

# M10 GYROSKOP

## PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

**Grundbegriffe: Drehimpulserhaltungssatz, Kreisel, Figuren-, Drehimpuls- und momentane Drehachse, Präzession und Nutation**

1. Begriff des Kreisels: Ein Kreisel ist ein rotierender starrer Körper, der in einem Punkt festgehalten ist oder, allgemeiner, dessen Bewegung um einen Punkt getrennt von der Bewegung dieses Punktes behandelt werden kann. Kreisel treten in der Technik als rotierende Maschinenbauteile vielfältig auf. In der Natur können z.B. Moleküle oder rotierende Himmelskörper als Kreisel behandelt werden.

Grundlage für die Kreiselmovement ist die Grundgleichung der Rotationsbewegung:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (1)$$

wonach sich der Drehimpuls  $\vec{L}$  nur verändert, wenn ein äußeres Drehmoment  $\vec{M}$  auf den Körper einwirkt. Die eigentümlichen und im allgemeinen Fall nicht einfach zu überschauenden Bewegungsabläufe von Kreiseln sind auf diese Grundgleichung zurückzuführen.

Zur Vereinfachung der Darstellung beschränken wir uns bei den folgenden Ausführungen auf symmetrische Kreisel, bei denen zwei der drei Hauptträgheitsmomente (siehe Versuch M2) gleich sind: Bezogen auf das körperfeste Koordinatensystem der Hauptträgheitsachsen sei  $J_x \neq J_y = J_z$ . In diesem Fall ist die x-Achse die sog. Figurenachse des Kreisels.

2. Nutation des kräftefreien Kreisels: Ein Kreisel heißt kräftefrei, wenn auf ihn kein äußeres Drehmoment wirkt. In diesem Fall folgt aus der Grundgleichung der Rotationsbewegung (Gl. (1)) der Drehimpulserhaltungssatz

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{const.}, \quad (2)$$

d.h. der Drehimpulsvektor  $\vec{L}$  ist nach Betrag und Richtung zeitlich konstant. Die einfachste Bewegung ist eine Rotation um die Figurenachse. Hier ist  $\vec{L} = J_x \vec{\omega}$ , und  $\vec{\omega}$  ist, wie auch  $\vec{L}$ , raum-

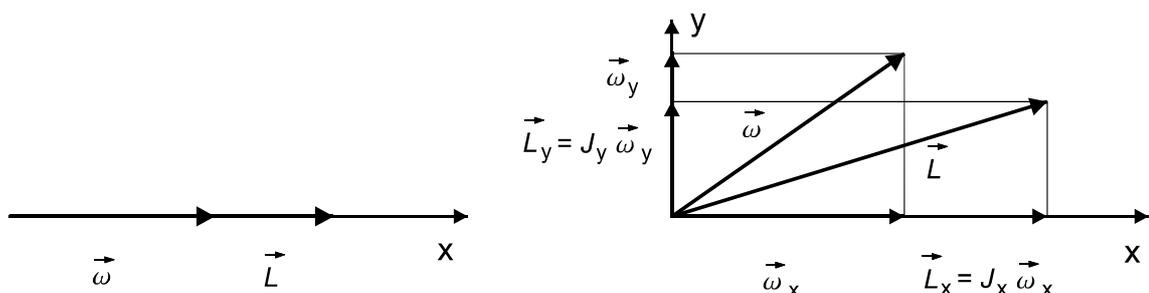


Abb.1 a) ROTATION UM DIE FIGURENACHSE      b) ALLGEMEINER FALL DER ROTATION

fest und fällt mit der Richtung von  $\vec{L}$  und der ebenfalls raumfesten Figurenachse (hier die x-Achse) zusammen (Abb.1a). Wird der Kreisel - z.B. durch einen kurzen seitlichen Schlag - in dieser Bewegungsform gestört oder rotiert er von vornherein nicht um die Figurenachse, so tritt die sog. Nutationsbewegung auf. Hierbei sind  $\vec{L}$  und  $\vec{\omega}$  nicht mehr parallel, da

$$\vec{L} = J_x \vec{\omega}_x + J_y \vec{\omega}_y + J_z \vec{\omega}_z. \quad (3)$$

