgeführt werden.

Für Aufgabe 1 (Justierung). Die optische Achse der jeweiligen Aufbauten verläuft parallel zur optischen Bank. Bei guter Justierung lässt sich die Lochblende über eine Strecke von mindestens 1 m verschieben, ohne dass der Lichtpunkt des Lasers merklich aus der Lochmitte auswandert.

Für Aufgabe 2 wird der Abstand zwischen dem 0. und dem 2. Beugungsmaximum auf dem Schirm ausgemessen.

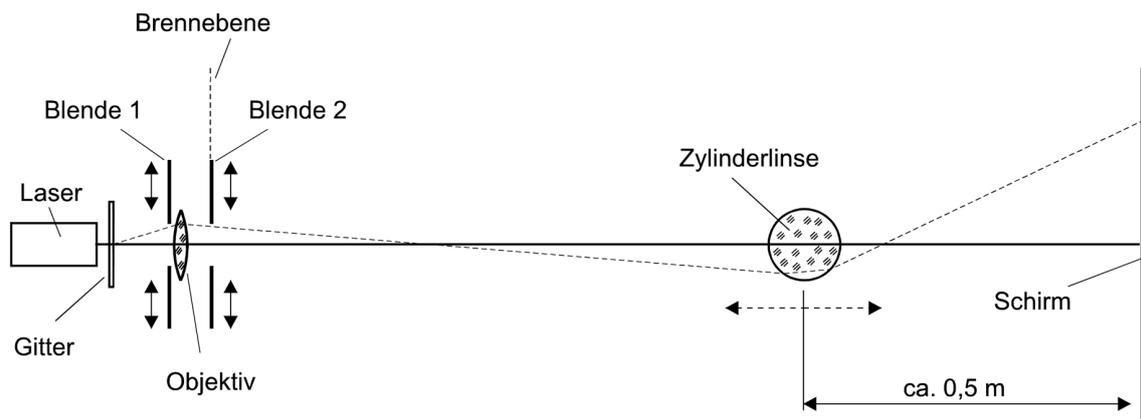


Abbildung 14.3: Aufbau für Aufgabe 4

Für Aufgabe 3 muss die Justierung des fest eingestellten Spaltes sehr sorgfältig erfolgen. Wenn er gut ausgeleuchtet ist, sehen Sie auf dem Schirm symmetrisch zum Zentralbild gleiche Intensitäten und deutliche Minima bis zu hohen Ordnungen (größer 10).

Den prinzipiellen Aufbau für Aufgabe 4 zeigt Abb. 14.3 in der Draufsicht. Die Gegenstandsweite wird wenig größer als die Objektivbrennweite eingestellt und die Blenden werden vollständig geöffnet. Durch die Zylinderlinse erreicht man eine ausreichende Vergrößerung auf der relativ kurzen Bank. Zur Illustration dieser Wirkung ist in Abb. 14.3 ein Strahl als gestrichelte Linie eingezeichnet. Bei alternativ geschlossenen Blenden sind die Beugungsordnungen auf diesen als helle Leuchtflecke deutlich zu sehen. Die in Gl. (14.8) enthaltene Grundaussage gilt als bestätigt, wenn durch schrittweise Ausblendung der an der Abbildung beteiligten Ordnungen *entweder* an Blende 1 *oder* an Blende 2 die Bildstruktur verschwindet, wenn weniger als mindestens zwei Ordnungen zur Abbildung beitragen. Überzeugen Sie sich, dass dies für beliebige Ordnungen gilt, insbesondere, dass auch ohne die nullte Ordnung eine Abbildung erreichbar ist.

Für Aufgabe 5 wird zunächst der Blendendurchmesser mit einem Mikroskop ausgemessen. Zur Ausmessung des Beugungsbildes steht als Detektor eine Fotodiode mit einem 0.3 mm breiten Eintrittsspalt zur Verfügung. Die Fotospannung hat am Eingangswiderstand eines Gleichstromverstärkers einen Stromfluss zur Folge, der der auffallenden Lichtintensität proportional ist. Die transversale Detektorposition ist über einen Stelltrieb auf ein hundertstel Millimeter genau einstellbar. Der Abstand zwischen Lochblende und Eintrittsspalt soll 1500 mm betragen. Beginnen Sie die Messungen nahe dem Zentrum und bewegen Sie den Detektor dann mit der von Ihnen gewählten Schrittweite *über das Zentrum* soweit nach außen, dass außer dem Zentrum wenigstens 4 weitere Ordnungen erfasst werden. Als Schrittweite wird empfohlen: 0.5 mm an den Arbeitsplätzen 1 und 2 und 0.25 mm an den Plätzen 3 und 4. Überprüfen Sie, ob die Messwerte wegen der vorhandenen Grundhelligkeit korrigiert werden müssen. Die theoretische Intensitätsverteilung kann mit dem PC-Programm „Beugung“ berechnet und ausgedruckt werden, wobei die speziellen Versuchsparameter Blendendurchmesser, Abstand Blende-Detektor und die  $x$ -Koordinate des gemessenen nullten Maximums einzugeben sind. Für die grafische Darstellung steht das halblogarithmische Koordinatenpapier Nr. 495 zur Verfügung.

