

M10 GYROSKOP

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Wichtige Grundbegriffe: Drehimpulserhaltungssatz, Kreisel, Figuren-, Drehimpuls- und momentane Drehachse, Präzession und Nutation

1. Begriff des Kreisels: Ein Kreisel ist ein rotierender starrer Körper, der in einem Punkt festgehalten ist oder (allgemeiner) dessen Bewegung um einen Punkt getrennt von der Bewegung dieses Punktes behandelt werden kann. Kreisel treten in der Technik als rotierende Maschinenteile vielfältig auf. In der Natur können z.B. Moleküle oder rotierende Himmelskörper als Kreisel behandelt werden.

Wichtigste Grundlage für die Kreiselbewegung ist die Grundgleichung der Rotationsbewegung

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (1)$$

wonach sich der Drehimpuls \vec{L} nur verändert, wenn ein äußeres Drehmoment \vec{M} auf den Körper einwirkt. Die eigentümlichen und im allgemeinen Fall nicht einfach zu überschauen Bewegungsverläufe von Kreiseln sind auf diese Grundgleichung zurückzuführen.

Zur Vereinfachung der Darstellung beschränken wir uns hier in der Betrachtung auf symmetrische Kreisel, bei denen zwei der drei Hauptträgheitsmomente (s. Versuch M2) gleich sind: Bezogen auf das körperfeste Koordinatensystem der Hauptträgheitsachsen sei $J_x \neq J_y = J_z$. In diesem Fall ist die x-Achse die sog. *Figurenachse* des Kreisels.

2. Nutation des kräftefreien Kreisels: Ein Kreisel ist kräftefrei, wenn auf ihn kein äußeres Drehmoment wirkt. Dann folgt aus der Grundgleichung der Rotationsbewegung (1) der Drehimpulserhaltungssatz mit

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \text{ bzw. } \vec{L} = \text{const.} \quad (2)$$

Der Drehimpulsvektor \vec{L} ist nach Betrag und Richtung zeitlich konstant. Die einfachste Bewegung ist eine Rotation um die Figurenachse. Hier ist $\vec{L} = J_x \vec{\omega}$ und $\vec{\omega}$, wie auch \vec{L} , raumfest und fällt mit der Richtung von \vec{L} und der ebenfalls raumfesten Figurenachse (hier die x-Achse) zusammen (Abb.1a).

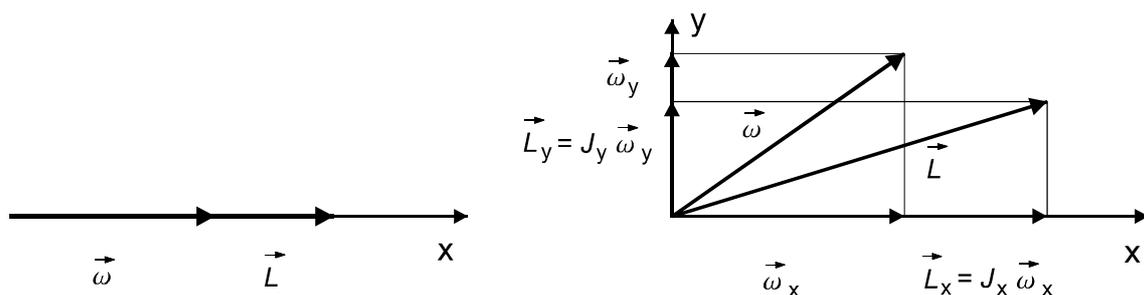


Abb. 1 a) Rotation um die Figurenachse b) Allgemeiner Fall der Rotation

Wird der Kreisel in dieser Bewegungsform gestört, wie z.B. durch einen kurzen seitlichen Schlag, oder rotiert er von vornherein nicht um die Figurenachse, so tritt die sog. *Nutationsbewegung* auf. Wegen

$$\vec{L} = J_x \vec{\omega}_x + J_y \vec{\omega}_y + J_z \vec{\omega}_z. \quad (3)$$

sind \vec{L} und $\vec{\omega}$ nicht mehr parallel. In Abb. 1b wird das für einen bestimmten Zeitpunkt der Bewegung ($\vec{\omega}_z = 0$) gezeigt. Jetzt ist $\vec{\omega}$ nicht mehr raumfest. Das Gleiche gilt auch für die Figurenachse, die dann weder parallel zu \vec{L} noch zu $\vec{\omega}$ ist. Da $\vec{\omega}$ auch nicht körperfest ist,

M10 GYROSKOP

wird die Drehachse *momentane Drehachse* genannt; sie verändert ständig ihre Lage im Körper. Momentane Drehachse und Figurenachse rotieren mit der Nutationswinkelgeschwindigkeit ω_N um die raumfeste Drehimpulsachse und beschreiben dabei Kreiskegel (Abb. 2), die symmetrisch zur Drehimpulsachse liegen.