Dies wird in Abb.1b für einen bestimmten Zeitpunkt der Bewegung ( $\vec{\omega}_z = 0$ ) gezeigt. Jetzt ist  $\vec{\omega}$  nicht mehr raumfest. Das Gleiche gilt auch für die Figurenachse, die dann weder parallel zu  $\vec{L}$  noch zu  $\vec{\omega}$  ist. Da  $\vec{\omega}$  auch nicht körperfest ist, wird die Drehachse *momentane Drehachse* genannt; sie verändert ständig ihre Lage im Körper. Momentane Drehachse und Figurenachse

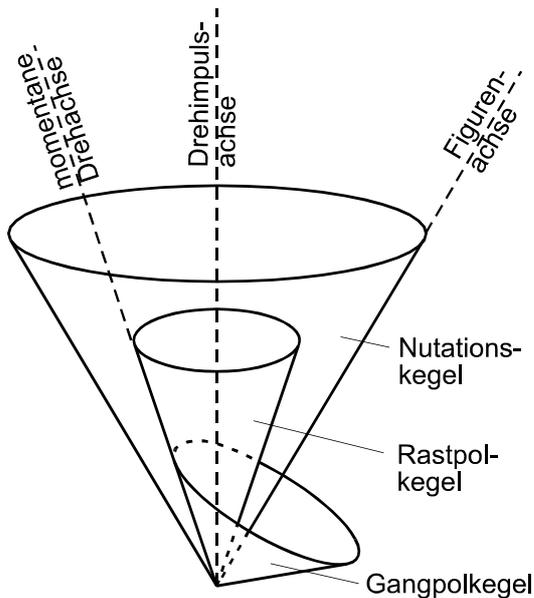


Abb.2 KRÄFTEFREIER KREISEL

rotieren mit der Nutationswinkelgeschwindigkeit  $\omega_N$  um die raumfeste Drehimpulsachse und beschreiben dabei Kreisegel (Abb.2), die symmetrisch zur Drehimpulsachse liegen. Die Bewegung kann man sich veranschaulichen durch das Abrollen des sog. Gangpolkegels, dessen Symmetrieachse die Figurenachse ist, am sog. Rastpolkegel, der die Drehimpulsachse zur Symmetrieachse hat. Die Berührungslinie zwischen beiden Kegeln ergibt die Lage der momentanen Drehachse. Wie man aus dieser Darstellung sieht, liegen die drei Achsen stets in einer (sich mit der Nutationswinkelgeschwindigkeit  $\omega_N$  im Raum drehenden) Ebene. Abb.2 beschreibt die Verhältnisse für einen abgeplatteten Kreisel ( $J_x > J_y = J_z$ ). Im Fall

des verlängerten Kreisels gilt  $J_x < J_y = J_z$ , dann rollt der Gangpolkegel mit seiner Außenseite am Rastpolkegel ab. Wie man sich leicht klar machen kann, liegt dann die momentane Drehachse zwischen Drehimpuls- und Figurenachse.

Die Nutationswinkelgeschwindigkeit  $\omega_N$  erhält man durch folgende Überlegung: Aus Gl. (3) folgt mit  $J_y = J_z = J_s$  sowie  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y + \vec{\omega}_z$  und Auflösung nach  $\vec{\omega}$ :

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{L}}{J_s} + \left(1 - \frac{J_x}{J_s}\right) \cdot \vec{\omega}_x. \quad (4)$$

Dieser Ausdruck stellt eine Komponentenzzerlegung von  $\vec{\omega}$  in Richtung  $\vec{L}$  und in x-Richtung dar. Die erste Komponente ist die Nutationswinkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega}_N = \frac{\vec{L}}{J_s}. \quad (5)$$

3. Präzession des Kreisels unter Einwirkung äußerer Drehmomente: Wirkt auf einen Kreisel ein äußeres Drehmoment  $\vec{M}$ , so ändert sich sein Drehimpuls nach Gl. (1):

$$d\vec{L} = \vec{M}dt. \quad (6)$$

Zerlegt man  $d\vec{L}$  in die beiden Komponenten  $d\vec{L}_{\parallel}$  und  $d\vec{L}_{\perp}$  (Abb.3), dann liegt die Komponente

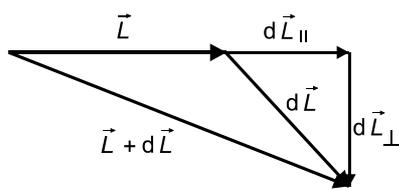


Abb.3 DREHIMPULSZERLEGUNG

$d\vec{L}_{\parallel}$  parallel zum Drehimpulsvektor  $\vec{L}$  und vergrößert dadurch die Winkelgeschwindigkeit. Beispielsweise erhöht sich die Drehzahl eines Elektromotors, wenn durch die Erhöhung der Spannung die am Anker (Kreisel) angreifenden magnetischen Drehmomente wachsen. Die Komponente  $d\vec{L}_{\perp}$  steht senkrecht auf dem Drehimpulsvektor