## Fragen

1. Was besagt das Huygens-Fresnelsche Prinzip?
2. Was besagt das Babinetsche Theorem?
3. Welche Zusammenhänge gibt es zwischen der Leistungsfähigkeit optischer Instrumente und der Lichtbeugung?

## Physikalische Grundlagen

Grundbegriffe
Hauptebenen
Abbildungsgleichung
Abbildungsmaßstab
Bildkonstruktion

### 1. Definition der Hauptebenen

Bei dünnen Linsen kann die zweifache Brechung (Vorder- und Rückseite der Linse) durch eine einfache Brechung an der Mittelebene der Linse ersetzt werden. In dem Fall wird die Gegenstandsweite  $g$ , die Bildweite  $b$  und die Brennweite  $f$  von der Linsenmittelebene aus gemessen (Versuch O1). Mit diesen Festlegungen lautet die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (15.1)$$

Diese Vereinfachung ist bei dicken Linsen oder Linsensystemen nicht mehr anwendbar, weil die „Mittelebene“ und damit auch die Größen  $f$ ,  $g$  und  $b$  nicht mehr definiert sind. Man kann jedoch eine Definition dieser Größen derart vornehmen, dass die Abbildungsgleichung (Gl. (15.1)) gültig bleibt. Dazu führt man die so genannten Hauptebenen ein und reduziert die mehrfache Brechung der Strahlen auf die Brechung an diesen Ebenen. Eine einfache Hilfskonstruktion (Abb. 15.1) erläutert, wie man die mehrfache Brechung der Lichtstrahlen im Linsensystem formal durch eine einmalige Brechung ersetzen kann. Dazu zeichnet man zunächst die vom Gegenstand ausgehenden Strahlen bis zur gegenstandsseitigen Hauptebene  $H$ , wobei die Schnittpunkte  $a$  bis  $d$  entstehen. Diese werden durch eine Horizontalverschiebung auf die bildseitige Hauptebene  $H'$  abgebildet ( $a'$  bis  $d'$ ). An der Hauptebene  $H'$  erfolgt dann die Brechung nach den Gesetzen der geometrischen Optik. Dabei werden der gegenstandsseitige Parallelstrahl zum Brennpunktstrahl und der gegenstandsseitige Brennpunktstrahl zum Parallelstrahl. Aus dieser Vorschrift ergibt sich auch die Lage der Hauptebenen: die Schnittpunkte der gegenstandsseitigen Brennpunktstrahlen mit den bildseitigen Parallelstrahlen spannen die gegenstandsseitige Hauptebene  $H$  auf und entsprechend die Schnittpunkte der gegenstandsseitigen Parallelstrahlen mit den bildseitigen Brennpunktstrahlen die bildseitige Hauptebene  $H'$ . Befindet sich ein Gegenstand in der Hauptebene  $H$ , so wird er aufrecht und in gleicher Größe in der Hauptebene  $H'$  abgebildet. Diese Eigenschaft der Abbildung kann nach Gauß zur Definition der Hauptebenen dienen. Die Lage der Hauptebenen hängt von

den Abbildungseigenschaften des Linsensystems ab; sie können innerhalb oder außerhalb des Linsensystems liegen und vertauscht sein.