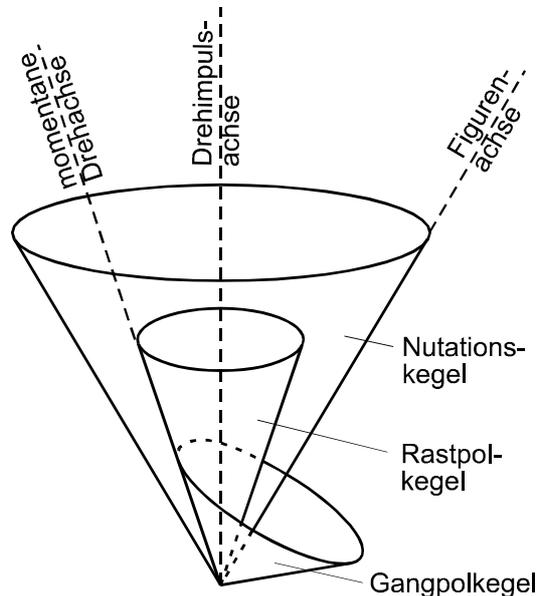


Abb. 2 Kräftefreier Kreisel

Die Bewegung kann man sich veranschaulichen durch das Abrollen des sog. *Gangpolkegels*, dessen Symmetrieachse die Figurenachse ist, am sog. *Rastpolkegel*, der die Drehimpulsachse zur Symmetrieachse hat. Die Berührungslinie zwischen beiden Kegeln ergibt die Lage der momentanen Drehachse. Wie man aus dieser Darstellung sieht, liegen die drei Achsen stets in einer (sich mit der Nutationswinkelgeschwindigkeit ω_N im Raum drehenden) Ebene. Abb. 2 beschreibt die Verhältnisse für einen abgeplatteten Kreisel ($J_x > J_y = J_z$). Im Fall des verlängerten Kreisels gilt $J_x < J_y = J_z$, dann rollt der Gangpolkegel mit seiner Außenseite am Rastpolkegel ab. Wie man sich leicht klar machen kann, liegt dann die momentane Drehachse zwischen Drehimpuls- und Figurenachse.

Die Nutationswinkelgeschwindigkeit ω_N erhält man durch folgende Überlegung: Aus (3) folgt mit $J_y = J_z = J_s$ sowie $\vec{\omega} = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y + \vec{\omega}_z$ und Auflösung nach $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{L}}{J_s} + \left(1 - \frac{J_x}{J_s}\right) \cdot \vec{\omega}_x. \quad (4)$$

Dieser Ausdruck stellt eine Komponentenzerlegung von $\vec{\omega}$ in Richtung \vec{L} und in x-Richtung dar. Die erste Komponente ist die Nutationswinkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega}_N = \frac{\vec{L}}{J_s}. \quad (5)$$

3. Präzession des Kreisels unter Einwirkung äußerer Drehmomente: Wirkt auf einen Kreisel ein äußeres Drehmoment \vec{M} , so ändert sich sein Drehimpuls nach (1) in

$$d\vec{L} = \vec{M}dt. \quad (6)$$

Zerlegt man $d\vec{L}$ in die beiden Komponenten $d\vec{L}_{\parallel}$ und $d\vec{L}_{\perp}$ (Abb.3), dann liegt die Komponente $d\vec{L}_{\parallel}$ parallel zum Drehimpulsvektor \vec{L} und vergrößert dadurch die Winkelgeschwindigkeit. Beispielsweise erhöht sich die Drehzahl eines Elektromotors, wenn durch die Erhö-

M10 GYROSKOP

hung der Spannung die am Anker (Kreisel) angreifenden magnetischen Drehmomente wachsen.