$\vec{L}$  und bewirkt, dass sich die Richtung von  $\vec{L}$  ändert - der Kreisel *präzediert*. Diese Bewegung lässt sich anschaulich mit dem sog. Gyroskop zeigen. Das Gyroskop (Abb.4) ist vom Prinzip her ein kardanischer Kreisel, auf den man ein zusätzliches äußeres Drehmoment, das eine Präzessionsbewegung des Kreisels hervorruft, wirken lassen kann.

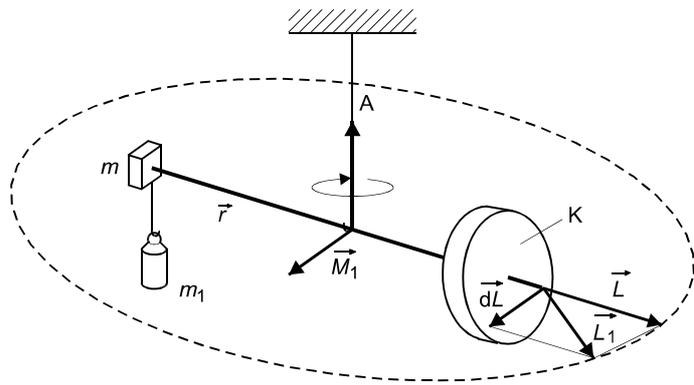


Abb. 4 GYROSKOP (PRINZIP)

Betrachten wir zunächst die Bewegung bei fehlendem äußerem Drehmoment. Dies wäre in Abb. 4 der Fall, wenn sich die entgegengesetzten Drehmomente der Kreiselscheibe und der Ausgleichsmasse  $m$  kompensieren (für  $m_1 = 0 \Rightarrow \vec{M}_1 = 0$ ). In diesem Fall ist die Schwerkraft vollständig kompensiert und die als Waage aufgebaute Anordnung im Gleichgewicht. Der Kreisel soll mit dem Drehimpuls

$\vec{L}$  um die Figurenachse rotieren. Nach dem Drehimpulserhaltungssatz sind  $\vec{L}$  und damit auch die Figurenachse raumfest. Erzeugt man durch eine Zusatzmasse  $m_1$  ein zusätzliches Drehmoment  $\vec{M}_1 = \vec{r} \times (m_1 \vec{g})$ , das auf Grund der Anordnung senkrecht auf dem Drehimpulsvektor  $\vec{L}$  steht, so muss dieser seine Richtung

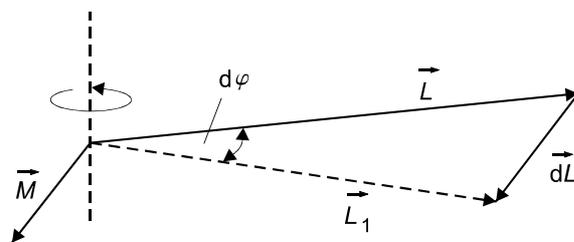


Abb. 5 PRÄZSSION

fortlaufend ändern und die ganze Anordnung dreht sich mit der Präzessionswinkelgeschwindigkeit  $\omega_P$  um die Achse A. Für die zeitliche Änderung  $d\varphi$  ergibt sich nach Abb. 5 mit Gl. (6)  $d\varphi = dL / L = M \cdot dt / L$ , woraus folgt:

$$\omega_P = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L}. \quad (7)$$

4. Bestimmung der Hauptträgheitsmomente: Aus Messungen der Nutationsperiode  $T_N$  und der Präzessionsperiode  $T_P$  können die Hauptträgheitsmomente  $J_x$  und  $J_s$  des Kreisels wie folgt bestimmt werden: Aus Gl. (7) folgt mit  $L = \omega_x J_x$  und  $\omega_x = 2\pi \cdot n$  ( $n$  - Kreisel-drehzahl) für die Periodendauer der Präzession

$$T_P = \frac{4\pi^2 J_x n}{M}, \quad (8)$$

woraus  $J_x$  berechnet werden kann.