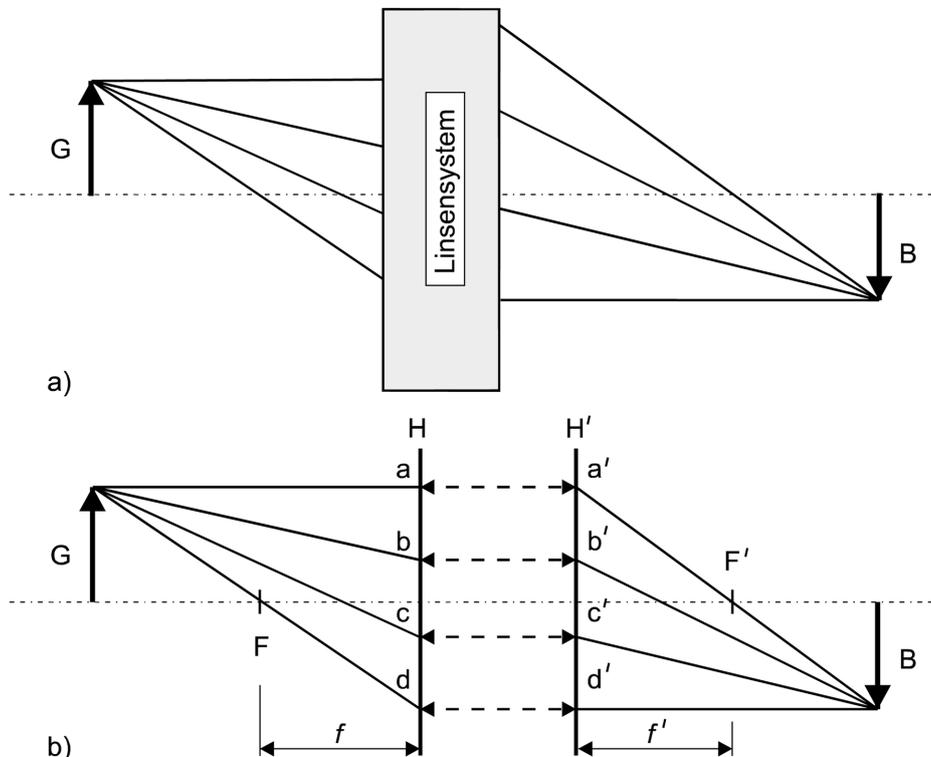


Abbildung 15.1: Definition der Hauptebenen

## 2. Hauptebenen- und Bildkonstruktion

Die Hauptebenen können nur aus dem konkreten Strahlengang in einem Linsensystem ermittelt werden. Für ein Linsensystem, das (z. B.) aus einer dünnen Zerstreuung- und einer dünnen Sammellinse besteht, wird aus dem wahren Strahlengang im System, den man aus der Brechung an den Einzellinsen gewinnt, die Lage der Hauptebenen konstruiert (Abb. 15.2). Man erhält sie, wie oben erläutert, aus den Schnittpunkten der einfallenden und ausfallenden Strahlen. Mit der Kenntnis der Lage der Hauptebenen und der Brennpunkte ist eine einfache Bildkonstruktion möglich (Abb. 15.3). Die Bildkonstruktion führt man -wie bei dünnen Linsen- zweckmäßigerweise mit Hilfe zweier der drei Hauptstrahlen (Brennpunkt-, Parallel-, Mittelpunktstrahl) aus. Die vom Gegenstand ausgehenden Strahlen werden bis zur gegenstandsseitigen Hauptebene  $H$  gezeichnet und dann, um den Raum zwischen  $H$  und  $H'$  versetzt, an  $H'$  gebrochen. Es muss aber ausdrücklich betont werden, dass die Brechung der Lichtstrahlen an den Hauptebenen nur eine sehr praktische, für beliebig komplizierte Linsensysteme anwendbare Hilfskonstruktion darstellt und mit dem wirklichen Strahlengang nicht übereinstimmt. Wie die Brennweite werden auch die Gegenstands- und Bildweite von der jeweiligen Hauptebene aus gemessen. Unter dieser Voraussetzung gilt (Gl. (15.1)).

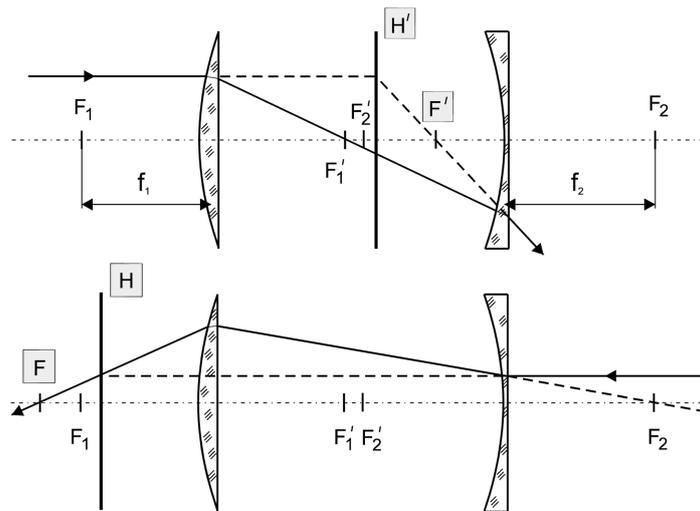


Abbildung 15.2: Hauptebenenkonstruktion

### 3. Methode nach Abbe

Experimentell kann die Brennweite  $f$  und die Lage der Hauptebenen  $H$  und  $H'$  nach dem Verfahren nach Abbe ermittelt werden. Aus der Abbildungsgleichung (Gl. (15.1)) ergibt sich mit dem Abbildungsmaßstab  $\gamma = B/G = b/g$  die Beziehung