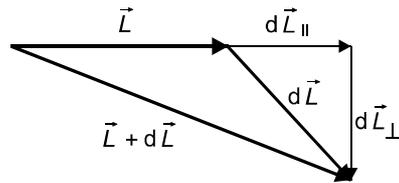


Abb.3 Drehimpulszerlegung

Die Komponente $d\vec{L}_\perp$ steht senkrecht auf dem Drehimpulsvektor \vec{L} und bewirkt, dass sich die Richtung von \vec{L} ändert - der Kreisel *präzediert*. Diese Bewegung lässt sich anschaulich mit dem sog. *Gyroskop* zeigen.

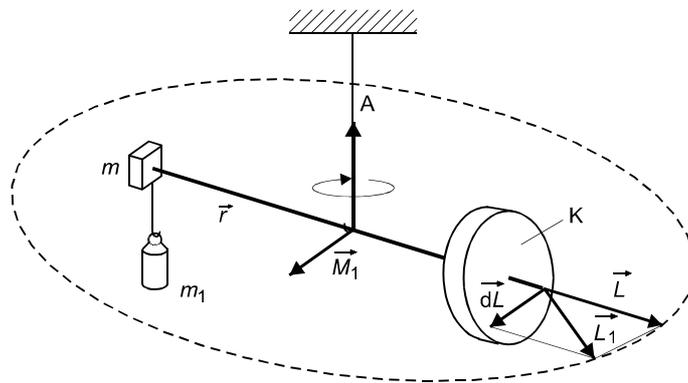


Abb. 4 Gyroskop (Prinzip)

Das Gyroskop (Abb. 4) ist vom Prinzip her ein *kardanischer Kreisel*, auf den man ein zusätzliches äußeres Drehmoment, das eine Präzessionsbewegung des Kreisels hervorruft, wirken lassen kann.

Betrachten wir zunächst die Bewegung bei fehlendem äußerem Drehmoment. Das wäre in Abb. 4 der Fall, wenn sich die entgegengesetzten Drehmomente der Kreiselscheibe und der Ausgleichsmasse m kompensieren (für $m_1 = 0$ folgt $\vec{M}_1 = 0$). In diesem Fall ist die Schwerkraft vollständig kompensiert und die als Waage aufgebaute Anordnung im Gleichgewicht. Der Kreisel soll mit dem Drehimpuls \vec{L} um die Figurenachs rotieren. Nach dem Drehimpulserhaltungssatz sind \vec{L} und damit auch die Figurenachs raumfest.

Erzeugt man durch eine Zusatzmasse m_1 ein zusätzliches Drehmoment $\vec{M}_1 = \vec{r} \times (m_1 \vec{g})$, das aufgrund der Anordnung senkrecht auf dem Drehimpulsvektor \vec{L} steht, so muss dieser seine Richtung fortlaufend ändern und die ganze Anordnung dreht sich mit der Präzessionswinkelgeschwindigkeit ω_p um die Achse A.

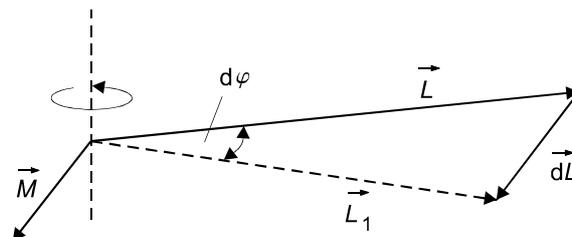


Abb. 5 Präzession

Für die zeitliche Änderung $d\phi$ ergibt sich (s. Abb. 5) $d\phi = dL/L = M \cdot dt/L$ und daher