Auf die Bestimmung von  $J_s$  führt folgende Überlegung: Durch einen seitlichen Stoß auf die Kreiselachse zur Einleitung der Nutation wird der Drehimpuls (besonders in seiner Richtung) etwas verändert. Es gilt Gl. (3), die, multipliziert mit dem Einheitsvektor in x-Richtung (Figurenachse!),  $L \cos \delta = J_x \omega_x$  ergibt. Dabei ist  $\delta$  der halbe Öffnungswinkel des Nutationskegels. Mit der Näherung  $\cos \delta \approx 1$  für kleine Öffnungswinkel folgt aus Gl. (5)

$$T_N = \frac{J_s}{J_x} \cdot \frac{1}{n}, \quad (9)$$

die Periodendauer der Nutationsbewegung, woraus  $J_s$  berechnet werden kann.

## AUFGABEN

- Messung der Periodendauer  $T_P$  der Präzession für 10 verschiedene Drehmomente bei einer Kreiseldrehzahl  $n = 12 \text{ s}^{-1}$ , graphische Darstellung  $T_P = f(1/M)$  (Gl. (8)) und Bestimmung des Trägheitsmomentes  $J_x$ .
- Messung der Periodendauer  $T_P$  der Präzession für 10 verschiedene Kreiseldrehzahlen im Bereich zwischen  $n = 7 \text{ s}^{-1}$  und  $n = 16 \text{ s}^{-1}$  bei festem Drehmoment (mit Massenstück  $m = 200 \text{ g}$ ), graphische Darstellung  $T_P = f(n)$  (Gl. (8)) und Bestimmung des Trägheitsmomentes  $J_x$ .
- Messung der Periodendauer  $T_N$  der Nutation am präzessionsfreien Kreisel für 10 verschiedene Kreiseldrehzahlen im Bereich von  $n = 4 \text{ s}^{-1}$  bis  $n = 12 \text{ s}^{-1}$ , graphische Darstellung  $T_N = f(1/n)$  (Gl. (9)) und Bestimmung des Trägheitsmomentes  $J_s$ .
- Näherungsweise Berechnung des Trägheitsmomentes  $J_x$  des Gyroskops und Vergleich mit den experimentellen Werten aus den Aufgaben 1 und 2.
- a) obligatorisch: Vergleich des experimentellen Wertes für  $J_s$  (Aufgabe 3) mit dem Sollwert:  
 Versuchsplatz 1:  $(9,0 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$     Versuchsplatz 2:  $(8,7 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$   
 Versuchsplatz 3:  $(9,1 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$     Versuchsplatz 4:  $(9,7 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$   
 b) freiwillig: selbständige Berechnung der in a) vorgegebenen Sollwerte.

## VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Der Versuchsaufbau im Praktikum (Abb.6) ist eine Realisierung des oben beschriebenen Gyroskops. Der Kreisel K ist an einem Ende des Waagebalkens W so angebracht, dass seine Figurenachse mit der Richtung des Waagebalkens zusammenfällt. Der Kreisel wird über eine Reibradkupplung mit Gummiring durch einen kleinen Elektromotor M mit einstellbarer Drehzahl angetrieben. Die Drehzahl kann mit einer Lichtschrankenordnung LS und nachgeschaltetem Digi-

talzähler gemessen werden. Hierbei erfolgt die Signalübertragung vom beweglich aufgehängten Teil des Gyroskops auf den ortsfesten Teil des Übertragungssystems zum Anzeigegerät optoelektronisch mittels Leuchtdiode, Lichtleiter und Fototransistor. Der Waagebalken ist in einem