$$g = f \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right). \quad (15.2)$$

Da die Lage von  $H$  nicht bekannt ist, kann  $g$  nicht gemessen werden. Wir wählen deshalb für die Messung als vorläufigen Bezugspunkt eine willkürliche Kante  $K$  am Linsensystem und benutzen die in Abb. 15.4 angegebenen Bezeichnungen. Die Abstände  $c$  und  $c'$  der Kante  $K$  von den Hauptebenen können sowohl negativ als auch positiv sein. In Abb. 15.4 sind  $c$  und  $c'$  positiv. Negatives Vorzeichen bedeutet, dass  $H$  bzw.  $H'$  auf der anderen Seite von  $K$  liegen. Der Abstand Gegenstand-Kante  $x = g + c$  kann gemessen werden. Damit folgt aus Gl. (15.2)

$$x = f \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right) + c. \quad (15.3)$$

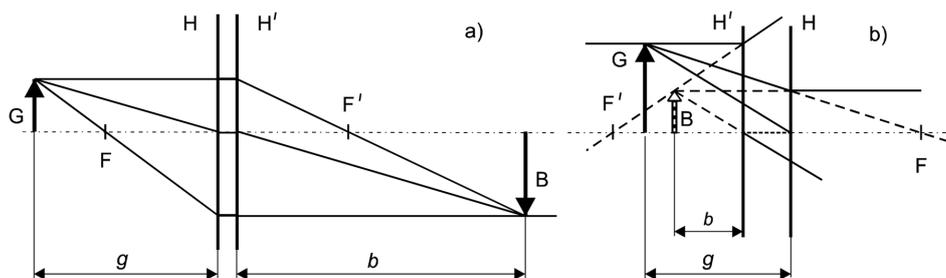


Abbildung 15.3: Bildkonstruktion a) sammelndes, b) zerstreues System

Aus der Abhängigkeit  $x$  als Funktion von  $1+1/\gamma$  können  $f$  und  $c$  bestimmt werden. Wird das ganze Linsensystem um  $180^\circ$  gedreht, so vertauschen die beiden Hauptebenen ihre Lage. Nimmt man zur Ablesung die gleiche Marke  $K$  wie vorher, dann ist der Abstand Gegenstand-Kante jetzt  $x' = g' + c'$ . Aus der zur Gl. (15.3) analogen Gleichung

$$x' = f \left( 1 + \frac{1}{\gamma'} \right) + c' \quad (15.4)$$

können diesmal  $f$  und  $c'$  bestimmt werden. Der Hauptebenenabstand ergibt sich aus