M10 GYROSKOP

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L}. \quad (7)$$

4. Bestimmung der Hauptträgheitsmomente: Aus Messungen der Nutationsperiode T_N und der Präzessionsperiode T_p können die Hauptträgheitsmomente J_x und J_s des Kreisel wie folgt bestimmt werden: Aus (7) folgt mit $L = \omega_x J_x$ und $\omega_x = 2\pi \cdot n$ (n als Kreiseldrehzahl) für die Periodendauer der Präzession

$$T_p = \frac{4\pi^2 J_x n}{M}, \quad (8)$$

woraus J_x berechnet werden kann. Auf die Bestimmung von J_s führt folgende Überlegung: Durch einen seitlichen Stoß auf die Kreiselachse zur Einleitung der Nutation wird der Drehimpuls (besonders in seiner Richtung) etwas verändert. Es gilt Formel (3), die, multipliziert mit dem Einheitsvektor in x-Richtung (Figurenachse!), $L \cdot \cos\delta = J_x \omega_x$ ergibt. Dabei ist δ der halbe Öffnungswinkel des Nutationskegels. Mit der Näherung $\cos(\delta) \approx 1$ für kleine Winkel folgt aus (5) die Periodendauer der Nutationsbewegung mit

$$T_N = \frac{J_s}{J_x} \cdot \frac{1}{n}, \quad (9)$$

woraus nun J_s berechnet werden kann.

AUFGABEN

1. Messung der Periodendauer T_p der Präzession für 10 verschiedene Drehmomente bei einer Kreiseldrehzahl $n = 12 \text{ s}^{-1}$, grafische Darstellung $T_p = f(1/M)$ gemäß (8) und Bestimmung des Trägheitsmomentes J_x .
2. Messung der Periodendauer T_p der Präzession für 10 verschiedene Kreiseldrehzahlen im Bereich zwischen $n = 7 \text{ s}^{-1}$ und $n = 16 \text{ s}^{-1}$ bei festem Drehmoment (mit einem Massestück $m = 200 \text{ g}$), grafische Darstellung $T_p = f(n)$ nach (8) und Bestimmung des Trägheitsmomentes J_x .
3. Messung der Periodendauer T_N der Nutation am präzessionsfreien Kreisel für 10 verschiedene Kreiseldrehzahlen im Bereich von $n = 4 \text{ s}^{-1}$ bis $n = 12 \text{ s}^{-1}$, grafische Darstellung $T_N = f(1/n)$ nach (9) und Bestimmung des Trägheitsmomentes J_s .
4. Näherungsweise Berechnung des Trägheitsmomentes J_x des Gyroskops und Vergleich mit den experimentellen Werten aus den Aufgaben 1 und 2.
5. Vergleich des experimentellen Wertes für J_s (Aufgabe 3) mit dem Sollwert
Versuchsplatz 1: $(9,0 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$ Versuchsplatz 2: $(8,7 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$
Versuchsplatz 3: $(9,1 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$ Versuchsplatz 4: $(9,7 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$
als *obligatorische* Aufgabe. Ggf. *freiwillig* selbständige Berechnung dieser Sollwerte.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Der Versuchsaufbau im Praktikum (Abb. 6) ist eine Realisierung des oben beschriebenen Gyroskops. Der Kreisel K ist an einem Ende des Waagebalkens W so angebracht, dass seine Figurenachse mit der Richtung des Waagebalkens zusammenfällt. Der Kreisel wird über eine Reibradkupplung mit Gummiring durch einen kleinen Elektromotor M mit einstellbarer Drehzahl angetrieben. Die Drehzahl kann mit einer Lichtschrankenordnung LS und nachgeschaltetem Digitalzähler gemessen werden. Hierbei erfolgt die Signalübertragung vom beweglich aufgehängten Teil des Gyroskops auf den ortsfesten Teil des Übertragungssystems zum Anzeigegerät optoelektronisch vermittelt Leuchtdiode, Lichtleiter und Fototransistor. Der Waagebalken ist in einem Gelenk drehbar um die Achse B aufgehängt. Das Gelenk selbst

M10 GYROSKOP

und damit der ganze Aufbau ist zusätzlich um die Achse A leicht drehbar gelagert. Auf der anderen Seite des Waagebalkens befinden sich ein verschiebbares Tariergewicht TG und eine Aufnahme für auswechselbare Massestücke MS. Die Massestücke im Bereich von $m = 50\text{ g}$ bis $m = 500\text{ g}$ sind 50 g-weise gestuft. Bei zunächst nicht aufgesteckten Massestücken kann die Anordnung durch Verschieben des Tariergewichtes TG so austariert werden, dass sie im Schwerpunkt unterstützt ist und folglich keine Drehmomente auf den Kreisel wirken. Der rotierende Kreisel behält seine Figurenachse (=Drehimpulsachse) im Raum bei. Durch Aufstecken der Massestücke MS mit bekannter Masse m können jetzt definierte Drehmomente erzeugt und damit die Präzession eingeleitet werden.