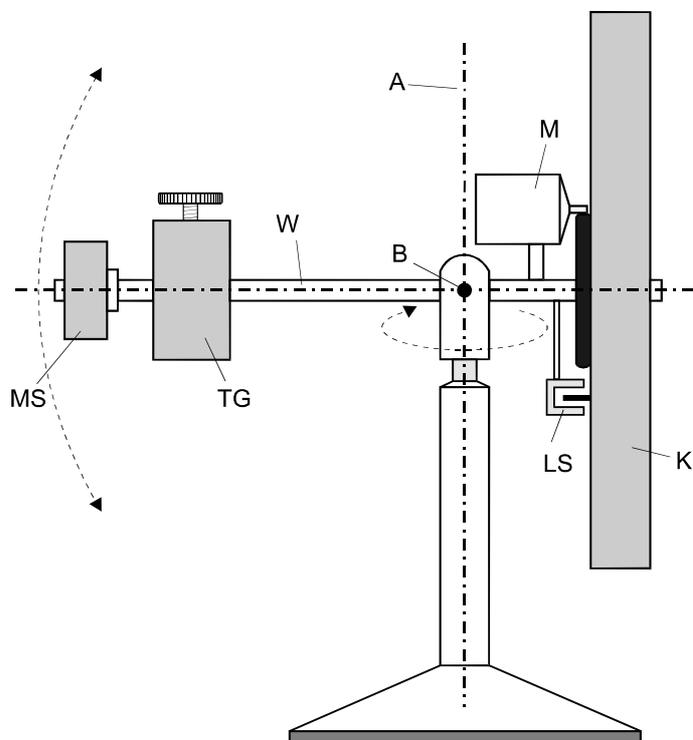


Abb. 6 VERSUCHSANORDNUNG

Gelenk drehbar um die Achse B aufgehängt. Das Gelenk selbst und damit der ganze Aufbau ist zusätzlich um die Achse A leicht drehbar gelagert. Auf der anderen Seite des Waagebalkens befinden sich ein verschiebbares Tariergewicht TG und eine Aufnahme für austauschbare Massestücke MS. Die Massestücke im Bereich von  $m = 50 \text{ g}$  bis  $m = 500 \text{ g}$  sind  $50 \text{ g}$ -weise gestuft. Bei zunächst nicht aufgesteckten Massestücken kann die Anordnung durch Verschieben des Tariergewichtes TG so austariert werden, dass sie im Schwerpunkt unterstützt ist und folglich keine Drehmomente auf den Kreisel wirken. Der rotierende Kreisel behält seine Figurenachse (=

Drehimpulsachse) im Raum bei. Durch Aufstecken der Massestücke MS mit bekannter Masse  $m$  können jetzt definierte Drehmomente erzeugt und damit die Präzession eingeleitet werden.

**Alle Drehzahländerungen müssen langsam vorgenommen werden, um die Reibradkupplung zu schonen!**

Für die Aufgaben 1 bis 3 werden die Periodendauern  $T_P$  und  $T_N$  mit einer elektronischen Handstoppuhr gemessen. Die Messung der für die Auswertung erforderlichen geometrischen Daten erfolgt mit einem Messschieber. Die Nutationsbewegung (Aufgabe 3) wird am gut austarierten Gyroskop durch einen leichten Stoß gegen den Waagebalken eingeleitet. Die Messung von  $T_N$  ist wegen der rel. schnell abklingenden Nutation bei rel. hoher Nutationsfrequenz etwas schwierig und sollte deshalb zunächst ein wenig trainiert werden.

Zur näherungsweisen Berechnung des Trägheitsmomentes  $J_x$  (Aufgabe 4) wird der Kreisel (gedanklich!) in zweckmäßig gewählte Hohlzylinder zerlegt, deren Trägheitsmomente summiert werden. Das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders mit dem Innenradius  $r_1$  und dem Außenradius  $r_2$ , der Höhe  $h$  und der Dichte  $\rho$  bezüglich seiner Symmetrieachse ergibt sich aus

$$J = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot h \cdot (r_2^4 - r_1^4).$$

Für Aufgabe 5b) werden analog wie bei Aufgabe 4 die Trägheitsmomente aller zu  $J_s$  beitragenden Zylinder und Hohlzylinder, hier aber bzgl. der relevanten Drehachse **B** (Abb.6), addiert. Bezeichnet man den Abstand zwischen der Drehachse **B** und der zu **B** parallelen Schwerpunktachse eines Hohlzylinders mit  $s$ , so beträgt sein (äquatoriales) Trägheitsmoment

$$J = \rho \cdot \pi \cdot h \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot \left\{ \frac{1}{4} (r_2^2 + r_1^2) + \frac{h^2}{12} + s^2 \right\}.$$

Zur Ausführung der Rechnungen steht das PC-Programm "KREISEL" zur Verfügung. Eingabegrößen sind die geometrischen Daten mit Messunsicherheiten, ausgegeben werden die Einzelträgheitsmomente und deren Summe mit Messunsicherheiten.

Zusätzliche Angaben:

Dichte von Messing  $\rho_M = 8,4 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}$

Dichte von Eisen  $\rho_{Fe} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}$ .

## FRAGEN

1. Was versteht man unter den Hauptträgheitsmomenten eines starren Körpers?
2. Welchen Einfluss hat das Trägheitsmoment des Motorankers auf das Messergebnis für  $J_x$ ?
3. Welche Anwendungen des Kreiselpinzips in der Technik kennen Sie?