$$a = c + c'. \quad (15.5)$$

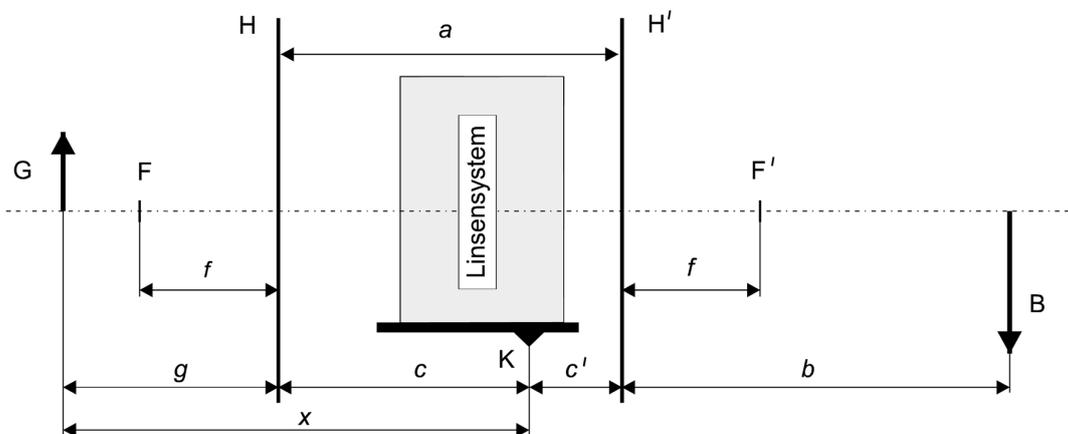


Abbildung 15.4: Methode nach Abbe

## Aufgaben

1. Die Brennweiten zweier Linsen eines Linsensystems sind nach der Bessel-Methode (Linse Nr. 2) und mittels Messungen mit dem Sphärometer (Linse Nr. 3) zu bestimmen.
2. Für das Linsensystem sind nach der Methode nach Abbe die Brennweite  $f$ , der Hauptebenenabstand  $a$  und die Lage der Hauptebenen zu bestimmen.
3. Mit den aus Aufgabe 1 ermittelten Brennweiten der Einzellinsen konstruiere man die Hauptebenen und die Brennpunkte des Linsensystems (Maßstab 1:2) und vergleiche die Ergebnisse mit denen der Aufgabe 2.

## Versuchsdurchführung

Aufgabe 1: Die Bestimmung der Brennweiten der Einzellinsen nach Bessel und mit dem Sphärometer ist in der *Anleitung zum Versuch O1* (Dünne Linsen) beschrieben.

Für Aufgabe 2 werden die Linsen in der vom Assistenten vorgegebenen Weise auf dem Reiter befestigt. Der Linsenabstand  $d$  ist damit festgelegt. Der Gegenstand (beleuchtete mm-Skala) wird durch das Linsensystem auf den Schirm projiziert. Zur Bestimmung des Abbildungsmaßstabes  $\gamma$  sind auf dem Schirm zwei horizontale Strichmarken im Abstand von  $(20.0 \pm 0.5)$  mm angebracht. Bei verschiedenen Abständen des Linsensystems vom Gegenstand wird der Schirm so lange verschoben, bis ein scharfes Bild der Skala entsteht. Man bestimme  $\gamma$  für 10 verschiedene Abstände, wobei sich  $\gamma$  in den Grenzen  $1 \leq \gamma \leq 6$  bewegen soll.

Danach drehe man das Linsensystem mit Montagefuß um  $180^\circ$  und wiederhole die Messungen zur Bestimmung von  $x'$  und  $\gamma'$ . Es ist darauf zu achten, dass immer dieselbe Kante des Montagefußes benutzt wird. Die Auswertung der gemessenen Abhängigkeiten  $x$  als Funktion von  $1 + 1/\gamma$  (Gl. (15.3)) und  $x'$  als Funktion von  $1 + 1/\gamma'$  (Gl. (15.4)) kann zweckmäßig durch Geradenausgleich (grafisch oder besser mit einem geeigneten PC-Programm, z.B. „GERA“) erfolgen.

## Fragen

1. Welche Lage haben die Hauptebenen im Fall einer dünnen Linse?
2. Was ist zu beachten, wenn ein Immersionssystem vorliegt?
3. Welche Verfahren zur Brennweitenmessung kennen Sie?
4. Wie misst man zweckmäßig die Brennweite einer Zerstreuungslinse?

---

---

# O11 Polarisation durch Reflexion an Glas

---

---

## Physikalische Grundlagen

Grundbegriffe
Reflexionsgesetz
Brechungsgesetz
Polarisation
Fresnelsche Formeln
Reflexionsvermögen
Brewsterwinkel

Fällt Licht auf eine Grenzfläche, die von zwei schwach absorbierenden, aneinander stoßenden Medien mit den unterschiedlichen Brechungsindizes  $n_1$ ,  $n_2$  gebildet wird (z. B. Luft-Glas), so findet eine Aufspaltung des Strahlenganges in einen durchgehenden (gebrochenen) und einen reflektierten Lichtanteil statt. Ist  $\alpha_e$  der Einfallswinkel (Abb. 16.1),  $\alpha_r$  der Reflexionswinkel und  $\alpha_g$  der Brechungswinkel der entsprechenden Teillichtbündel, so gelten die Beziehungen:

$$\alpha_e = \alpha_r \quad \text{Reflexionsgesetz} \quad (16.1)$$

$$n_1 \sin \alpha_e = n_2 \sin \alpha_g \quad \text{Brechungsgesetz} \quad (16.2)$$