Achtung: Alle Drehzahländerungen am Motor müssen langsam vorgenommen werden, um die empfindliche Reibradkupplung zu schonen!

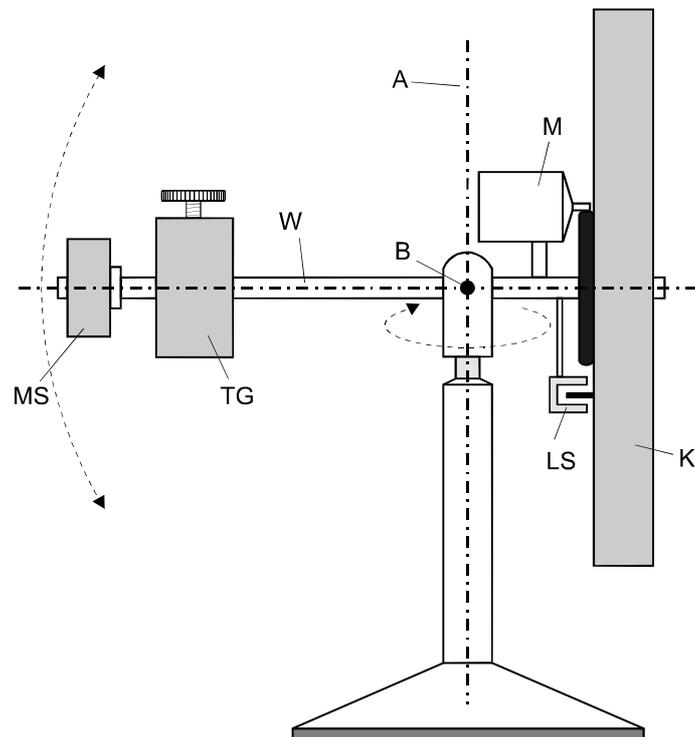


Abb. 6 Versuchsanordnung

Für die **Aufgaben 1 bis 3** werden die Periodendauern T_P und T_N mit einer elektronischen Handstoppuhr gemessen. Die Messung der für die Auswertung erforderlichen geometrischen Daten erfolgt mit einem Messschieber. Die Nutationsbewegung (**Aufgabe 3**) wird am gut austarierten Gyroskop durch einen leichten Stoß gegen den Waagebalken eingeleitet. Die Messung von T_N ist wegen der relativ schnell abklingenden Nutation bei hoher Nutationsfrequenz etwas schwierig und sollte deshalb zunächst ein wenig trainiert werden.

Zur näherungsweisen Berechnung des Trägheitsmomentes J_x (**Aufgabe 4**) wird der Kreisel (nur gedanklich!) in zweckmäßig gewählte Hohlzylinder zerlegt, deren Trägheitsmomente summiert werden. Das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders mit dem Innenradius r_1 und dem Außenradius r_2 , der Höhe h und der Dichte ρ bezüglich seiner Symmetrieachse ergibt sich aus

$$J = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot h \cdot (r_2^4 - r_1^4).$$

M10 GYROSKOP

Für **Aufgabe 5** werden analog wie bei Aufgabe 4 die Trägheitsmomente aller zu J_s beitragenden Zylinder und Hohlzylinder, hier aber bzgl. der relevanten Drehachse **B** (Abb. 6), addiert. Bezeichnet man den Abstand zwischen der Drehachse **B** und der zu **B** parallelen Schwerpunktachse eines Hohlzylinders mit **s**, so beträgt sein (äquatoriales) Trägheitsmoment

$$J = \rho \cdot \pi \cdot h \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot \left\{ \frac{1}{4} (r_2^2 + r_1^2) + \frac{h^2}{12} + s^2 \right\}.$$

Zusätzliche Angaben:

Dichte von Messing $\rho_M = 8,4 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}$

Dichte von Eisen $\rho_{Fe} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}$.

FRAGEN

1. Was versteht man unter den Hauptträgheitsmomenten eines starren Körpers?
2. Welchen Einfluss hat das Trägheitsmoment des Motorankers auf das Messergebnis für J_x ?
3. Welche Anwendungen des Kreiselprinzips in der Technik kennen Sie?