Beide Gesetze liefern Aussagen über die Richtung der Lichtbündel, nicht aber über ihre Intensitäten  $I_r$  und  $I_g$ . Die Berechnung der Intensitäten für das durchgehende und das reflektierte Licht führt über die Fresnelschen Formeln<sup>1</sup>. Die Formeln für das hier interessierende reflektierte Licht lauten

$$E_{rs} = -E_{es} \frac{\sin(\alpha_e - \alpha_g)}{\sin(\alpha_e + \alpha_g)} \quad (16.3a)$$

$$E_{rp} = E_{ep} \frac{\tan(\alpha_e - \alpha_g)}{\tan(\alpha_e + \alpha_g)}. \quad (16.3b)$$

Der Index  $s$  steht für linear polarisiertes Licht, dessen elektrischer Feldstärkevektor  $E$  senkrecht zur Einfallsebene schwingt. Der Index  $p$  steht entsprechend für linear polarisiertes Licht, dessen elektrischer Feldstärkevektor  $E$  in der Einfallsebene (d.h. parallel zu dieser) schwingt. Das Verhältnis der Intensitäten  $I_r$  und  $I_e$  des reflektierten und einfallenden Lichts bezeichnet man als Reflexionsvermögen

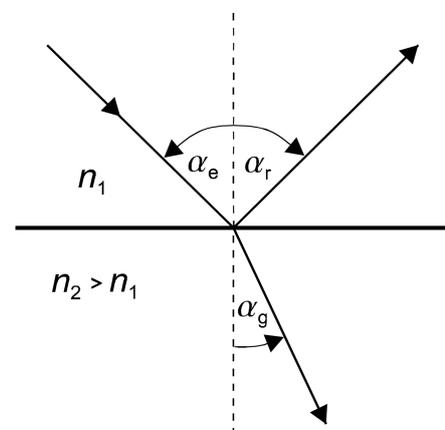


Abbildung 16.1: Brechung und Reflexion

<sup>1</sup>siehe hierzu z.B. Demtröder Bd. II oder Bergmann-Schaefer Bd. II

R. Damit folgt mit den Gleichungen (16.3) wegen  $I \sim E^2$  für das Reflexionsvermögen für die zur Einfallsebene senkrechte bzw. parallele Lichtkomponente

$$R_s = \frac{I_{rs}}{I_{es}} = \frac{E_{rs}^2}{E_{es}^2} = \frac{\sin^2(\alpha_e - \alpha_g)}{\sin^2(\alpha_e + \alpha_g)} \quad (16.4a)$$

$$R_p = \frac{I_{rp}}{I_{ep}} = \frac{E_{rp}^2}{E_{ep}^2} = \frac{\tan^2(\alpha_e - \alpha_g)}{\tan^2(\alpha_e + \alpha_g)}. \quad (16.4b)$$

In Abb. 16.2 sind die Quadratwurzeln des Reflexionsvermögens  $R$  für beide Komponenten für die Kombination Luft ( $n_1 = 1$ ) und Kronglas ( $n_2 = 1.5$ ) in Abhängigkeit vom Einfallswinkel dargestellt. Folgende Spezialfälle sind interessant:

1. Senkrechter Einfall Bei senkrechtem Einfall ist das Reflexionsvermögen für beide Komponenten gleich und die Fresnelschen Formeln liefern für  $\alpha_e = 0$ :

$$R_s = R_p = R = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2. \quad (16.5)$$

So ist z.B. für die Kombination Luft/Kronglas das Reflexionsvermögen  $R = (0.5/2.5)^2 = 0.04$ , d.h. nur 4% der einfallenden Intensität werden reflektiert, der weitaus größte Teil tritt durch die Grenzfläche in das Medium 2 ein.

2. Brewsterwinkel Unter einem bestimmten Einfallswinkel  $\alpha_B$ , dem so genannten Brewsterwinkel, wird das Reflexionsvermögen  $R_p$  für die Parallelkomponente Null (Abb. 16.2). Fällt natürliches (unpolarisiertes) Licht unter diesem Winkel auf die Grenzfläche, so ist das reflektierte Licht vollkommen linear polarisiert, und zwar senkrecht zur Einfallsebene. Es soll an dieser Stelle aber darauf hingewiesen werden, dass für die Praxis Polarisationsverfahren (d.h. Erzeugung von polarisiertem Licht aus natürlichem Licht) mit geringeren Lichtverlusten zur Verfügung stehen (z.B. Nicolsches Prisma). Man erkennt aus Gl. (16.4b), dass das Reflexionsvermögen für die Parallelkomponente genau für den Einfallswinkel  $\alpha_e = \alpha_B$  Null wird, für den  $\alpha_B + \alpha_g = 90^\circ$  wird. Hieraus und aus dem Brechungsgesetz Gl. (16.2) folgt für den Brewsterwinkel

$$\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}. \quad (16.6)$$

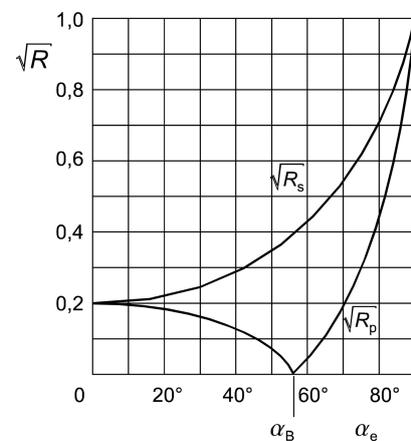


Abbildung 16.2: Quadratwurzeln des Reflexionsvermögens

## Aufgaben

1. Messung der Intensitäten des reflektierten Strahls für parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Licht im  $\alpha_e$ -Bereich von  $5^\circ$  bis  $85^\circ$  in Schritten von  $2.5^\circ$ .
2. Grafische Darstellung der Quadratwurzeln des Reflexionsvermögens  $R_s$  und  $R_p$  als Funktion des Einfallswinkels  $\alpha_e$  und Entnahme des Brewsterwinkels  $\alpha_B$  aus der Darstellung.
3. Bestimmung des Brechungsindex des Glases.

4. Berechnung der theoretischen Kurven  $\sqrt{R} = f(\alpha_e)$  und Eintrag in die Darstellung der experimentellen Ergebnisse (Aufgabe 2).

## Versuchsdurchführung

Den Aufbau der Versuchsanordnung zeigt Abb. 16.3. Aus der Laserdiode der Lichtquelle LQ tritt ein ausreichend paralleles Lichtbündel aus, welches bereits senkrecht zur Einfallsebene der Anordnung polarisiert ist. Das Licht passiert zunächst die zwei um die optische Achse des Systems drehbaren Polarisationsfilter PF1 und PF2 und trifft anschließend auf die als Reflektor R dienende Planfläche einer halbierten Zylinderlinse Z. Die Drehwinkeleinstellung der Polarisatoren erfolgt anhand der Winkelskalen auf den Polarisatoren und feststehenden Marken M auf der Halterung.

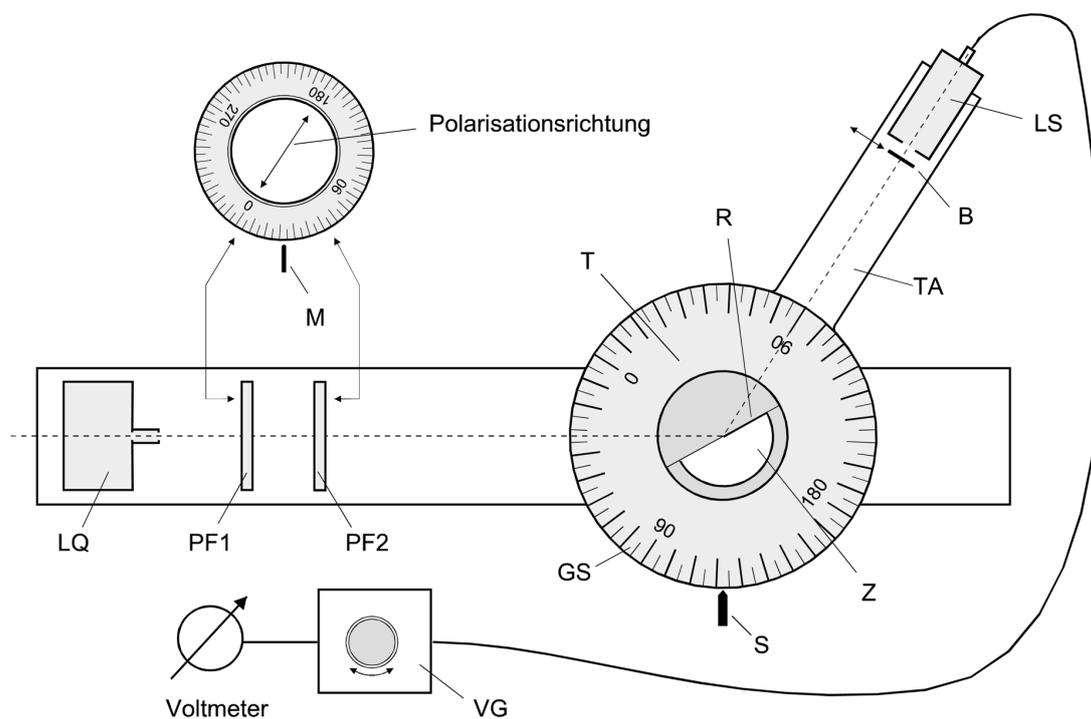


Abbildung 16.3: Versuchsanordnung

Senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Licht ergibt sich für die Winkeleinstellungen  $0^\circ$  oder  $180^\circ$ . Der in diesem Versuch interessierende reflektierte Lichtanteil wird von einem Lichtsensor LS aufgenommen, dessen Tragarm TA um die senkrecht zur optischen Achse verlaufende Achse des Tisches T geschwenkt werden kann und dessen Winkelstellung auf einer Gradskala GS an der Strich-Markierung S ablesbar ist. Um dieselbe Achse wird der Reflektor R so gedreht, dass das reflektierte Licht in die Mitte der Sensoröffnung eintritt. Hierbei muss der Reflektor R (also die Planfläche der Linse) fest an der Stufe seiner drehbaren Auflage anliegen. In diesem Fall ist der eingestellte Einfallswinkel genau die Hälfte des an der Gradskala GS ablesbaren Winkels.

Zur präzisen Einstellung des Lichtstrahls auf die Mitte der Sensoröffnung dient eine ein-schwenkbare Blende B, welche nach der Einstellung wieder aus dem Strahlengang herausgeschwenkt wird. Dieser Vorgang ist bei jeder neuen Winkeleinstellung zu wiederholen. Dabei ist darauf zu achten, dass beim Herausschwenken der Blende die Winkeleinstellung des Sensorarmes nicht verändert wird. Die Lichtsensoranordnung liefert ein zur Lichtintensität proportionales

Spannungssignal von etwa 5 V bei Vollaussteuerung. Die Messungen müssen nicht unbedingt bei völliger Dunkelheit, aber im stark abgedunkelten Raum stattfinden. Vor Ausführung der Messungen sind einige Justier- und Einstellarbeiten erforderlich. Zuerst wird der Drehwinkel von Filter PF1 auf 45° eingestellt, mit dem Filter PF2 die gewünschte Polarisationsrichtung ausgewählt und der Sensortragarm TA an der Skale GS genau auf 180° geschwenkt. Der Laserstrahl wird bei entferntem Reflektor R vermittels der Stellschrauben am Halter der Laserdiode und mit Hilfe der eingeschwenkten Blende B auf die Mitte der Sensoreintrittsöffnung justiert.

Anschließend muss die Ausgangsspannung der Lichtsensoranordnung *bei unterbrochenem Lichtstrahl* mit dem Drehknopf am Versorgungsgerät VG des Sensors auf 0 V einjustiert werden. Hierdurch wird ein gerätebedingter Offset des Sensors und ein Untergrundsignal (Resthelligkeit des Raumes) kompensiert. Zum Abschluss wird bei freigegebenem Lichtstrahl und herausgeschwenkter Blende B durch Drehen des Filters PF1 die einfallende Intensität  $I_e$  so ausgewählt, dass die Sensorausgangsspannung  $U_e$  etwa 4.5 V beträgt. Bei dieser Vorwahl vermeidet man einerseits eine Übersteuerung und erreicht andererseits die größte Empfindlichkeit der Sensoranordnung.

Für Aufgabe 4 ergibt sich das Reflexionsvermögen nach

$$R(\alpha_e) = \frac{I_r(\alpha_e)}{I_e} = \frac{U_r \alpha_e}{U_e}.$$

## Fragen

1. Die Laserdiode liefert senkrecht zur Einfallsebene der Messanordnung polarisiertes Licht. Im Versuch soll bei geeigneter Winkelstellung der Polarisationsfilter PF1 und PF2 auch mit parallel zur Einfallsebene polarisiertem Licht gemessen werden, dessen Intensität außerdem durch Drehen von einem der Polarisationsfilter variiert werden kann. Wie kann man das verstehen?
2. Was besagen die Fresnelschen Formeln und auf welchen physikalischen Erscheinungen beruhen sie?
3. Welche Aussagen können Sie über die Polarisation des gebrochenen Strahls machen?
4. Welche anderen Methoden zur Erzeugung von polarisiertem Licht gibt es?



## Impressum

Autor: Dr. Uwe Müller  
Satz: Carlo Barth, gesetzt mit L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>  
Fotos Titelseite: Yvonne Szag